1985A.
E. I. 4.

Anleitung

zu

finanziellen, politischen und juridischen

Rechnungen.

Druck und Papier
von Fr. Vieweg und Sohn
in Braunschweig.

Anleitung

zu

finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen.

Ein Handbuch

für

Staatsmänner, Cameralisten, Kaufleute, Juristen, Forstmänner, Oeconomen ꝛc.

von

Dr. L. Oettinger,

Großherzoglich-Badischem Hofrath und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg im Breisgau.

Braunschweig,

Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1845.

Vorrede.

Der Theil der Mathematik, welchen die vorliegende Schrift behandelt, gewinnt mit der Ausbildung der socialen Verhältnisse immer größere Bedeutung. Eine wissenschaftliche Begründung desselben und Feststellung der Prinzipien, worauf er beruht, möchte daher wohl gerechtfertigt sein. Im vorigen Jahrhundert fing man an, ihn als einen besondern Zweig der Mathematik unter dem Titel mathesis forensis zu behandeln. Doch bald zeigte es sich, daß diese Bezeichnung zu eng aufgefaßt war. Man untersuchte, als die Aufmerksamkeit auf ihn gelenkt war, einzelne ihm zugehörige Theile und erweiterte das Material, ohne es als ihm eigends zugewiesen zu bezeichnen. Es war daher die Aufgabe und ist es zum Theil noch, diesen Zweig der Mathematik in seiner Besonderheit zu begrenzen, durch Inhalt zu beleben und diesen wissenschaftlich zu begründen. Chassot de Florencourt suchte zuerst in seinen »Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst« (Altenburg 1781) den Inhalt näher zu bezeichnen. Ihm folgten Kästner (Fortsetzung der Rechenkunst in Anwendung auf mancherlei Geschäfte), von Langsdorf, Michelsen, Koch, Brune, Grunert u. A. An das bisher Geleistete soll sich nun die vorliegende Schrift anschließen und als ein Versuch zu einer wissenschaftlichen Begründung dieses wichtigen, bisher wenig beachteten Zweiges der Mathematik betrachtet werden.

Die Schrift unterscheidet sich von den hieher gehörigen durch Inhalt und Anlage. Manches wurde weggelassen, was sich in ihnen findet, manches wurde aufgenommen, was nicht in denselben enthalten ist. Die Kenntniß der Lehren, welche der Arithmetik und Algebra (mit Einschluß der Logarithmen) zugehören, wird in ihr vorausgesetzt. Daher ist alles, was sich zunächst auf Anwendung der Elemente dieser Doctrinen bezieht, und worüber Polack, Florencourt, Kästner, Michelsen ꝛc. mehr oder weniger beigebracht haben, nicht aufgenommen; ebenso nicht die Anwendungen aus den Elementen der Geometrie, welche Florencourt noch mittheilt. Dagegen ist die Lehre von den einfachen Zinsen aufgenommen, welche sich nicht immer in den hieher gehörigen Schriften vorfindet, obgleich sie zu einer wissenschaftlichen Begründung dieses Zweiges der Mathematik wesentlich nöthig ist, wie sich zeigen wird. In größerer Ausdehnung und theilweise neue Sätze enthaltend sind die Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-Rechnung (5tes Kapitel); die von der Sterblichkeit (7tes Kapitel); das Interusurium (4tes Kapitel) behandelt. Als größtentheils neue Zugabe ist der Inhalt des 3ten und 6ten Kapitels zu betrachten, wie sich aus dem später Folgenden und dem Inhaltsverzeichniß ergiebt.

Bei Ausarbeitung der vorliegenden Schrift war es hauptsächlich Absicht, zu einer genügenderen wissenschaftlichen Begründung des hier behandelten Zweiges der Mathematik beizutragen. Die Auflösung eines großen Theils der hier zu untersuchenden Probleme beruht auf Anwendung der Zinszinsrechnung, wie dies der Inhalt des 2ten, 3ten, 4ten, 6ten und 8ten Kapitels nachweist. So lange nun nicht dargethan ist, ob bei Beantwortung der vorliegenden Probleme die Rechnung mit Zinses-Zinsen oder einfachen Zinsen zu Grunde gelegt werden müsse, so lange entbehrt der Inhalt des hierher gehörigen Zweiges der Mathematik einer wissenschaftlichen Grundlage. Daß dies aber bis jetzt nicht nachgewiesen war, zeigt der Inhalt des 3ten und namentlich des 4ten Kapitels, sonst hätte die Streitfrage über die richtige Berechnung des Interusuriums nicht bis jetzt unentschieden bleiben können, zeigen insbesondere die in §. 49 gegebenen

geschichtlichen Notizen. Manche Schriftsteller haben in den hierher gehörigen Schriften nicht die Lehre von den einfachen Zinsen, sondern nur die von den Zinses-Zinsen behandelt. Hieraus kann aber nichts für oder gegen die Sache gefolgert, keineswegs aber ein Schluß auf Unzulässigkeit der Rechnung mit einfachen Zinsen in einzelnen Fällen gemacht werden. Aus der Nicht-Aufnahme einer Lehre in eine Schrift ergiebt sich noch kein Beweis für ihre Unzulässigkeit, namentlich dann nicht, wenn sie, wie hier, Gegenstand einer Streitfrage ist. Wenn nun in den §§. 28—31 dieser Schrift nachgewiesen wird, daß diese Frage entschieden werden könne und wie sie entschieden werden müsse, so möchte wohl die Entrückung dieses Zweiges der Mathematik aus dem Gebiete der Unsicherheit und Willkühr als ein Beitrag zu einer genügenden wissenschaftlichen Begründung bezeichnet werden können, ohne daß damit irgend eine Anmaßung oder Schmälerung der Verdienste Anderer verbunden wäre.

Ueber den Inhalt der einzelnen Kapitel ist Folgendes zu bemerken:

In dem ersten Kapitel ist die Lehre von den einfachen Zinsen gegeben. Sie findet sich, wie schon bemerkt wurde, in manchen hierher gehörigen Schriften nicht; jedoch mit Unrecht; denn einzelne in ihr zu entwickelnde Sätze (§. 2—6, 10 und 11) bilden die Grundlage für die Zinszinsrechnung. Wenn nun schon später (3tes Kapitel) nachgewiesen wird, daß diese Rechnung in bestimmten Fällen unzulässig ist und deswegen keine Anwendung findet, so ist doch der Inhalt des 1sten Kapitels weder als überflüssig, noch seine Behandlung als ein Widerspruch zu betrachten. Gerade um diese Unzulässigkeit zu zeigen, mußte diese Lehre zuerst entwickelt werden. Ohne ihre Entwicklung hätte der Beweis hierfür nicht geführt werden können. Auf die bisherige, unrichtige Behandlung folgender Probleme ist aufmerksam zu machen: Die Ermittlung der Zeit, wie oft bei irgend einem Zinsfuße eine Summe gezahlt werden muß, um ein bestimmtes Kapital hervorzubringen (§. 8 S. 8 u. ff.), die Ermittlung der Summe, welche mehrere Mal gezahlt werden muß, um bei gegebenem Zinsfuße irgend ein

Kapital in bestimmter Zeit zu tilgen (§. 13, S. 20). Das dritte ist §. 16 angeführt.

In dem zweiten Kapitel tritt hauptsächlich die Unterscheidung zwischen conformem und relativem Zinsfuß hervor, deren Bedeutung in §. 19, S. 32 gegeben ist. Sie sondert alle zu der Zinszinsrechnung gehörigen Probleme in zwei besondere Classen und zieht sich deswegen durch alle von ihr abhängigen Zweige durch, wie Lotterie-Anlehen, Leibrenten ꝛc. In dem 8ten Kapitel sind die Anwendungen, die sich hieraus ableiten lassen, nicht gemacht, weil dies ohne weitere Schwierigkeit geschehen kann. Aus der Bedeutung beider Begriffe rechtfertigt sich ihre Einführung in diese Lehre. Namen mußten ihnen gegeben werden. Aus den S. 32 angeführten Gründen wurden die angegebenen gewählt. Die Gleichungen, woraus sich die beiden Begriffe ableiten, sind schon längst bekannt, ohne daß man sich über ihre Bedeutung verständigt hat, wie sich aus Tetens Werk (Leibrenten und Anwartschaften I. S. 17 u. ff.) und Meyer's Werk (Leibrenten und Anwartschaften I. S. 13) ergiebt. Durch Feststellung der genannten Begriffe tritt eine Bestimmtheit in die übrigen, hievon abhängigen Probleme, sie mögen in näherem oder entfernterem Zusammenhange damit stehen, welche die systematische Durchführung dieses Gegenstandes sehr erleichtert, wie sich zunächst aus §. 22, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31 u. s. w., dann aus §. 21, 25, 33 u. s. w. ergiebt. Dort handelt es sich um das Anwachsen der Kapitalien mit Zinses-Zinsen, oder Tilgung der Anlehen, hier um Bestimmung der hierzu erforderlichen Zeiten, oder des Zinsfußes. Daß eine systematische Untersuchung des vorliegenden Gegenstandes in der angegebenen Weise auf Bekanntes und Neues, so wie auf Berichtigungen führen mußte, wird sich aus der Vergleichung des Inhaltes der angeführten §§. mit dem der hierher gehörigen Schriften ergeben. Auch die Probleme, welche zur Bestimmung der Zeit dienen, erhalten bei dieser Durchführung eine genaue Fixirung und eine Umgestaltung, wie sie in §. 21, 25, 33 ꝛc. gegeben wurde. Dasselbe gilt von den Problemen, welche sich auf Ermittlung des Zinsfußes beziehen und in den nämlichen §§. behandelt sind. Hierüber wurden einfache, aber nur annä-

hernde Auflösungsmethoden gegeben, die in den meisten Fällen genügen werden, und wozu sich die in der Anweisung zum Gebrauche der Tafeln I.—IV. S. 300 u. ff. mitgetheilte gesellt, welche sich durch ihre Kürze und Bequemlichkeit besonders empfiehlt.

Eine andere Frage ist: Wann soll der conforme, wann der relative Zinsfuß in Anwendung kommen? Diese Frage läßt sich a priori nicht entscheiden, wie man aus §. 28—31 erkennt. Hier werden hauptsächlich äußere Gründe entscheiden müssen, Uebereinkunft, Möglichkeit, ein Kapital zu benutzen ꝛc. Anstalten, welche ihr Kapital nur in Jahresfristen benutzen können, werden den conformen Zinsfuß zu Grunde zu legen haben, wenn die Auszahlungen halbjährlich geschehen sollen. Kann aber ein Kapital in kleineren Zeiträumen als Jahresfristen benutzt werden, so ist der relative Zinsfuß zu Grunde zu legen. Außerdem finden die in §. 28—31 aufgestellten Sätze hier ihre Anwendung.

Vergleicht man die in den hierher gehörigen Schriften aufgestellten Ansichten mit einander, so verwirft ein Schriftsteller die Voraussetzungen des andern. So erklärt Tetens I. §. 28 u. ff. den relativen Zinsfuß für unzulässig, welchen Price und Morgan ihren Rechnungen zu Grunde legten. Brune erklärt (Zinsrechnung pag. 149) die von Tetens aufgestellte Berechnungsart für nicht anwendbar u. s. w. Das Schwankende in den Ansichten wird sich heben, wenn man sich über den Begriff verständigt hat.

Im dritten Kapitel ist die Beziehung, worin die Rechnung mit einfachen Zinsen zu der mit Zinses-Zinsen steht, untersucht. Diese Untersuchung giebt dem hierher gehörigen Material eine sichere Grundlage und dient, wie schon bemerkt, zu seiner wissenschaftlichen Begründung. Als solche ist namentlich der Inhalt der §§. 28—31 anzusehen. Als neue Zugabe ist zu bezeichnen: der Inhalt von §. 28—31, §. 34, 36 (theilweise), 37, 38, 39 (größtentheils), 41 und 42. In den mir bekannten Schriften habe ich das hier Mitgetheilte nicht vorgefunden.

In dem vierten Kapitel ist das Nähere über die Beantwortung einer in der Jurisprudenz praktisch wichtigen Frage, die Berechnung des Interusuriums, beigebracht. Der Inhalt des 3ten

Kapitels und namentlich der §§. 28—30 bildet die Grundlage für die Entscheidung dieser Streitfrage, die schon so oft seit ihrer Anregung zu Anfang des vorigen Jahrhunderts besprochen wurde und worüber man sich bisher nicht einigen konnte, wie man sich aus §. 46—49 überzeugt. Da dieser Gegenstand dem römischen Rechte entnommen ist, so ist das Nöthige hierüber (§. 45) beigebracht. Ferner sind die verschiedenen Methoden, welche über die Berechnung des Interusuriums aufgestellt wurden, und ihre Kritik gegeben, worin nachgewiesen ist, daß nur die Rechnung mit Zinses-Zinsen, also die Leibnitz'sche Methode ein richtiges Resultat verbürgt. Die in §. 47—49 mitgetheilten geschichtlichen Notizen geben ein Bild von der Aufmerksamkeit und der Mühe, welche man der Entscheidung dieser Streitfrage erfolglos widmete, und bestätigen dadurch die Wichtigkeit der in §. 28—30 aufgefundenen Sätze.

Im fünften Kapitel sind die Elemente der Wahrscheinlichkeits-Rechnung entwickelt. Die Sätze, welche die Grundlage dieser interessanten Wissenschaft bilden, finden sich in §. 50 zusammengestellt. Sie lassen sich auf sehr wenige und einfache zurückbringen, wie dies dort und näher noch in Crelle's Journal, 26ster Band, nachgewiesen ist. Laplace und besonders Poisson haben die Grundsätze dieser Wissenschaft unnöthig vermehrt. So hat z. B. Laplace den in 1 und 2 §. 55 S. 143 aufgestellten Satz über die Bestimmung des Werthes der Erwartung zu einem Grundsatze in dieser Wissenschaft (Théor. anal. d. Prob. Introd. pag. XIII., XIV.) gemacht, ferner den Satz 8 §. 56, und die Begründungsformel in §. 63, was sie ihrer Natur nach nicht wohl sein können. Wäre die Ansicht Laplace's richtig, so müßten noch andere von den im 5ten Kapitel mitgetheilten Sätzen und darunter auch aus §. 56 dazu erhoben werden. In der Wahrscheinlichkeits-Rechnung findet die Lehre von den Combinationen große Anwendung. Daher sind einige hierher gehörige Sätze in §. 51 und 52 entwickelt. Hierbei war hauptsächlich die Absicht, diese Gebilde auf einfachere Grundzüge zurückzubringen, als es gewöhnlich in den die Combinationen behandelnden Schriften geschieht. Als größtentheils neue Zugabe ist zu betrachten der In-

halt von §. 56, 57, 58, 59, 60 und 61. Die §§. 63 und 64 enthalten neue Begründungen.

Die drei letzten Kapitel beschäftigen sich mit Anwendung der in dem Vorhergehenden aufgestellten Sätze.

Im sechsten Kapitel sind die Lotterie-Anlehen und Lotterien behandelt. Neue Zugabe ist die Untersuchung über Lotterie-Anlehen und ferner die über das Roulette-Spiel. Eine ausführlichere Betrachtung der Lotterie-Anlehen findet sich in meiner Schrift »Theorie der Lotterie-Anlehen, Freiburg«. Das Lotto wurde in dem 5ten Kapitel betrachtet. Die königlich-sächsische Landes-Lotterie ist deswegen als Gegenstand der Untersuchung gewählt, weil sie ihrer Anlage nach zu den einfacheren gehört und deswegen die Untersuchung erleichtert, und weil es hinreicht, vorerst nur eine derartige Lotterie zu betrachten, um den Maßstab zur Beurtheilung an andere legen zu können. Zweck der Untersuchung der Classen-Lotterien, des Lotto's, des Roulette-Spiels ist, darauf hinzuweisen, daß die Aufhebung derartiger Institute sehr zweckmäßig und deswegen wünschenswerth sein möchte.

Bei Bearbeitung des Inhaltes des siebenten Kapitels, worin die Gesetze der Sterblichkeit behandelt sind, wird die Aufmerksamkeit vorzüglich auf die Art und Weise zu richten sein, wie diese Gesetze am sichersten ermittelt werden können. Dies ist in §. 76—79 geschehen. Hierdurch ergeben sich vier Methoden zur Ermittlung derselben und ihre Kritik, was in §. 79 näher erörtert ist. Von den aufgestellten Methoden empfiehlt sich die dritte (S. 230) als diejenige, welche ein richtiges Resultat verbürgt und die immer anwendbar sein wird. Diesem Kapitel sind sechs Tafeln (V.—X.) beigegeben. Die Tafel V. giebt die Sterblichkeit für Berlin an, wie sie Casper in seinem Werke (wahrscheinliche Lebensdauer, Berlin 1835) mitgetheilt hat. Die Rubriken A, B, D und E sind daraus genommen; die Rubriken C (Summe der Lebenden) und F (mittlere Lebensdauer) sind aus der Rubrik B abgeleitet und von mir berechnet. Casper hat (§. 5, S. 14) die Methode zur Bestimmung der mittlern Lebensdauer nicht richtig (vergl. §. 85, S. 253 u. ff.) gegeben. Dennoch sind die von ihm hierüber mitgetheilten Werthe richtig, wie sich aus der Ueber-

einstimmung der von mir unter F angegebenen und auf anderem Wege gefundenen Werthe ergiebt. Nur in ganz wenigen Fällen (mittlere Lebensdauer, 60stes und 70stes Jahr für Männer, 45stes für Weiber) zeigte sich eine, jedoch unbedeutende Differenz. Bei Berechnung der von mir angegebenen Werthe wurde die dritte Decimalstelle mit berücksichtigt. Die Tafel VI. giebt die Sterblichkeit für Baiern an, wie sie von D. A. Gebhard in seinem erst kürzlich erschienenen Werke (Ueber Wittwen- und Waisen-Pensions-Anstalten, München 1844) angegeben wurde. Die Rubriken A und B (die Grundlage der ganzen Tafel) und D sind hier aufgenommen. In den hieraus abgeleiteten Rubriken C, E und F zeigen sich nicht unbedeutende Differenzen zwischen den von mir berechneten Werthen und den von Gebhard mitgetheilten. Es haben sich nämlich in den zuletzt bezeichneten Rubriken der von G. angegebenen Werthe Rechnungs- oder Druckfehler eingeschlichen, die in der von mir mitgetheilten Tafel berichtigt sind. In der Rubrik C (Summe der Lebenden) sind die letzten Ziffern derjenigen Zahlen, welche die Summe der zusammenlebenden Männer angeben, vom 59sten Jahre an bis zur Geburt unrichtig. Bei dem weiblichen Geschlechte sind sie es vom 82sten Jahre an bis zur Geburt. Ferner findet sich die Zahl der Lebenden des weiblichen Geschlechtes (Jahr 9) zu 5635 angegeben. Sie muß offenbar 5736 heißen, wie eine einfache Vergleichung zeigt. In den Zahlen, welche die Summen der Lebenden für das weibliche Geschlecht in den Jahren 14—10 angeben, sind zwei Ziffern, die 4te und 6te, unrichtig, wie man sich leicht überzeugt. Die von G. für die mittlere Lebensdauer berechneten Werthe stimmen nicht immer mit den hier angegebenen überein. Bei allen Differenzen habe ich die Rechnung wiederholt und theile die so erhaltenen Werthe mit. Die von G. für die wahrscheinliche Lebensdauer angegebenen Werthe sind wohl durchgehends um 0,5 zu klein; mehrere differiren noch um ein größeres Intervall, wie die Vergleichung zeigt. Bei den hier mitgetheilten Werthen wurde auch die dritte Decimalstelle berücksichtigt. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die von G. in der Rubrik A und B mitgetheilten Werthe richtig sind. Dies scheint der Fall zu sein, denn mehrfach angestellte Prüfungen über-

zeugten mich hievon. Es wäre zu bedauern, wenn dies sich nicht so verhielte, da die viele Mühe, welche die Aufstellung einer Sterblichkeits-Tafel verursacht, vergebens aufgewendet wäre, indem der Werth einer solchen einzig und allein auf der Richtigkeit der mitgetheilten Zahlen beruht. Die Tafel VII. giebt die Sterblichkeit für Belgien an. Die Rubriken A, B, C sind von Quetelet in seinem Werke (sur l'homme; eine deutsche Ausgabe dieses Werkes wurde von Riecke, Stuttgart, besorgt) angegeben. Die Rubriken C—I sind von mir berechnet. Aus der Rubrik H (mittlere Lebensdauer auf dem Lande) ergiebt sich das bemerkenswerthe Resultat, daß das weibliche Geschlecht auf dem Lande vom 5ten Jahre an bis einschließlich zum 40sten eine kleinere Lebensdauer hat als das männliche. Von dieser Zeit an übersteigt die mittlere Lebensdauer des weiblichen Geschlechts die des männlichen wieder, jedoch nicht bedeutend, und nicht in dem Grade, wie es in den Städten des nämlichen Landes der Fall ist. Auf die nämliche Erscheinung weist die Sterblichkeits-Tafel für Baiern, jedoch in größerer Ausdehnung hin, denn die mittlere Lebensdauer des männlichen Geschlechtes ist schon vom dritten Jahre an größer als die des weiblichen und überwiegt letztere mit wenigen Ausnahmen durch das ganze Leben. Die Tafel von Brune bietet die nämliche Erscheinung, jedoch für einen ganz kleinen Zeitraum vom 20sten bis 23sten Lebensjahre. Nach den übrigen Sterblichkeits-Tafeln (für Berlin, für Leipzig, für die Städte Belgiens, nach Wargentin) übersteigt die mittlere Lebensdauer des weiblichen Geschlechts die des männlichen. Es sprechen daher vier Tafeln unter sieben für eine durchgängig größere mittlere Lebensdauer des weiblichen Geschlechtes, drei für eine Abänderung dieses Gesetzes. Es entsteht daher mit Recht die Frage, ob die Ansicht, daß sich das weibliche Geschlecht einer größern mittlern Lebensdauer als das männliche zu erfreuen habe, der man sich in der neuern Zeit allgemein hinzuwenden schien, als wahr hinzunehmen sei, oder ob nicht nach den vorliegenden Thatsachen hier eine Modifikation eintreten müsse? Ueber diese Frage können nur weitere Untersuchungen entscheiden. Zieht man nun ein Resultat aus allen vorliegenden Beobachtungen, so gelangt man zu folgen-

dem Satze: die mittlere Lebensdauer des weiblichen Geschlechtes ist in den ersten Lebensjahren größer als die des männlichen. Ob sich dieses Verhältniß auf die ganze Lebenszeit, wie einige Beobachtungen andeuten, und in diesem Falle unter welchen Bedingungen, oder ob es sich nur bis zu einer bestimmten Altersstufe, und unter welchen Modifikationen, erstrecke? ist noch zu ermitteln.

Die Tafel VIII. giebt eine, wie ich glaube, nicht unwillkommene Zusammenstellung der meisten bis jetzt bekannt gewordenen Sterblichkeits-Tafeln; die Tafel IX. eine Zusammenstellung der aus verschiedenen Tafeln abgeleiteten mittleren Lebensdauern. Sie sind aus den hierher gehörigen Werken, Vega's Logarithmen-Tafeln, Littrow's Schriften ꝛc. entnommen. Die Tafel X. ist aus Gebhard's Schrift entlehnt. Als hierher gehörige Litteratur sind die Schriften von Casper, Quetelet (deutsche Ausgabe), Bickes, Moser, Gebhard, Bernouilli ꝛc. zu bezeichnen.

Im achten Kapitel sind die Grundzüge zur Berechnung der Leibrenten, Wittwen- und Waisenpensionen, Lebensversicherungen angegeben und die dazu dienlichen Methoden auf verschiedene Weise begründet.

Die Tafeln I.—IV. sind den Werken: Vega's Logarithmen-Tafeln, herausgegeben von Hülße, zuverlässiger Rathgeber bei politischen und Finanzrechnungen von E. M. Hahn, Theorie der Berechnung zusammengesetzter Zinsen ꝛc. von Gremilliet (übersetzt von Deyhle, Ulm), Tafeln zur Berechnung der zusammengesetzten Zinsen von Kraft, entnommen. Die Uebereinstimmung, welche in den von verschiedenen Calculatoren aufgefundenen Zahlen herrscht, läßt auf die Richtigkeit der letztern schließen. Deswegen sind sie hier mitgetheilt. Die in den genannten Werken vorkommenden Druck- oder Rechnungsfehler (deren Zahl jedoch nicht bedeutend ist) habe ich zu entfernen gesucht. Zu dem Ende habe ich bei der Correctur, wo es möglich war, wenigstens zwei Tafeln verglichen und bei eingetretener Differenz die darauf bezügliche, mühevolle Nachrechnung zu Ermittlung des richtigen Werthes nicht gescheut. Auf die Correctur der Tafeln selbst wurde die möglichste Sorgfalt verwendet.

Diese Tafeln dürften eine willkommene Zugabe sein, denn sie erleichtern die Ausführung der nöthig werdenden Rechnungen ungemein, wie derjenige bald erkennen wird, der sie zu benutzen veranlaßt ist. Sie machen größtentheils die Rechnung mit Logarithmen überflüssig, die immer mühevoll bleibt und ohne die gehörige Vorsicht und Aufmerksamkeit leicht zu unrichtigen Resultaten führt.

Sie geben sicherere Resultate, als die Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen zu geben vermag, und leisten in diesem Zweige der Mathematik eine Hülfe und Unterstützung, welche die Logarithmen nie gewähren können. Dies ist namentlich der Fall, wenn es sich um die Ermittlung des Zinsfußes in solchen Problemen handelt, denen die Rechnung mit Zinses-Zinsen zu Grunde liegt und deren Auflösung auf der Theorie der höhern Gleichungen beruht (§. 19 S. 30, §. 25 S. 46, §. 35 S. 84). Die hierher gehörige Methode, die in der Anleitung zum Gebrauche der Tafeln mitgetheilt, eben so einfach als bequem ist, und so viel mir bekannt, bisher noch nicht angegeben wurde, beruht auf diesen Tafeln und ist ohne sie nicht wohl ausführbar. Sie wurde deswegen nicht in den betreffenden §§. aufgenommen, sondern in die Anweisung zum Gebrauch der Tafeln verwiesen, weil es zweckmäßiger schien, die zusammengehörigen Fälle mit Einem zu behandeln und dadurch Wiederholung zu vermeiden, die sich an die Zersplitterung gewöhnlich knüpft.

Was nun den Inhalt des hier behandelten Theils der Mathematik betrifft, so besteht er aus so verschiedenem Material, daß er eines innern Zusammenhanges entbehrt und daß nur der Zweck, dem er dient, den Inhalt bestimmt, wie dies bei den der Anwendung gewidmeten Zweigen der Mathematik gewöhnlich der Fall ist. Es kann sich daher nicht um Verfolgung und Darlegung eines innern Zusammenhanges in den einzelnen Theilen, sondern nur um eine systematische Begründung derselben handeln, die hier zu geben versucht wurde. Veranlassung zur Bearbeitung dieses Zweiges der Mathematik ist das Bedürfniß, einen Leitfaden bei meinen Vorlesungen zu besitzen, die für diejenigen bestimmt sind, welche sich dem Studium des Cameralfaches widmen. Möge diese

Schrift dem Zwecke, der gewiß ein guter ist und eine allgemeinere Berücksichtigung auf Universitäten wohl verdienen möchte, entsprechen.

Der Inhalt dieses Zweiges der Mathematik ist durch den Titel: »Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen« bezeichnet. Er erstreckt sich, wie man sieht, auf ein weites Feld der Anwendung, denn die darin behandelten Gegenstände haben das Bedürfniß des Staatsmannes, Cameralisten, Kaufmannes, Juristen, Forstmannes, Oekonomen u. s. w. im Auge. Dennoch glaube ich nicht, daß der Leser eine der hieher gehörigen wichtigern Fragen übergangen finden, oder die Mittel zu ihrer Beantwortung vergebens suchen wird. Man könnte ihm auch den Namen: »praktische oder angewandte Arithmetik, oder politische Arithmetik« ꝛc. beilegen. Ueber eine allgemeine Benennung hat man sich jedoch noch nicht verständigt.

Zum Nachschlagen wegen der nöthigen Vorkenntnisse ist an den bezüglichen Stellen auf mein Lehrbuch der Algebra verwiesen.

Freiburg i. B., im April 1845.

L. Oettinger.

Inhalt.

Erstes Kapitel. Rechnung mit einfachen Zinsen. §. 1 — 16, S. 1 — 25.

	§.	Seite
Begriff von Zins, Zinsfuß, Proc. ꝛc.	1	1
Bestimmung des Zinsenbetrags; Größe des jährlichen, halbjährlichen, monatlichen ꝛc. Zinsfußes	2	2
Größe des Kapitals, welches einen bestimmten Zinsbetrag binnen eines Zeitraums hervorbringen soll. — Eine ewige Rente kapitalisiren	3	3
Bestimmung der erforderlichen Zeit, um bei einem bestimmten Zinsfuß aus einem gegebenen Kapital eine verlangte Summe zu gewinnen	4	4
Bestimmung des Zinsfußes aus dem Zinsertrag eines Kapitals und dem Kapitale	5	4
Anwachsen eines auf eine bestimmte Zeit ausgeliehenen Kapitals sammt Zinsen	6	5
Künftiger Werth mehrerer Kapitalanlagen, die in gleichen oder verschieden großen Zeitfristen gemacht werden	7	6
Jährliche Abtragssumme, um ein nach *n* Jahren fälliges Kapital zu tilgen. Ermittelung des Zinsfußes, um ein nach *n* Jahren fälliges Kapital durch eine bestimmte jährliche Abtragssumme zu tilgen. Bestimmung der Zeit, um ein später fällig werdendes Kapital durch eine bestimmte Summe zu tilgen	8	7
Anwachsen der Kapitalanlagen, welche jährlich um bestimmte Summen zunehmen ꝛc.	9	11
Begriff von Rabatt oder Diskonto und Methode, ihn zu berechnen	10, 11	12
Gegenwärtiger Werth von Summen, welche künftig durch eine Reihe von Jahren fällig werden	12, 13	15
Bestimmung der Abtragssummen, wenn ein gegenwärtig fälliges Kapital durch eine Reihe von Zahlungen getilgt werden soll	14	21
Terminzahlungen	15, 16	22

Zweites Kapitel. Rechnung mit Zinses-Zinsen. §. 17 — 27, S. 25 — 55.

Anwachsen eines Kapitals während einer Reihe von Jahren, wenn die Verzinsung jährlich, oder in Theilen des Jahres, oder augenblicklich geschieht	17, 18	25
Bestimmung des Zinsfußes, wenn das ursprünglich angelegte Kapital, die Zahl der Jahre und die Summe, wozu es in denselben erwuchs, gegeben ist, und die Verzinsung jährlich oder in Theilen des Jahres vor sich geht. Begriff des conformen und relativen Zinsfußes. (Vgl. Anweisung zum Gebrauche der Tafeln S. 298)	19	30
Anwachsen eines Kapitals, wenn die Verwaltungskosten bestimmte Procente erfordern	20	33
Bestimmung der Zeit, binnen welcher ein Kapital bei gegebenem Zinsfuß zu irgend einer Summe erwuchs	21	34
Anwachsen von Kapitalanlagen, die in beliebigen Zeiträumen wiederholt gemacht werden, bei dem conformen und relativen Zinsfuß	22	36
Wenn hiebei Verwaltungskosten in Abzug kommen	23	40
Tilgung künftig fälliger Summen durch Theilzahlungen oder Zeitrenten bei dem conformen und relativen Zinsfuß. Verwandlung jähr-		

	§.	Seite
lich fälliger Renten in solche, die in jedem $r$ten Theile des Jahres fällig sind	24	41
Bestimmung der Zeit, um durch eine Reihe von Kapitalzahlungen, die auf Zinses-Zins angelegt werden, irgend ein Kapital zu erhalten. Bestimmung des Zinsfußes, zu welchem eine Reihe von Kapitalzahlungen angelegt werden muß, um irgend ein Kapital in gegebener Zeit zu gewinnen. (Vergl. Anweisung zum Gebrauche der Tafeln)	25	43
Gegenwärtiger Werth einer künftig fälligen Summe bei dem conformen und dem relativen Zinsfuß	26	47
Gegenwärtiger Werth von Kapitalzahlungen, welche in einer Reihe von Jahren oder in willkürlichen Zeitabschnitten bei dem conformen oder relativen Zinsfuß gemacht werden	27	49

Drittes Kapitel. Verhältniß zwischen der Rechnung mit einfachen Zinsen und der mit Zinses-Zinsen und Anwendungen.
§. 28 — 43, S. 56 — 103.

Beweis des Satzes, daß bei Ermittelung des gegenwärtigen Werthes einer Reihe künftig fälliger Zahlungen, wodurch eine aufzunehmende Schuld getilgt werden soll, Zinses-Zinsen und nicht einfache Zinsen gerechnet werden müssen, und Bestimmung der Gesetze, wornach das Rabattiren ausgeführt werden muß, bei dem conformen und relativen Zinsfuß	28–30	56
Gesetze, nach welchen die Kapitalwerthe von einer Zeit auf eine andere übergetragen werden können	31	72
Bestimmung des Werthes einer Zeitrente, wodurch ein gegenwärtig fälliges Kapital getilgt werden soll	32	77
Ermittelung der Zeit, innerhalb welcher ein gegenwärtig fälliges Kapital durch eine bestimmte Rente getilgt werden kann	33	79
Tilgung eines Kapitals durch gleiche Abtragssummen und Zurückführung der Tilgungszeit auf Jahresfristen, auch für den Fall, wenn der letzte Tilgungstermin nicht auf das Ende eines Jahres fallen sollte	34	82
Ermittelung des Zinsfußes, wenn eine Schuld durch eine Rente in bestimmter Zeit getilgt werden soll. (Vergl. die Anweisung zum Gebrauch der Tafeln)	35	84
Bestimmung des Werthes solcher Zahlungen, die während einer Anzahl von Zeitfristen gemacht werden und um eine bestimmte Summe zunehmen	36	85
Besonderer Fall für das Anwachsen des Tilgungsfonds	37	88
Weitere Ableitungen	38	90
Methode, den Werth der Kapitalien, welche nach einem bestimmten Plane getilgt werden sollen, bei verschiedenem Zinsfuß unter einander zu vergleichen und den hieraus sich ergebenden Cours zu berechnen	39	92
Terminzahlung	40	97
Anwachsen eines Kapitals in n Jahren, das zu p Proc. verzinst wird und dessen Zinsen zu q Proc. zinstragend angelegt werden können, bei dem relativen und conformen Zinsfuß	41	98
Werth wiederholt anzulegender Kapitalien, wenn die Kapitalien zu p Proc. verzinst, die Zinsen aber zu q Proc. zinstragend angelegt werden können, bei dem relativen und conformen Zinsfuß	42	100
Anwachsen eines Kapitals, dessen Zinsen erst nach Verfluß von einigen Jahren, zusammen genommen, wieder zinstragend angelegt werden können	43	102

Viertes Kapitel. Ueber die Berechnung des Interusuriums.
§. 44 — 49, S. 103 — 121.

Begriff vom Interusurium	44	103
Bedeutung des Wortes im römischen Rechte	45	107

	§.	Seite
Ueber die Berechnungsweise des Interusuriums bei den Römern . .	46	108
Die in der neuern Zeit über seine Berechnung aufgestellten Methoden, die Pinckard'sche oder Carpzov'sche, die Hoffmann'sche, die Leibnitz'sche	47	110
Kritik dieser Methoden und Beweis, daß die Leibnitz'sche Methode die richtige ist	48	113
Geschichtliches	49	119

Fünftes Kapitel. Von der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.
§. 50 — 64, S. 122 — 165.

Begriff von der mathematischen Wahrscheinlichkeit und Grundgesetze dieser Rechnung	50	122
Einige Sätze aus der Combinationslehre	51,52	125
Auflösung einiger Probleme	53	134
Anwendung auf das Lotto	54	140
Vom Werthe der Erwartung oder Hoffnung	55	142
Verhältniß zwischen dem Werthe der Erwartung, der Einlage und dem zu hoffenden Gewinne mit Anwendung auf das Lotto	56	143
Verhältniß zwischen dem Werthe der Erwartung und der Ordnung, in welcher die Theilnehmer zum Loosen gelangen	57	148
Methoden, welche bei Vertheilung der Gewinne oder Lasten durch's Loos in Anwendung kommen können	58	151
Verhältniß zwischen dem Werthe der Erwartung und der Ordnung, worin die Theilnehmer bei unveränderlicher Wahrscheinlichkeit zum Loosen gelangen	59	153
Ueber die Art und Weise, wie die zu wagende Summe ausgesetzt werden kann	60	155
Werth der Erwartung in Beziehung auf den Besitz eines Individuums	61	158
Objectiver und subjectiver Werth der Erwartung oder Hoffnung . .	62	159
Werth der subjectiven Hoffnung in Beziehung auf den Besitz eines Individuums	63	161
Die Art und Weise, eine Summe zu wagen in Beziehung auf den subjectiven Werth der Erwartung. Soll Jemand, der eine Summe wagen will, in eine Assecuranzgesellschaft treten, um sich gegen möglichen Verlust sicher zu stellen?	64	163

Sechstes Kapitel. Ueber Lotterie-Anlehen und Lotterien.
§. 65 — 73, S. 165 — 206.

Begriff der Lotterie-Anlehen und Plan eines solchen	65	165
Berechnung des Werthes eines Serienlooses und eines Lotterielooses im Allgemeinen	66,67	170
Verhältniß zwischen Gewinn und Verlust, welcher mit einem Lotterieloose verbunden sein kann	68	178
Begriff einer Promesse und Berechnung ihres Werthes	69	180
Die Königlich Sächsische Landeslotterie zu Leipzig. Einrichtung und Plan derselben. Werthberechnung eines in derselben spielenden Loo-ses. Vortheil der Bank (§. 70). Die Wahrscheinlichkeit, in derselben zu gewinnen und nicht zu gewinnen (§. 71)	70,71	186
Das Roulette-Spiel: Regeln dieses Spieles (§. 72). Vortheil der Bank (§. 73)	72,73	196

Siebentes Kapitel. Von der Sterblichkeit. § 74 — 85, S. 206 — 257.

Die bisherigen Untersuchungen über die Bestimmung der Sterblichkeitsgesetze	74,75	206

	§.	Seite
Von den Ursachen, wodurch das Gesetz der Sterblichkeit bedingt ist	76,77	211
Grundzüge zur Feststellung des Verfahrens, um die Sterblichkeitsordnung zu ermitteln	78	220
Ableitung der Methoden, um hiernach das Sterblichkeitsgesetz im besondern Falle aufzusuchen	79	225
Einrichtung der Sterblichkeitstafeln	80	232
Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für das Leben und Sterben einer Person von irgend einem Alter	81	234
Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für das Zusammenleben zweier und mehrerer Personen von beliebigem Alter	82	237
Von der wahrscheinlichen Lebensdauer und ihrer Berechnungsweise	83	243
Bestimmung der Warscheinlichkeit für die Lebensdauer und das Absterben innerhalb Jahresfrist	84	245
Von der mittleren Lebensdauer und ihrer Berechnungsweise. Geschichtliches	85	249

Achtes Kapitel. Berechnung der Leibrenten, Lebensversicherungen, Wittwenpensionen u. s. w. §. 86 — 94, S. 258 — 297.

Berechnung des Werthes der Leibrente für eine oder mehrere Personen. Zwei verschiedene Entwickelungsmethoden	86	258
Umformung der gefundenen Formeln. Berechnung des Verwaltungskosten ꝛc.	87	262
Berechnung der Werthe der aufgeschobenen, aufhörenden und temporären Leibrenten für eine Person	88	267
Berechnung der Werthe der genannten Leibrenten für zwei und mehrere Personen	89	269
Ableitungen und weitere Anwendungen	90	272
Berechnung der Werthe von Wittwen- und Waisenpensionen	91,92	276
Berechnung der Werthe solcher Kapitalien, welche durch das Absterben der Personen fällig werden (Lebensversicherungen)	93	286
Ueber Leibrentenanstalten, Versorgungsanstalten, Tontinen, Lebensversicherungsanstalten, Annuitäten und ihre Einrichtung	94	291
Anweisung zum Gebrauch der Tafeln I — IV		298

1ste Tafel.	Die 100 ersten Potenzen von $1{,}0p$	305
2te Tafel.	» » » » von der Formel $\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}$	307
3te Tafel.	» » » » von $\frac{1}{1{,}0p}$	309
4te Tafel.	» » » » von der Formel $\frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}$	311
5te Tafel.	Sterblichkeits-Tafel für Berlin	313
6te Tafel.	» » Baiern	315
7te Tafel.	» » Belgien	317
8te Tafel.	Zusammenstellung mehrerer Sterblichkeits-Tafeln	319
9te Tafel.	Zusammenstellung der mittleren Lebensdauer nach mehreren Sterblichkeits-Tafeln	321
10te Tafel.	Tafel für die Auflösung der Ehen zwischen 30jährigen Männern und 20jährigen Frauen und für das Ueberleben der Wittwer und Wittwen in Baiern	322

Erstes Kapitel.

Einfache Zinsen.

§. 1.

Derjenige Betrag an Geld, welcher jährlich für eine zur Benutzung dargeliehene Summe, Kapital genannt, von dem Empfänger des Kapitals (Schuldner) dem Eigenthümer desselben (Gläubiger) gezahlt wird, heißt Zins.

Das Verhältniß, welches zwischen 100 Fl. und der dafür zu zahlenden Benutzungssumme stattfindet, heißt Procent. Werden nämlich 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5 Fl. jährlich von jeden dargeliehenen 100 Fl. als Benutzungssumme gezahlt, so sagt man: das Kapital ist zu 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5 Procent u. s. w. ausgeliehen. Dies Verhältniß stellt sich durch $\frac{3}{100}$, $\frac{3,5}{100}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{4,5}{100}$ u. s. w., oder durch 0,03; 0,035; 0,04; 0,045 u. s. w. dar. Es wird auch durch 3 %, $3\frac{1}{2}$ %, 4 % u. s. w. bezeichnet. Da der Nenner der vorstehenden Brüche eine und dieselbe Zahl ist, so kann man ihn füglich bei dem Schreiben weglassen und nur den Zähler angeben. Dieser Bezeichnungsweise werden wir uns im Folgenden bedienen, und werden zur Andeutung des eben besprochenen Begriffes das Wort »Zinsfuß« gebrauchen und uns so ausdrücken: »Ein Kapital K ist zu dem Zinsfuße p ausgeliehen«. Dieser Ausdruck fällt, wie sich leicht ergiebt, mit folgendem zusammen: »Ein Kapital K ist zu p Procent, oder zu $\frac{p}{100}$, oder zu $0{,}0p$ ausgeliehen« *).

---

*) Ueber den Begriff des Wortes Zinsfuß hat man sich bis jetzt noch nicht vereinigt. Tetens (Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Leipzig 1785. 1ster Thl. S. 3.); und nach ihm Grunert (Politische Arithmetik. Leipzig 1841. S. 61.) u. A. verstehen unter Zinsfuß das Verhältniß, welches zwischen 100 und $100+p$ stattfindet. Nun ist $100+p$ die Summe, wozu ein Kapital von 100 Fl. bei p Proc. am Ende eines Jahres angewachsen ist, daher giebt $100 : 100+p$ das Verhältniß an, welches zwischen einem Kapitale von 100 Fl. und der eben genannten Summe stattfindet, oder es giebt

Bei Zinsrechnungen kommt die Größe des Kapitals, der Zinsfuß, die Zinsen oder der Zinsbetrag und die Zeit in Betracht. Diese Begriffe stehen unter einander so in Verbindung, daß der Zinsenertrag von der Größe des Kapitals, dem Zinsfuße und der Dauer der Zeit, auf welche ein Kapital ausgeliehen wird, abhängig ist. Auf die Beziehungen, worein diese Begriffe unter einander treten können, gründen sich alle in der Rechnung mit Zinsen möglichen Fälle.

Die Zinsrechnung zerfällt, wie leicht ersichtlich ist, in die mit einfachen und die mit zusammengesetzten Zinsen, oder Zinses-Zinsen.

Im Folgenden soll das auszuleihende Kapital durch K, der Zinsfuß durch p, der Zinsenertrag durch z und die Zeit durch t bezeichnet werden.

§. 2.

Die einfachste Frage ist: Wie groß ist der jährliche Zinsenertrag eines Kapitals K bei dem Zinsfuße p?

Die Frage beantwortet sich, wenn man bemerkt, daß das ausgeliehene Kapital K so oft p Fl. abwerfen wird, als Hunderte in demselben enthalten sind. Hiernach ist:

$$1)\quad z = \frac{K}{100}\,p = K.0{,}0p.$$

Zu dem nämlichen Resultat wird man geführt, wenn man bemerkt, daß $\frac{p}{100}$ den Maaßstab für den Ertrag abgiebt, daß also jeder Gulden $\frac{p}{100}$ Fl. erträgt, und daß also K Fl. die Summe $K\,\frac{p}{100}$ ertragen werden.

Wird das Kapital auf die Zeit t ausgeliehen, so wird sich der Zinsenertrag in demselben Verhältnisse steigern oder vermindern, als t größer oder kleiner als eine Jahresfrist wird. Hiernach bestimmt sich der Zinsenertrag für die Zeit t durch:

$$2)\quad z = t\,\frac{K\,p}{100} = t\,K.0{,}0\,p.$$

Hiernach werden die Jahreszinsen eines Kapitals von 325 Fl. bei 5 Proc. $325.\ 0{,}05 = 16{,}15$ Fl., und die eines Kapitals von 600 Fl. bei 4 Proc. in 4,5 Jahren $4{,}5.\ 600.\ 0{,}045 = 108$ Fl. betragen.

Ist der jährliche Zinsfuß p, so bestimmt sich hieraus der monatliche, tägliche u. s. w., überhaupt der $m$tägige der Reihe nach durch:

---

den Maaßstab für das Anwachsen eines Kapitals nebst seinem Jahreszins an. Die Maaßbestimmung dieses Anwachsens möchte aber gewiß nicht richtig durch das Wort »Zinsfuß« bezeichnet, und deswegen auch nicht der von Tetens angegebenen Begriffsbestimmung beizutreten sein.

3) $\frac{p}{12.100}$; $\frac{p}{365.100}$; $\frac{m\ p}{365.100}$

Hiernach ist der monatliche, tägliche u. s. w., überhaupt der *m*tägige Zinsenertrag eines Kapitals:

4) $\frac{K.p}{12.100}$; $\frac{K.p}{365\ .\ 100}$; $\frac{m\ K.p}{365\ .\ 100}$

Bei Kaufleuten wird der Monat durchschnittlich zu 30 und das Jahr zu 360 Tage gerechnet. Daher ist der *m*tägige Zinsenertrag eines Kapitals K.

5) $z = \frac{m\ K.\ p}{360.100}$

Bei kleinern Kapitalien macht diese Rechnungsweise einen unbedeutenden Unterschied. Bei größeren kann sie zu Differenzen von Bedeutung führen.

§. 3.

Wie groß ist das Kapital, welches bei einjährigen Zinsen und dem Zinsfuße p einen bestimmten Zinsbetrag z abwirft?

Da ein Kapital von 100 Fl. p Fl. jährlich abwirft, so müssen so viele Hunderte ausgeliehen werden, als p in dem Zinsbetrage z enthalten ist. Hiernach wird sein:

1) $K = \frac{z}{p}\ 100$

Wird das Kapital auf die Zeit t ausgeliehen, so wird sich das Kapital so vielmal verkleinern oder vergrößern, als die gegebene Zeit in der Einheit (Jahresfrist) enthalten ist, und es wird sein:

2) $K = \frac{z\ .\ 100}{t\ .\ p.}$

Zu dem nämlichen Resultate wird man geführt, wenn man den Zinsbetrag z, welcher in der Zeit t gewonnen wird, auf die Dauer eines Jahres zurückführt und dann wie unter 1 schließt. Die Jahreszinsen sind in diesem Falle $\frac{z}{t}$. Eine tägliche Rente von 1 Fl. erfordert hiernach bei 4 Proc. ein Kapital von $\frac{365.100}{4} = 9125$ Fl.; eine monatliche Rente von 100 Fl. bei dem nämlichen Zinsfuße ein Kapital von $\frac{12.100\ .\ 100}{4} = 30000$ Fl.; eine Abgabe, welche sich in 5 Jahren zu 600 Fl. anhäuft, absorbirt bei 5 Proc. ein Kapital von $\frac{600.100}{5.\ 5} = 2400$ Fl.

Wirft irgend eine Sache oder ein Gut jährlich eine bestimmte Rente ab, so kann man auf die in 1 angegebene Weise die Größe des Kapitals be-

stimmen, welches erforderlich, um diese Rente hervorzubringen. Man bezeichnet dies durch den Ausdruck: »eine Rente capitalisiren«, und nennt eine jährlich wiederkehrende Rente eine »beständige, oder ewige Rente«. Bleibt die Rente sich nicht gleich, oder finden andere und verschiedene Zeitfristen Statt, worin die Rente wiederkehrt, so sind zu ihrer Werthbestimmung andere Methoden erforderlich, wie sich im Folgenden zeigen wird.

§. 4.

Ein Kapital K hat während einer Zeit den Zinsenertrag z bei dem Zinsfuße p abgeworfen. Wie lange war es ausgeliehen?

Da nach §. 2. der Zinsenertrag von der Zeit und der einjährigen Zinsen-Summe abhängt, so findet man die Zeit, während welcher ein Kapital ausgeliehen war, wenn man den gesammten Zinsenbetrag (z) durch den einjährigen (s. 1 §. 2.) theilt. Hiernach ist:

$$1)\quad t = \frac{100\ z}{K.p} = \frac{z}{K.0{,}0p}$$

Die vorstehende Formel läßt sich auch benutzen, wenn das ursprüngliche Kapital und die Summe (S), wozu ein Kapital nebst Zinsen in der fraglichen Zeit erwachsen ist, gegeben sind. Man hat in diesem Falle das ursprüngliche Kapital von der gegebenen Summe abzuziehen und nach 1 zu verfahren. Hieraus folgt die Formel:

$$2)\quad t = \frac{100.(S-K)}{K\,p}$$

Sollen hiernach 1200 Fl. bei 5 Proc. eine Summe von 40 Fl. abwerfen, so müssen sie $\frac{100.40}{1200.5} = \frac{2}{3}$ Jahr oder 8 Monate lang ausgeliehen werden.

Will Jemand ein Kapital von 800 Fl. so lange liegen lassen, bis es sammt Zinsen zu 912 Fl. erwachsen ist, so ist hierzu eine Zeit von $\frac{112.100}{800.4} = 3{,}5$ Jahren nöthig.

§. 5.

Ein Kapital K hat während eines Jahres die Summe z ertragen. Zu welchem Zinsfuße war es ausgeliehen?

Der Zinsenertrag ist ebenso vielmal in dem Zinsfuße enthalten, als Hunderte in dem zinstragenden Kapitale. Hiernach ist:

$$1)\quad p = \frac{100\ z}{K} = \frac{z}{0{,}0\,K}$$

Kommt hiebei auch noch die Zeit in Betrachtung, während welcher ein Kapital ausgeliehen war, so hat man vorerst den Zinsenbetrag auf die

einjährigen Zinsen zurückzubringen, also die vorstehende Gleichung durch die Zeit zu theilen. Es ist sofort:

$$2)\quad p = \frac{100.\ z}{K.\ t} = \frac{z}{0{,}0\,K.\ t}.$$

Erhält jemand aus einem Grundstücke, das 800 Fl. gekostet hat, einen jährlichen reinen Ertrag von 50 Fl., so rentirt ihm dasselbe $\frac{100.50}{800} =$ 6,25 Proc. Muß jemand für 60 Fl., die er auf einen Monat zur Benutzung erhält, 2 Fl. Zins geben, so verzinst er diese Summe zu $\frac{2.100.12}{60} = 40$ Proc.

Nicht immer ist der Zinsbetrag oder der Gewinn, den ein Kapital abwirft, direct gegeben. In diesem Falle genügt es, wenn diejenigen Bedingungen gegeben sind, woraus er ermittelt werden kann. Dies ist der Fall, wenn das benutzte Kapital (K) und die Summe, wozu es sammt dem Gewinn erwachsen ist (S), gegeben sind. Man hat dann das Kapital von der genannten Summe abzuziehen und nach 2 zu verfahren. Die Formel hierfür ist:

$$3)\quad p = \frac{100\,(S-K)}{t.\ K}.$$

Wird eine Waare, die 5 Fl. kostet, zu 6 Fl. binnen Monatsfrist verkauft, so trägt sie $\frac{1.12.100}{5} = 240$ Proc. Man sieht hieraus, daß aus Geschäften, wenn sie auch kleine, aber oft sich wiederholende Gewinne abwerfen, großer Vortheil entspringt.

Man erkennt, daß alle in §. 3.—5. aufgefundenen Formeln sich aus den Gleichungen des §. 2. leicht ableiten lassen.

§. 6.

Ein Kapital wird nach Jahresfrist sammt Zinsen zurückgezahlt. Zu welcher Summe (S) ist es bei dem Zinsfuße p erwachsen?

Der Zinsbetrag bestimmt sich aus 1 §. 2. Wird hiezu das ausgelegte Kapital gezählt, so ergiebt sich zur Bestimmung der fraglichen Summe folgende Gleichung:

$$1)\quad S = K + \frac{K\,p}{100} = K\,\frac{100+p}{100} = K.\,1{,}0\,p$$

Wird das Kapital nebst Zinsen nach Verlauf irgend eines Zeitraumes (t) zurückgezahlt, so ergiebt sich aus 2 §. 2. auf die nämliche Weise für die gesuchte Summe folgende Bestimmung:

$$2)\quad S = K + \frac{K\,tp}{100} = K\,\frac{100+tp}{100} = K\ 1{,}0\,tp.$$

Leiht jemand ein Kapital von 2000 Fl. auf 3 Monate zu 6 Proc., so hat er nach Verlauf dieser Zeit $2000\left(1+\frac{6.1}{400}\right)=2030$ Fl. zu erhalten.

Aus der Gleichung 2 zeigt sich, daß der Ausdruck

$$3)\quad \frac{100+tp}{100}=1{,}0tp$$

den Maaßstab für das Anwachsen eines Kapitals sammt Zinsen für einen bestimmten Zeit-Abschnitt (t) abgiebt, wobei p den einjährigen Zinsfuß bezeichnet. Hiernach zeigt ganz folgerichtig tp die Größe des Zinsfußes an, in so weit er aus dem einjährigen Zinsfuß (p) für den Zeitabschnitt (t) abgeleitet wird. Der Maaßstab für das Anwachsen eines Kapitals sammt Zinsen für eine Jahresfrist wird hiernach sein:

$$4)\quad \frac{100+p}{100}=1{,}0p.$$

Diese Darstellungen schließen sich an die in §. 2. gegebenen an.

§. 7.

Ein Kapital K wird jährlich zu p Proc. ausgelegt. Zu welchem Werthe sind sämmtliche Anlagen im Augenblicke der letzten Zahlung angewachsen, wenn n Anlagen gemacht werden.

Bemerkt man, daß die letzte Zahlung keine Zinsen trägt, die zweitletzte einjährige, die drittletzte zweijährige u. s. w., die erste $(n-1)$ jährige, so beantwortet sich die Frage dadurch, daß man der Reihe nach $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$ statt t in 2 §. 6. setzt und dann die hiedurch erhaltenen Ausdrücke summirt. Nennt man den hieraus entstehenden Werth S, so ist:

$$1)\quad S=K+K\frac{100+p}{100}+K\frac{100+2p}{100}+\ldots K\frac{100+(n\text{-}1)p}{100}$$

$$=\frac{K}{100}[100+(100+p)+(100+2p)+\ldots(100+(n\text{-}1p)].$$

Die in der Klammer eingeschlossenen Ausdrücke bilden eine arithmetische Reihe, deren erstes Glied $a=100$, letztes $u=100+(n-1)p$ und deren Gliederzahl $x=n$ ist und die sich nach der Formel $S=\frac{(a+u)x}{2}$ §. 117. S. 214. der Algebra summiren läßt. Hieraus entsteht:

$$2)\quad S=\frac{K.(200+(n-1)p)n}{200}=K\left(n+\frac{n(n-1)p}{200}\right).$$

Soll nun der Werth aller Kapital-Anlagen auf einen Zeitpunkt zurückgeführt werden, der t Jahre nach der letzten Zahlung fällt, so ist klar, daß jede Kapital-Anlage einen dieser Zeit entsprechenden größeren Zins abwirft. Man hat daher dies Anwachsen der einzelnen Kapital-Anlagen nach 2 §. 6.

für die Zeiträume t, $t+1$, $t+2$, ... $t+n-1$ zu bestimmen, also allmälig diese Werthe für t einzuführen und die erhaltenen Resultate zusammenzuzählen. Dies führt auf dem oben angegebenen Wege zu folgender Darstellung:

$$3)\ S = K\frac{100+tp}{100} + K\frac{100+(t+1)p}{100} + \ldots . K\frac{100+(t+n-1)p}{100}$$

Wird hierin $\frac{K}{100}$ ausgeschieden und wird dann nach der Summenformel $a = 100+tp$, $u = 100+(t+n-1)p$, $n = x$ gesetzt, so entsteht sofort:

$$4)\ S = \frac{K(200+2tp+(n-1)p)n}{200} = \frac{nKtp}{100} + \frac{K(200+(n-1)p)n}{200}$$

In dieser Gleichung kann t jede Zahl, eine ganze, gebrochene, oder eine aus beiden zusammengesetzte bedeuten. Werden 1000 Fl. zu 4 Proc. jährlich angelegt und wird dies 10mal wiederholt, so ist nach 2 der Werth sämmtlicher Anlagen im Augenblicke der letzten Zahlung 11800 Fl. Wird aber der Zahlungstermin auf ein halbes Jahr später gesetzt, so ist nach 4 der gesuchte Werth 12000 Fl.

Es ist nun auch möglich, daß weder Kapital-Anlagen noch die Zeiträume, worin jene gemacht werden, gleich sind. In diesem Falle muß der Werth jeder einzelnen Anlage nach den besonderen Bedingungen der Aufgabe berechnet und die so gefundenen Resultate zusammengezählt werden. Nennt man die einzelnen Kapitalien K_1, K_2, K_3, ... K_n, und die Zeiträume, welche bis zu dem gegebenen Zeitpunkt verfließen, t_1, t_2, t_3, ... t_n, so ergiebt sich hieraus folgende ganz allgemeine Werthbestimmung,

$$5)\ S = K_1\frac{100+t_1p}{100} + K_2\frac{100+t_2p}{100} + \ldots K\frac{100+t_np}{100}$$

woraus sich nicht nur die Gleichungen 2 und 4, sondern auch alle beforderе hieher gehörige Fälle ableiten lassen.

§. 8.

In den Gleichungen 2 und 3 §. 7. werden verschiedene Größen untereinander verglichen. Hierdurch ist man im Stande den Zusammenhang, welcher unter ihnen stattfindet, anzugeben. Aus 2 und 4 §. 7. ist:

$$1)\ K = \frac{200\,S}{200\,n + n\,(n-1)\,p};\qquad 2)\ K = \frac{200\,S}{(200+2tp+(n-1)\,p)\,n.}$$

Die Gleichung 1 bestimmt die Größe der jährlichen Abtragsumme, welche erforderlich ist, um ein Kapital S, das nach n Jahren unverzinslich fällig ist, binnen n Jahren bei einfachen Zinsen abzuzahlen. Die Gleichung 2 bestimmt die Größe der Abtragsumme unter den nämlichen Bedingungen,

wenn das Kapital S nach $(n+t)$ Jahren unverzinslich fällig ist. Entwickelt man p aus 2 und 4 §. 7., so hat man

$$3)\ p = \frac{200\,(S-nK)}{n(n-1)K}; \qquad 4)\ p = \frac{200\,(S-nK)}{K(2tn+n(n-1))}.$$

Diese Gleichungen bestimmen den Zinsfuß, wenn unter den angegebenen Bedingungen das unverzinsliche Kapital S, die jährliche Abtragsumme K und die Zeit, nach deren Verlauf die auszuzahlende Summe fällig wird, gegeben ist. Entwickelt man n aus 2 §. 7., so ist eine Gleichung des zweiten Grades aufzulösen und man erhält nach §. 93. und 21 §. 117. der Algebra:

$$5)\ n = -\frac{200-p}{2p} + \sqrt{\frac{200\,S}{pK} + \left(\frac{200-p}{2p}\right)^2}.$$

Diese Gleichung giebt die Anzahl der Jahre an, welche erforderlich ist, damit ein Kapital K bei einfachen Zinsen und p Proc. zu der Summe S erwachse. Das Zeichen vor der Wurzelgröße ist, wie sich leicht folgert, positiv zu nehmen. Nähme man es negativ, so wäre die Zeit künftig nicht mehr möglich. Die Gleichungen 1, 3 und 5 gelten nur unter der Voraussetzung, daß n eine ganze Zahl bedeutet. Kommen noch Bruchtheile eines Jahres, oder kommt noch, wie das dem Gesagten zufolge möglich ist, eine Reihe von Jahren nach der letzten Anlage in Betrachtung, dann kann diese Gleichung nicht weiter benutzt werden, und es kommt die Gleichung 4 §. 7. in Anwendung. In diesem Falle sind zwei Größen zu berücksichtigen, n und t. Eine von ihnen muß außer K, S und p noch gegeben sein, um die andere bestimmen zu können. Ist t bekannt, so wird aus 4 §. 7.:

$$6)\ n = -\frac{200+2tp-p}{2p} + \sqrt{\frac{200\,S}{pK} + \left(\frac{200+2tp-p}{2p}\right)^2}.$$

Ist n nebst S, K und p bekannt, so ist aus der nämlichen Gleichung:

$$7)\ t = \frac{200\,S - 200\,nK - n(n-1)\,pK}{2pnK}$$

und man sieht deutlich, daß es sich hier um die Auflösung einer unbestimmten Gleichung handelt. Gewöhnlich wird in den hieher gehörigen Schriften dieser Unterschied nicht gemacht, sondern nur im Allgemeinen die Zeit gesucht, in welcher ein jährlich angelegtes Kapital K bei einfachen Zinsen und dem Zinsfuße p zu der Summe S erwachsen ist. Nun kann aber in der That die Zeit, um deren Bestimmung es sich handelt, nach 6 und 7 in zwei unter sich unabhängige Theile zerfallen, und es liegt die Aufgabe vor, diese zu ermitteln. Um nun dem Zwecke zu entsprechen, wird man auf folgende Weise am zweckmäßigsten verfahren. Man ermittele vorerst nach 5 den Werth von n ohne Rücksicht auf t. Ist die hiedurch gefundene Zahl eine ganze, so wird die Gleichung gelöst sein, und

man kann sie wenigstens als gelöst betrachten, denn unter dieser Voraussetzung gilt die Gleichung 5. Ist dies nicht der Fall und erhält man für n eine Zahl, die aus einer ganzen und gebrochenen zusammengesetzt ist $(n+t)$, so treten nun die in 6 und 7 entwickelten Gleichungen in Kraft. Da hierin n immer als ganze Zahl betrachtet wurde, so muß sie als solche belassen werden, t aber kann entweder eine gebrochene, oder sogar eine ganze, oder eine aus beiden zusammengesetzte Zahl nach 4 §. 7. bedeuten und hängt in dieser Eigenschaft von der Annahme der Zahl n ab. Man nehme daher für n zuerst die größt mögliche Zahl, dann die nächst niedere ganze, dann die dieser vorhergehende u. s. w., führe jeden dieser angenommenen Werthe in 7 ein, so wird sich für jeden ein besonderer Werth für t ergeben, welcher den Bedingungen der Aufgabe genügen wird. Zur Erörterung des Gesagten sollen einige Fälle betrachtet werden.

Ein Kapital von 1000 Fl. wurde jährlich bei 4 Proc. und einfachen Zinsen angelegt und erwuchs zu der Summe von 11800 Fl. Wie oft wurden die Anlagen gemacht? Aus 5 ergiebt sich, wenn $S = 11800$, $K = 1000$, $p = 4$ gesetzt wird:

$$n = -\frac{196}{8} + \sqrt{\frac{200.11800}{4000} + \frac{196^2}{8^2}} = -\frac{49}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{4761} = 10$$

Nach 2 §. 7. und 5 dieses §. ist sofort die Frage bestimmt beantwortet. Ist aber unter den nämlichen Bedingungen wie vorhin das wiederholt angelegte Kapital zu der Summe 13800 Fl. angewachsen, so ergiebt sich aus 5:

$$n = -\frac{196}{8} + \sqrt{\frac{200.13800}{4000} + \frac{196^2}{8^2}} = -\frac{49}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5161}$$

$$= -24{,}5 + \tfrac{1}{2}.71{,}840100222.. = 11{,}42005\ldots$$

Hiernach kann n höchstens die Zahl 11 bedeuten. Setzt man nun $n = 11$ in 7, um t zu bestimmen, so wird:

$$t = \frac{200.13800 - 200.11.1000 - 4.11.10.1000}{8.11.1000} = \frac{120000}{88000} = 1\tfrac{4}{11}.$$

Hiernach ist das Kapital von 1000 Fl. 11mal angelegt und außerdem noch $1\frac{4}{11}$ Jahr nach der letzten Anlage zinstragend belassen worden. Dies bestätigt sich auch, wenn man in 4 §. 7. die eben gefundenen Werthe $n = 11$, $t = \frac{15}{11}$, $p = 4$ und $K = 1000$ setzt, wodurch man die Summe 13800 Fl. wieder findet. Nun kann man für n auch noch die Werthe 10, 9, 8 u. s. w. annehmen. Geschieht dies, so ergiebt sich aus 7:

$$t = \frac{200.13800 - 200.10.1000 - 36.10.1000}{8.10.1000} = \frac{276 - 36}{8} = 5$$

$$t = \frac{200.13800 - 200.9.1000 - 72.4000}{72000} = \frac{2760 - 2088}{72} = 9\tfrac{1}{3}$$

Es kann also auch $n = 10$ und $t = 5$; $n = 9$ und $t = 9\frac{1}{3}$ bedeuten. Alle diese Werthe thun der Aufgabe ein Genüge. Es ist daher auch möglich, daß das Kapital nur 10mal angelegt und 5 Jahre nach der letzten Anlage, oder 9mal angelegt und $9\frac{1}{3}$ Jahre nach der letzten Anlage eingezogen wurde u. s. w. Hieraus zeigt sich, daß die vorliegende Aufgabe eine unbestimmte ist. Um ihr einen bestimmten Inhalt zu geben, muß noch eine weitere Bedingung zutreten. Dies kann nun dadurch geschehen, daß für n immer die größt mögliche ganze Zahl zu nehmen ist. Nach dem Gesagten läßt sich selbst die in 5 gelöste Aufgabe als eine unbestimmte betrachten. Nimmt man nämlich für n die nächst niederen Werthe 9, 8,... an, so kann man nach 7 noch den Zeitraum t in Rechnung bringen, und es ergiebt sich, wenn man nach dem zuerst gegebenen Beispiele $S = 11800$, $K = 1000$, $p = 4$ und $n = 9$ setzt:

$$t = \frac{200.11800 - 200.9.1000 - 9.8.4.1000}{8.9.1000} = \frac{2360 - 2088}{72} = 3\frac{7}{9}$$

u. s. w., und in der That zeigt sich auch, daß, wenn 1000 Fl. 9mal angelegt und noch $3\frac{7}{9}$ Jahre nach der letzten Anlage zinstragend belassen werden, hieraus die Summe 11800 Fl. gewonnen wird. Nimmt man auch die eben gestellte Bedingung auf, daß in den vorliegenden Fällen für n immer die größt mögliche ganze Zahl genommen werden soll, so geht die Aufgabe in eine bestimmte über.

In den hier gemachten Bemerkungen sind wohl die Grundzüge enthalten, wonach die hierher gehörigen Fragen ihre Beantwortung finden. Keine von den Schriften, welche den vorliegenden Gegenstand behandeln und die mir zugänglich waren, hat den Calcul in der hier angegebenen Weise festgestellt. v. Langsdorf (Arithmetische Abhandlungen §. 59. S. 46.) hat die Formel 5 ohne alle weitere Bemerkung, also allgemein gültig, aufgestellt. Brune (Zinsrechnung §. 18. S. 17.) hat die Frage betrachtet, aber, wie es scheint, für eine bestimmte gehalten, wenigstens hat er die Sache nicht vollständig untersucht. Er behandelt nämlich folgenden Fall, wenn $K = 100$, $p = 5$, $S = 1280$ und bestimmt daraus n. Nach der hier gegebenen Methode ist:

$$n = -\frac{39}{2} + \sqrt{\frac{200.1280}{500} + \left(\frac{39}{2}\right)^2} = -\frac{39}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3569.10,3705..}$$

Nun kann n die Zahl 10, 9, 8... bedeuten. Hiernach erhält man aus 7:

$$t = \frac{200.1280 - 200.10.100 - 10.9.5.100}{10.10.100.} = \frac{256 - 245}{10} = 1,1$$

$$t = \frac{200.1280 - 200.9.100 - 9.8.5.100}{9.10.100} = \frac{256 - 216}{9} = 4\frac{4}{9}$$

$$t = \frac{200.1280 - 200.8.100 - 8.7.5.10}{10.8.100} = \frac{256 - 188}{8} = 8\frac{1}{2}$$

u. s. w. Hiernach genügen folgende Fälle der Aufgabe $n = 10$ und $t = 1{,}1$; $n = 9$ und $t = 4^4/_9$, $n = 8$ und $t = 8^1/_2$ u. s. w., denn durch alle diese Bedingungen wird immer die Summe 1280 hervorgebracht. Brune selbst hat nur den ersten Fall, und auf eine mühevolle Weise entwickelt. Die übrigen hat er nicht angegeben.

Nun können auch unter den, in diesem und dem vorigen §. gegebenen Bedingungen die Kapital-Anlagen halbjährlich, vierteljährlich u. s. w., überhaupt in Zeit-Abschnitten gemacht werden, welche der $\left(\frac{w}{u}\right)$te Theil eines Jahres sind, so zwar, daß w größer oder kleiner als u ist. Dadurch wird die Schlußweise nicht geändert, und man kann dann leicht die vorstehenden Gleichungen benutzen, wenn man den jährlichen Zinsfuß auf den für den fraglichen Zeitraum geltenden zurückführt und $p_1 = \frac{w}{u} p$ statt p setzt.

§. 9.

Die Bedingungen sind wie in §. 7. Die Kapital-Anlagen werden so gemacht, daß bei der ersten Anlage K, bei der zweiten $2K$, bei der dritten $3K$ u. s. w., bei der $n$ten nK ausgeliehen werden. Wie groß ist der Werth sämmtlicher Anlagen nebst Zinsen im Augenblicke der $n$ten Anlage?

Macht man die Schlüsse wie in §. 7., so erhält man folgende Zusammenstellung für die fraglichen Werthe;

$$1)\ S = K\frac{100+(n-1)p}{100} + 2K\frac{100+(n-2)p}{100} + \ldots (n-1)K.\frac{100+p}{100} + nK$$

Diese Ausdrücke lassen sich so zerlegen, daß zwei verschiedene Reihen entstehen, von denen jede sich summiren läßt. Es entsteht:

$$S = K.\frac{100+(n-1)p}{100} + 2K\frac{100+(n-1)p}{100} + \ldots nK\frac{100+(n-1)p}{100}$$
$$- 2K\frac{p}{100} - \ldots nK\frac{(n-1)p}{100}$$

Die beiden Horizontalreihen lassen sich nach 2 §. 132. S. 253. der Algebra summiren und man erhält:

$$2)\ S = K\frac{100+(n-1)p}{100}\cdot\frac{(n-1)n}{1.2} - \frac{K.p}{100}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$
$$= K\frac{[100+(n-1)p](n^2-n)}{200} - \frac{Kpn(n^2-1)}{300}.$$

Bleiben die Bedingungen wie vorher und soll der Werth aller Kapital-Anlagen auf den Endpunkt der Zeit t, welche auf die letzte Zahlung folgt, zurückgeführt werden, so hat man bei Berechnung der Kapital-Anlagen noch den Zeitraum t zu berücksichtigen und man erhält:

$$3)\ S = K\,\frac{100 + tp + (n\text{-}1)p}{100} + 2K\,\frac{100 + tp + (n\text{-}2)p}{100} + \ldots\,\frac{nKtp}{100}$$

Behandelt man die Glieder dieser Darstellung auf die nämliche Weise wie vorhin und zerlegt sie in zwei Reihen, so entsteht:

$$4)\ S = K.\,\frac{[100 + tp + (n\text{-}1)p](n\text{-}1)n}{200} - \frac{Kpn(n^2\text{-}1)}{300}.$$

Man kann nun die Gleichungen 2 und 4 benutzen, um aus ihnen die Werthe K, p, n und t abzuleiten. Die Ableitung der Werthe für K und t ergiebt sich leicht, ebenso die des Werthes von t, wenn n bekannt ist. Die Darstellung des Werthes von n führt auf eine Gleichung des dritten Grades. Wenn bei Aufsuchung der Werthe von $n + t$ gebrochene Zahlen auftreten, so sind ähnliche Betrachtungen zu machen, wie sie in §. 8. gemacht wurden. Die Anwendung des Calculs auf besondere Fälle unterliegt aber nun, da die Methode zur Ausführung gezeigt ist, keiner weiteren Schwierigkeit.

§. 10.

Ist eine Summe Geldes nach Verfluß von einer bestimmten Zeit fällig, ohne daß in der Zwischenzeit Zinsen gezahlt werden, so kann der Fall eintreten, daß auf Uebereinkommen dieselbe im gegenwärtigen Augenblick gezahlt werden soll. Würde nun der ganze Betrag des fälligen Geldes sogleich von dem Schuldner zinstragend angelegt werden, so würde es nach dem in §. 6. Gesagten zu einer Summe erwachsen, die offenbar größer als die am Ende der bestimmten Zeit fällige ist. Würde daher dem Gläubiger der volle Betrag der fälligen Summe sogleich ausgezahlt, so würde er zu viel erhalten und der Schuldner dadurch in Schaden kommen. Es ist daher in Billigkeit und Recht gegründet, daß von dem Schuldner nicht die ganze Summe sogleich gezahlt, sondern ihm ein gewisser Abzug gestattet werde. Diesen Abzug nennt man Rabatt, auch Interusurium. Die Größe der, unter den angegebenen Verhältnissen, zum Voraus zu entrichtenden Summe bestimmen, nennt man rabattiren, auch diskontiren.

Um nun die vorliegende Aufgabe zu lösen, gehen wir von dem besonderen Falle aus: Ein Kapital K ist am Ende eines Jahres ohne Zinsen fällig. Es soll zu Anfang desselben ausgezahlt werden. Wie viel hat der Gläubiger anzusprechen, wenn der Zinsfuß p der Rechnung zu Grund gelegt wird?

Nennt man die auszuzahlende Summe R, so wird folgende Schlußfolge leicht zum Zwecke führen. Aus §. 6. geht hervor, daß jedes Hundert Gulden Kapital im Laufe eines Jahres bei dem Zinsfuße p zu $(100 + p)$ Gulden erwächst. Es wird daher auch folgender Schluß gerechtfertigt

sein: Wie $(100 + p)$ Gulden in einem Jahre aus 100 Fl. erwachsen, so wird das am Ende eines Jahres fällige Kapital (K) aus dem fraglichen (R) erwachsen. Man hat daher folgende Vergleichung $100 + p : 100 = K : R$.

und hieraus: 1) $$R = \frac{100\,K}{100 + p} = \frac{K}{1{,}0\,p}.$$

Ist das Kapital K nicht am Ende eines Jahres, sondern nach Verfluß der Zeit (t) ohne Zinsen fällig, so ändert dies an der hier angegebenen Schlußfolge nichts. Jedes Hundert Gulden wird nämlich in der Zeit t zu der Summe von $(100 + tp)$ Gulden erwachsen. Daher wird man auf die nämliche Weise wie vorhin zu folgender Vergleichung geführt:

$$100 + tp : 100 = K : R.$$

und hieraus ist: 2) $$R = \frac{100\,K}{100 + tp} = \frac{K}{1{,}0\,tp}.$$

Aus der Gleichung 2 zeigt sich, daß:

3) $$\frac{100}{100 + tp} = \frac{1}{1{,}0\,tp}.$$

der Maaßstab für das Rabattiren oder Diskontiren eines Kapitals (K) für die Zeit t und den Zinsfuß p ist. In dieser Darstellung kann t jeden möglichen positiven Werth haben. Dieser Ausdruck steht dem in 3 §. 6. gefundenen zur Seite, wodurch das Anwachsen eines Kapitals sammt Zins bestimmt wird.

Die Gleichungen 1 und 2 lassen sich auf eine ganz einfache Weise aus den Gleichungen 1 und 2 §. 6. ableiten, wenn man die Größe K aus den dort gegebenen Ausdrücken entwickelt. Denn K ist das ursprüngliche Kapital, woraus die Summe S nach Verlauf der Zeit t anwächst, wenn in der Zwischenzeit keine Zinsen gezahlt werden. Es ist daher nur nöthig, den Werth von K nach den bekannten Regeln der Algebra zu entwickeln, um die vorliegende Frage zu beantworten *).

---

*) Die vorliegende Aufgabe wurde deswegen etwas ausführlicher behandelt, um den Leser in Stand zu setzen, über die Richtigkeit der gemachten Schlüsse besser urtheilen zu können, und weil früher in manchen Schriften starke Verstöße gegen eine richtige Schlußweise in diesem Gegenstand gemacht wurden. Nähme man an, wie von einigen geschah (wie sich später zeigen wird), daß der volle Zinsenbetrag nach 2 §. 2. von der vorauszuzahlenden Summe bei dem Zinsfuße p und für die Zeit t abzuziehen sei, um das rabattirte Kapital zu erhalten, so ergäbe sich hieraus folgende Formel:

$$R = K - K\,\frac{tp}{100} = K\left(1 - \frac{tp}{100}\right) = K\,(1 - 0{,}0\,tp)$$

Da nun der Werth von tp jede Höhe erreichen kann, so kann auch tp so groß oder größer als 100 werden; und man wird sich bei spät fälligwer-

Ist der Kaufpreis für ein Stück Wald 12600 Fl. und erst nach einer Jahresfrist ohne Zins zu zahlen, so wird der rabattirte Werth des Kapitals, wenn 4 Proc. Abzug gestattet werden, $\frac{100}{104}$ 12600 Fl. = 12115,38... Fl. sein. — Ein Kapital von 800 Fl., das nach 9 Monaten ohne Zins fällig ist, kann gegen einen Rabatt von 4 Proc. sogleich gezahlt werden. Das hierzu erforderliche Kapital ist: $800 \cdot \frac{100}{100+3}$ Fl. = 776,699 Fl. — Der gegenwärtige Werth eines Kapitals von 6732 Fl., das nach $1\frac{1}{2}$ Jahren ohne Zinsen fällig ist, beträgt bei einem Rabatt von 4 Proc. $\frac{100.6732}{100+6}$ Fl. = 6350,943 Fl.

§. 11.

Man kann nun aus den Gleichungen des vorigen §. weitere Ableitungen machen und das ohne Zinsen fällige Kapital, den Zinsfuß und die Zeit aus ihnen ableiten.

---

denden Kapitalien bis zu der Ungereimtheit verirren, daß der Gläubiger gar nichts mehr bekäme, oder gar noch dem Schuldner eine Summe herauszahlen müßte. Es ist jedoch gar nicht nöthig bis zu diesem Extreme aufzusteigen, denn schon bei kleinen Zeiträumen zeigt sich die Unrichtigkeit der eben angeführten Schlußweise. Ist nämlich ein Kapital von 1000 Fl. am Ende eines Jahres ohne Zinsen fällig und kommen Gläubiger und Schuldner überein, daß es zu Anfang desselben mit einem Rabatt von 5 Proc. gezahlt werde, so hat der Schuldner nach der Gleichung 2 sogleich $\frac{100}{105} \cdot$ 1000 Fl. = 952,3809... Fl. zu zahlen, wie sich ergiebt, wenn $p = 5$, $t = 1$, $K = 1000$ gesetzt wird. In der That erwächst auch das Kapital 952, 38 Fl. bei 5 Proc. in Jahresfrist zur Summe 1000 an, und bei dieser Rechnung kommt weder der Schuldner noch der Gläubiger zu Schaden. Zieht man aber nach der zuletzt angegebenen Formel die Jahreszinsen mit 50 Fl. von dem Kapitale ab, so bekäme der Gläubiger sogleich 950 Fl. Diese erwachsen in Jahresfrist nach 1 §. 6. zu 950.1,05 = 997,5 Fl. Hiernach käme der Gläubiger zu Schaden. Es zeigt sich nun allerdings, daß bei kleinen Summen und kleinen Zeitabschnitten dieser Verlust unbedeutend ist. Bei großen Summen und großen Zeitabschnitten wird er aber bedeutend werden, abgesehen davon, daß man zu Ungereimtheiten, wie oben bemerkt wurde, gelangen kann.

Bei kaufmännischen Rechnungen wird bekanntlich der Diskonto nach der in dieser Anmerkung gegebenen Formel gerechnet, und somit eine Unrichtigkeit begangen. Da es sich aber hiebei in der Regel um kleine Zeitabschnitte und um einen niedern Zinsfuß handelt, und sich die eben angeführte Formel bequemer als 2 benutzen läßt, so ist wohl hierin der Grund zu suchen, warum man die berührte Unrichtigkeit nicht weiter beachtet.

Hiernach hat man:

1) $K = R\,\frac{100+tp}{100}$; 2) $p = \frac{100\,(K-R)}{R}$

3) $p = \frac{100\,(K-R)}{tR}$; 4) $t = \frac{100\,(K-R)}{pR}$

Die erste Gleichung zeigt, wie aus der vorausbezahlten Summe (R), dem Zinsfuße (p) und der Zeit (t), nach deren Ablauf ein Kapital ohne Zinsen fällig ist, letzteres gefunden werden kann. Die zweite und dritte zeigt, wie aus der Summe (K), welche nach Verlauf irgend einer Zeit (t) fällig wird und der gegenwärtig ausgezahlten Summe (R) der Zinsfuß erschlossen wird. Die Gleichung 4 zeigt endlich, wie die Zeit gefunden wird, wenn die Größe der Schuld, die vorausbezahlte Summe und der Zinsfuß gegeben ist.

Man überzeugt sich leicht, daß die Gleichung 1 mit der in 2 §. 6. gefundenen, die Gleichung 2 und 3 mit der in 3 §. 5. gefundenen, die Gleichung 4 mit der in 2 §. 4. gefundenen übereinkommt, indem die hier entwickelten Begriffe dort unter einer anderen Gestalt in den Calcul eintreten.

Von den hier gefundenen Formeln sollen einige Anwendungen gemacht werden. Von einem Kapital, das nach Verfluß eines Jahres ohne Zinsen fällig ist, und das zu Anfang desselben bezahlt wurde, werden 5 Proc. abgezogen. Wie hoch stellt sich der Zinsfuß? Aus 2 ist: $\frac{100\,(100-95)}{95}$ Fl. $= \frac{100}{19}$ Fl. $=$ 5,26315 Fl. Hiernach stellt sich der Zinsfuß höher als der Diskonto. Bei einem Abzug von $4\frac{1}{2}$, 4, $3\frac{1}{2}$, 3 Proc. u. s. w. stellt sich der Zinsfuß zu 4,71204 ....; 4,1666 ....; 3,62694....; 3,09278.... u. s. w.

Im Lottospiele wird der Auszug (eine Nummer) im Falle des Gewinnens mit dem 15fachen Betrage bezahlt. Er sollte mit dem 18fachen Betrage bezahlt werden. Wie hoch stellt sich der Zinsfuß, wenn das Spiel binnen Jahresfrist vor sich ginge? Aus 2 ergiebt sich $p = \frac{100.3}{18} = 16{,}666\ldots$ Proc. Das Spiel wird aber alle Monate wiederholt. Der Zinsfuß ist nach 4 sofort $p = \frac{100\,.3.12}{18} = 200$ und stellt sich hiernach bedeutend hoch.

§. 12.

Ein Kapital K wird jährlich zu Anfange eines Jahres angelegt und dies wird n Jahre fortgesetzt. Wie groß ist der jetzige Werth aller Kapital-Anlagen bei dem Zinsfuße p?

Die Frage wird beantwortet, wenn man den Werth sämmtlicher Kapital-Anlagen auf den jetzigen Zeitpunkt zurückbringt. Man hat hiernach die zweite Anlage auf die Dauer eines Jahres, die dritte auf die Dauer zweier Jahre nach 2 §. 10. zu rabattiren, so bis zu Ende fortzufahren und dann alle erhaltenen Resultate zusammenzuzählen. Nimmt man nun den gegenwärtigen Werth aller Kapital-Anlagen R, so ist:

$$1)\ R = K + \frac{100K}{100+p} + \frac{100K}{100+2p} + \frac{100K}{100+3p} + \cdots \frac{100K}{100+(n-1)p}$$

Beginnt die erste Kapital-Anlage erst nach Verfluß der Zeit t, und die folgenden immer erst nach Verfluß einer Jahresfrist später, so ergiebt sich auf die gleiche Weise der folgende Werth:

$$2)\ R = \frac{100K}{100+tp} + \frac{100K}{100+(t+1)p} + \frac{100K}{100+(t+2)p} + \cdots \frac{100K}{100+(t+n-1)p}.$$

Hierin kann t jede beliebige positive Zahl sein.

In diesen Darstellungen wurde angenommen, daß die Kapital-Anlagen einander gleich sind und in bestimmten Zeitabschnitten regelmäßig wiederkehren. Diese Beschränkung ist durchaus nicht nöthig. Die Kapital-Anlagen und Zeitabschnitte können unter sich verschieden sein, und doch bleibt die Schlußfolge unverändert. Nennt man die Kapital-Anlagen der Reihe nach $K_1, K_2, K_3, \ldots K_n$, und die Zeitabschnitte, in welchen sie zu machen sind, $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$, so ergiebt sich durch Anwendung der Gleichung 2 §. 10. für den gegenwärtigen Werth derselben folgende Darstellung:

$$3)\ R = \frac{100K_1}{100+t_1p} + \frac{100K_2}{100+t_2p} + \frac{100K_3}{100+t_3p} + \cdots \frac{100K_n}{100+t_np}$$

Diese Darstellung ist allgemein und umfaßt die beiden vorhergehenden in sich. Die Darstellung 2 ist allgemeiner als 1, und kann leicht auf jene zurückgebracht werden, wenn $t = 0$ gesetzt wird.

Man kann die Gleichung 3 benutzen, um über den Werth verschiedener Anerbieten auf ein und dasselbe Kaufobject zu urtheilen. Nimmt man, um den Calcul allgemein zu halten, an, daß zwei Käufer A und B auf eine Sache verschiedene Summen bieten, und daß A sogleich die Summe K baar, und nach Verfluß der Zeitabschnitte $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ die Summen $K_1, K_2, K_3, \ldots K_n$, jedoch unverzinslich, biete; daß B sogleich die Summe H und nach Verfluß der Zeitabschnitte $r_1, r_2, r_3, \ldots r_m$ die Summen $H_1, H_2, H_3 \ldots H_m$, gleichfalls unverzinslich biete, so ist bei einfachen Zinsen und dem Zinsfuße p der gegenwärtige Werth des Anerbietens von A:

$$4)\ R = K + \frac{100_1K}{100+t_1p} + \frac{K100}{100+t_2p} + \frac{100K_3}{100+t_3p} + \cdots \frac{100K_n}{100+t_np}$$

der gegenwärtige Werth des Anerbietens von B:

$$5)\quad P = H + \frac{100\,H_1}{100+r_1 p} + \frac{100\,H_2}{100+r_2 p} + \frac{100\,H_3}{100+r_3 p} + \ldots \frac{100\,H_m}{100+r_m p}$$

Man kann auch Summen-Ausdrücke für die in 1 und 2 gefundenen Gleichungen geben, wie sich aus dem folgenden §. ergiebt. Es wird jedoch in den meisten Fällen zweckmäßiger sein, den Werth dieser Darstellungen Glied für Glied zu ermitteln und auf diese Weise die Summe für das rabattirte Kapital anzugeben. Da die Anwendung der Gleichungen 3 — 5 zugleich auch die der Gleichungen 1 und 2 umfaßt, so sollen hierüber einige besondere Fälle angegeben werden.

1000 Fl. werden zehn Jahre lang jährlich am Ende jedes Jahres angelegt. Wie groß ist der gegenwärtige Werth aller Kapital-Anlagen bei 4 Proc. und einfachen Zinsen?

Der gesuchte Werth ergiebt sich, wenn $t = 1$, $p = 4$ und $K = 1000$ in 2 gesetzt wird, und man hat:

$$R = \frac{1000}{1,04} + \frac{1000}{1,08} + \frac{1000}{1,12} + \ldots \frac{1000}{1,36} + \frac{1000}{1,4} = 961,538461\ldots$$

925,925925...
892,857142...
862,068965...
833,333333...
806,451612...
781,250000...
757,575757...
735,294117...
714,285714...

$= 8270,581026\ldots$ Fl.

A bietet auf ein und dasselbe Kaufobject 24000 Fl. baar und sogleich zahlbar, B 16000 Fl. baar und ferner 3000 Fl. am Ende des ersten, zweiten und dritten Jahres unverzinslich zahlbar, C 17000 Fl. baar und ferner je 2000 Fl. nach Verfluß von $1\frac{1}{2}$, 3, $4\frac{1}{2}$ und 6 Jahren unverzinslich zahlbar. Welches ist das vortheilhafteste Gebot, wenn einfache Zinsen 4 Proc. der Rechnung zu Grunde gelegt werden?

Der gegenwärtige Werth des Anerbietens von B ist:

$$R_1 = 16000 + \frac{3000}{1,04} + \frac{3000}{1,08} + \frac{3000}{1,12} = 16000$$

2884,61538...
2777,77777...
2678,57142...

$= 24340,9646$ Fl.

Der gegenwärtige Werth des Anerbietens von C ist:

$$R_2 = 17000 + \frac{2000}{1{,}06} + \frac{2000}{1{,}12} + \frac{2000}{1{,}18} + \frac{2000}{1{,}24} = 17000$$

1886,79245
1785,71428
1694,91525
1612,90322

$= 23980{,}3252$ Fl.

Hiernach macht B das vortheilhafteste Anerbieten.

Man kann die Rechnung auch so führen, daß man den Werth aller Zahlungen auf das Ende des 6ten Jahres zurückbringt. Dann ändert sich das Resultat.

Das Anerbieten von A ist dann nach 2 §. 6. werth:

$$S_1 = 24000 \,.\, 1{,}24 \text{ Fl.} = 297600 \text{ Fl.}$$

Das Anerbieten von B ist nach §. 7. werth:

$$S_2 = 16000.\ 1{,}24 + 3000.\ 1{,}2 + 3000.\ 1{,}16 + 3000.\,1{,}12 = 19840$$

3600
3480
3360

$= 30280$ Fl.

Das Anerbieten von C ist am Ende des 6ten Jahres werth:

$$S_3 = 17000.\ 1{,}24 + 2000.\ 1{,}18 + 2000.\ 1{,}12 + 2000.\ 1{,}06 + 2000$$

$= 21080 = 29800$ Fl.

2360
2240
2120
2000

Hiernach ist noch immer das Anerbieten von B das vortheilhafteste. Hierauf folgt das von C mit 29800 Fl., dann das von A mit 29760, während nach der ersten Rechnung nach dem Anerbieten von C das Anerbieten von A vortheilhafter als das von C ist. Der Calcul giebt in diesem Fall kein Merkmal an, welche von diesen Methoden angewendet werden soll und läßt die Sache unbestimmt. Wir werden später bei der Rechnung mit Zinses=Zinsen hierauf wieder zurückkommen.

§. 13.

Es würde zu weit führen, die Art und Weise anzugeben, wie die Summen=Formel für die Darstellungen 1 und 2 §. 12. aufgefunden werden kann. Daher theilen wir von derselben hier die entwickelte Darstellung mit und verweisen den Leser auf unsere Schrift: Die Lehre von den aufsteigenden Functionen. Berlin 1836. §. 127. S. 259. Nr. 555. wo die Auffindung der hierher gehörigen Darstellung gezeigt ist.

Scheidet man die Factoren $100\,K$ aus jedem Gliede auf der rechten Seite in 2 §. 12. aus, so ist:

$$1)\ R = 100\,K\left(\frac{1}{100+tp}+\frac{1}{100+tp+p}+\ldots\frac{1}{100+tp+(n\text{-}1)p}\right).$$

Setzt man nun n-1 statt n, $x = 100 + tp$, $\triangle x = p$ in der aus jenem Werke angeführten Gleichung, so erhält man zur Bestimmung des Werthes von R folgende Darstellung:

$$2)\ R = 100\,K\left[\frac{lg\,(100+(t+n\text{-}1)\,p)}{p}+\frac{1}{2\,(100+(t+n\text{-}1)\,p)}\right.$$
$$-\frac{p}{6.2\,(100+(t+n\text{-}1)\,p)^2}+\frac{p^3}{30.4\,(100+(t+n\text{-}1)\,p)^4}$$
$$\left.-\frac{p^5}{42.6\,(100+(t+n\text{-}1)\,p)^6}+\ldots\right]$$
$$-100\,K\left[\frac{lg\,(100+tp)}{p}-\frac{1}{2\,(100+tp)^2}-\frac{p}{6.2\,(100+tp)^2}+\ldots\right].$$

Die Vorzahlen, welche die Glieder der vorstehenden Reihen begleiten, sind die Bernoullischen Zahlen, die bekanntlich folgende sind.

$$\frac{1}{2}',\ \frac{1}{6}',\ \frac{1}{30}',\ \frac{1}{42}',\ \frac{1}{30}',\ \frac{5}{66}',\ \frac{691}{2730}',\ \frac{7}{6}',\ \frac{3617}{510}',\ldots.$$

Das Gesetz selbst, welchem die beiden vorstehenden Reihen in 2. unterliegen, tritt deutlich hervor. Bei Darstellung der durch diese Reihen angedeuteten Werthe müssen hyperbolische Logarithmen genommen werden. Man sieht, daß die Benutzung dieser Formel in vielen Fällen mehr Arbeit nöthig machen wird, als die directe Berechnung der fraglichen Werthe aus den in §. 12. gegebenen Darstellungen. Soll aber der Werth von 2 nur annähernd genau angegeben werden, dann kann man die drei ersten Glieder der Reihen benutzen, um der Aufgabe zu genügen.

Um das Gesagte zu verdeutlichen, behandeln wir den im vorigen §. angeführten Fall, in welchem ein Kapital von 1000 Fl. zehnmal jährlich am Ende eines jeden Jahres angelegt wurde, nach der Formel 2. Es ist sofort $p = 4$, $n = 10$, $t = 1$ und $K = 1000$ zu setzen.

Hiernach entsteht:

$$R = 100000\left[\frac{lg.nat,140}{4}+\frac{1}{280}-\frac{1}{3.19600}\right]$$
$$-100000\left[\frac{lg.nat.104}{4}-\frac{1}{208}-\frac{1}{3.104.104}\right].$$

Werden die in dieser Formel angezeigten Geschäfte ausgeführt, so entsteht:

$$R = 100000\,[1{,}2354106\ldots+0{,}0035714\ldots-0{,}00001700\ldots]$$
$$-100000\,[1{,}1610977\ldots-0{,}0048076\ldots-0{,}00003081\ldots]$$
$$= 8270{,}581358\ldots.\ \text{Fl.}$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem im vorigen §. gefundenen, so zeigt sich eine Uebereinstimmung beider bis zur vierten Decimalstelle, und man erkennt hieraus, daß bei kleinen Summen das Resultat hinlänglich

genau gefunden wird. Dem ungeachtet sind die Geschäfte, welche die Formel 2 nöthig macht, nicht unbedeutend. Benutzt man Tafeln zur Ausführung der Divisionen, welche die Gleichungen des §. 12. vorschreiben, so wird die directe Rechnung immer schneller zum Ziele führen, namentlich wenn die besonderen Fälle nicht zu sehr zusammengesetzt sind.

Anmerk. Nachdem nun die Methode für die hierhergehörigen Rechnungen festgestellt ist, so kann man sich aus der Sache selbst von der Richtigkeit der vorgelegten Methode überzeugen. Es ist nur noch zu bemerken, daß auch hierin Verstöße gegen den Calcul und sogar von Florencourt (Abhandlungen 1stes Kap. §. 52. S. 20.) gemacht wurden. Dort wird nämlich der Werth aller Zahlungen nach 2 §. 7. auf den Augenblick der letzten Zahlung zurückgebracht und dann der so erhaltene Werth nach 2 §. 10. rabattirt. Die Formel, welche hiedurch entsteht, ist:

$$R_1 = K\,\frac{(200 + (n\text{-}1)\,p)\,n}{2\,(100 + n\,p)}.$$

Diese Formel giebt aber offenbar einen ganz anderen Werth als jede von den Formeln, welche in diesem oder dem vorigen §. entwickelt wurden, wenn die nöthigen Werthe für K, n und p eingeführt werden. Um dies zu zeigen, soll hier das von Florencourt berechnete Beispiel untersucht und die sich ergebenden Resultate unter einander verglichen werden.

Florencourt bestimmt den gegenwärtigen Werth eines Kapitals von 100 Fl., das zehnmal am Ende eines jeden Jahrs gezahlt und wobei der Zinsfuß 5 zu Grunde gelegt wird. Er findet durch die eben angegebene Formel:

$$R = 100.\,\frac{245.\,10}{2.\,150} = 816{,}666\ldots \text{Fl.}$$

Nach 2 §. 12. ist aber der gegenwärtige Werth dieser Kapital-Anlagen.

$$R = \frac{100}{1{,}05} + \frac{100}{1{,}1} + \frac{100}{1{,}15} + \ldots \frac{100}{1{,}5}$$

$$= 794{,}495804 \ldots \text{Fl.}$$

95,23895238 . . .
90,90909090 . . .
86,95652173 . . .
83,33333333 . . .
80,00000000 . . .
76,92307692 . . .
74,07407407 . . .
71,42857142 . . .
68,96551724 . . .
66,66666666 . . .

Hiernach findet Florencourt nach seiner Methode den gegenwärtigen

Werth aller Zahlungen zum Nachtheil für den Schuldner um 22,17086.. Fl. größer, als er nach der hier mitgetheilten Methode sich herausstellt.

§. 14.

Es läßt sich nun folgende Aufgabe lösen. Ein Kapital R, das gegenwärtig fällig ist, soll in n Terminen durch gleiche Summen, die am Ende eines jeden Jahres zahlbar sind, getilgt werden. Wie groß ist die jährlich zu zahlende Summe K bei einfachen Zinsen und dem Zinsfuße p?

Die Frage beantwortet sich, wenn in 2 §. 12. oder 2 §. 13. die Größe K bestimmt und $t = 1$ gesetzt wird. Hiernach wird seyn:

$$1)\ K = \frac{R}{100} : \left[\frac{1}{100+p} + \frac{1}{100+2p} + \frac{1}{100+3p} + \cdots \frac{1}{100+np}\right]$$

oder:

$$2)\ K = \frac{R}{100} : \left[\frac{lg(100+np)}{p} + \frac{1}{2(100+np)} + \frac{p}{12(100+np)^2} + \cdots - \frac{lg(100+p)}{p} + \frac{1}{2(100+p)} + \frac{p}{12(100+p)^2} - \cdots\right].$$

Ebenso leicht bestimmt sich nun die Aufgabe, wenn die zu leistenden Zahlungen unter den angegebenen Bedingungen erst nach Verfluß der Zeit t beginnen und in bestimmten Fristen wiederkehren sollen. Man hat dann den Werth von t in 2 §. 12. oder in 2 §. 13. zu belassen und auf die eben angezeigte Weise K zu bestimmen. Bedeuten t und n keine Jahresfristen, so ist der Zinsfuß für dieselben nach §. 2. für jedes insbesondere zu bestimmen und dann in die §. 12. und 13. gegebenen Formeln einzuführen, worauf dann K wieder abgeleitet werden kann. Nimmt man in 2 §. 13. die drei ersten Glieder der angegebenen Reihen, so läßt sich der Werth für K annähernd bestimmen, was bei kleinen Summen genügen wird.

Eine Schuld R ist durch Theilzahlungen $K_1, K_2, \ldots K_n$, die nach Verlauf der Zeiten $t_1, t_2, t_3 \ldots, t_n$ gemacht wurden, bis auf den Rest K_m getilgt. Es fragt sich, wann derselbe gezahlt werden soll?

Diese Frage beantwortet sich dadurch, daß man sämmtliche Theilzahlungen nach 3 §. 12. auf den Zeitpunkt zurückführt, worin die Schuld R fällig war, den hieraus sich ergebenden Werth R_1 bestimmt, ihn von R abzieht und dann nach 4 §. 11. verfährt. Die Methode der Auflösung bleibt dieselbe, wenn auch die Kapitalzahlungen unter sich gleich sind und in gleichen Zeiträumen gemacht werden. Man kann in diesem Falle eine der in §. 12. oder §. 13. angegebenen Methoden benutzen.

An einer Schuld von 794,4958 . . . Fl. wurden jährlich am Ende des Jahres 100 Fl. abgetragen. Dies geschah neunmal. Wann ist die letzte Zahlung mit 100 Fl. zu machen? Nach 2 §. 12. oder 2 §. 13. ist $R_1 =$

727,829138 . . . Fl., folglich hat man $Q = R - R_1 = 66{,}666 \ldots$ Fl. Wird nun $K = 100$ und $R = 66{,}66 \ldots$ Fl. $p = 5$ in 4 §. 11. gesetzt, so ist $t = 10$ Jahre.

Ist die Zeit (n) aus der Gleichung 1 §. 12., oder aus den Gleichungen 2 §. 12. und 2 §. 13. zu ermitteln, wenn $t = 1$ gesetzt wird, so kann dies aus 2 §. 12. geschehen, wenn man die Werthe der Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Reihe nach bestimmt, sie zusammenzählt, damit so lange fortfährt, bis man dem Werthe R gleichgekommen ist, wodurch man aus der Zahl der Glieder die Größe n bestimmt. Für den Fall als n keine ganze Zahl ist, muß nach dem Frühern verfahren werden. Aus 2 §. 13. kann n näherungsweise dadurch gewonnen werden, daß man die Glieder der ersten Reihe vom 2ten an vernachlässigt. Nennt man nun den Werth der zweiten Reihe S, so ist:

$$\frac{p(R+S)}{100\,K} = lg.nat.(100 + (t-1)\,p + n\,p)\,.$$

Nun hat man diese Gleichung mit 0,434294481903 . . . . zu vervielfachen (wodurch man briggische Logarithmen erhält) hiezu die Zahl zu suchen, diese um $100 + (t-1)\,p$ zu verkleinern und den Rest durch p zu theilen, wodurch n näherungsweise bestimmt ist.

Den hier gegebenen Aufgaben lassen sich, wie man leicht erkennt, noch andere beifügen. Ihre Auflösung beruht auf einer schicklichen Combination der bisher vorgelegten Lehrsätze. Dieser Gegenstand wird deswegen hier nicht weiter verfolgt, weil sich später zeigen wird, daß die Anwendung der Rechnung mit einfachen Zinsen beschränkt ist und in manchen Fällen gar nicht stattfinden kann.

§. 15.

Die Kapitalien K_1, K_2, K_3 . . . . K_n sind beziehungsweise in den künftigen Zeitpunkten t_1, t_2, t_3 . . . . t_n unverzinslich zu zahlen. Alle Zahlungen sollen auf einmal gemacht werden. Es fragt sich, wann die Gesammt-Summe gezahlt werden muß?

Es ist einleuchtend, daß die Kapitalien so lange von dem Schuldner zinstragend benutzt werden können, als er sie in Händen hat, und daß sie ebenso von dem Gläubiger benutzt werden können, sobald er sie empfängt. Aus dieser Bemerkung ergeben sich zwei Wege zur Auflösung der vorliegenden Aufgabe. Man hat nämlich den Nutzen (Zinsertrag), welchen alle Kapitalien vor ihrer Auszahlung bei dem Zinsfuße p dem Schuldner abwerfen, zu bestimmen und dann die Zeit (x) anzugeben, für welche ihm die Gesammtsumme belassen werden muß, damit der aus ihr sich ergebende Zinsbetrag zur nämlichen Summe erwachse. Diese Schlußfolge gilt für den Schuldner.

Mit geringen Abänderungen gilt sie auch für den Gläubiger. Der Zeitpunkt, an welchem die Gesammtsumme fällig ist, muß einer und derselbe sein.

Die einzelnen Kapitalien werden nun nach 2 §. 2. vor der Auszahlung dem Schuldner rentiren.

1) $S = t_1 K_1 0{,}0\,p + t_2 K_2\, 0{,}0\,p + t_3 K_3\, 0{,}0\,p \ldots + t_n K_n\, 0{,}0\,p.$

Die Summe aller Kapitalien wird für die Zeit x nach 2 §. 2. rentiren.

2) $S = (K_1 + K_2 + K_3 \ldots . + K_n)\, x . 0{,}0\,p.$

Die Werthe von 1 und 2 müssen gleich sein. Hiernach ist:

$$3)\ x = \frac{t_1 K_1 + t_2 K_2 + t_3 K_3 \ldots . + t_n K_n}{K_1 + K_2 + K_3 + K_n}$$

Die nämlichen Schlüsse sind nun zur Ermittlung der Benutzungszeit für den Gläubiger zu machen. Geht man nun von dem Zeitpunkte aus, wo die letzte Zahlung gemacht wird, so rentirt dem Gläubiger das erste Kapital in dem Zeitraum $(t_n - t_1)$, das zweite in dem Zeitraum $(t_n - t_2)$ u. s. w., das zweitletzte in dem Zeitraum $(t_n - t_{n-1})$, das letzte Kapital rentirt nicht. Hiernach werden dem Gläubiger sämmtliche Kapitalien nach 2 §. 2. rentiren.

$$4)\ S_1 = (t_n - t_1) K_1 0{,}0\,p + (t_n - t_2) K_2 0{,}0\,p + (t_n - t_3) K_3 0{,}0\,p + \ldots (t_n - t_{n-1}) K_{n-1}\, 0{,}0\,p$$
$$= (t_n K_1 + t_n K_2 + t_n K_3 + \ldots + t_n K_{n-1})\, 0{,}0\,p$$
$$- (t_1 K_1 + t_2 K_2 + t_3 K_3 + \ldots t_{n-1}\, K_{n-1})\, 0{,}0\,p.$$

Nennt man nun den Zeitpunkt vor dem letzten Zahlungstermin, an welchem die Summe aller Kapitalien fällig wird, x_1, so rentirt diese Summe ihm während der Zeit $(t_n - x_1)$. Der hieraus sich ergebende Zinsbetrag ist:

$$5)\ S_1 = (K_1 + K_2 + K_3 + \ldots K_n)\, (t_n - x_1)\, 0{,}0\,p$$
$$= (K_1 + K_2 + K_3 \ldots . K_n)\, t_n\, 0{,}0\,p - (K_1 + K_2 + K_3 \ldots . + K_n)\, x_1\, 00\,p.$$

Der Werth von 4 und 5 muß gleich sein. Hieraus ergiebt sich sofort:

$$6)\ x_1 = \frac{t_1 K_1 + t_2 K_2 + t_3 K_3 + \ldots t_{n-1}\, K_{n-1}}{K_1 + K_2 + K + K + \ldots K_n},$$

Man erkennt leicht, daß statt des Zeitpunktes t_n auch ein späterer t_r hätte gewählt werden können, ohne daß dadurch die Schlußfolge sich geändert hätte. Geschieht dies, so ergiebt sich folgende Formel:

$$7)\ x_1 = \frac{t_1 K_1 + t_2 K_2 + t_3 K_3 + \ldots . t_{n-1}\, K_{n-1} + t_n K_n}{K_1 + K_2 + K_3 + \ldots . K_n}.$$

In diesem Falle giebt x_1 den Zeitraum in Beziehung auf t_r an. Die Gleichung 3 giebt den Zeitpunkt in Beziehung auf die Gegenwart, die Gleichungen 6 und 7 in Beziehung auf die später fallenden Zeitpunkte t_n und t_r an. Ist K_1 im gegenwärtigen Augenblick fällig, so ist $t_1 = 0$ zu setzen und $t_1\, K_1$ fällt aus der Rechnung in 3, nicht aber in 6 oder 7.

Das Gesagte wird sich leicht an einem Beispiel verdeutlichen. Jemand hat 1000 Fl. in folgenden Summen: 200, 100, 300, 150, 250 jährlich

am Ende jedes Jahres unverzinslich zu zahlen. Wann muß er sie zusammen zahlen?

$$x = \frac{1.200 + 2.100 + 3.300 + 4.150 + 5.250}{1000} = 3{,}15 \text{ Jahre.}$$

$$x_1 = \frac{4.200 + 3.100 + 2.300 + 150}{1000} = 1{,}85 \text{ Jahre}$$

x_1 giebt die Zeit vor dem letzten Termine an, und beide Zeitpunkte fallen zusammen.

Zusatz. Bei der vorliegenden Aufgabe gilt die Bedingung, daß die Theilzahlungen unverzinslich abgetragen werden. Sollen sie verzinst und in den Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots t_n$ sammt Zinsen abgetragen werden, so ändert sich dadurch an der Antwort (Nr. 3.) nichts. Der Werth nämlich aller Zahlungen, welche der Schuldner zu machen hat, ist nach 2 §. 6.

$$8)\ S_2 = K_1 \frac{100 + t_1 p}{100} + K_2 \frac{100 + t_2 p}{100} + K_3 \frac{100 + t_3 p}{100} + \ldots K^n \frac{100 + t_n p}{100}$$

Zahlt er die ganze Summe auf einmal und zu dem Zeitpunkte x, so ist:

$$9)\ S_2 = (K_1 + K_2 + K_3 + \ldots K_n)\ \frac{100 + x p}{100}.$$

Werden nun aus den sich gleichen Werthen 8 und 9 die weiteren Ableitungen gemacht, so ergiebt sich sofort die Gleichung 3. Man sieht, daß in der vorliegenden Frage die Größe des Zinsfußes und die Verzinsung selbst gar keinen Einfluß auf das Resultat hat. Die vorliegende Aufgabe läßt sich auch umkehren. Dies führt zu folgender Frage.

§. 16.

Eine Summe S ist nach Verfluß der Zeit t (mit oder ohne Zinsen) fällig. Davon wird die Summe K_1 in der Zeit t_1, K_2 in der Zeit t_2, u. s. w., K_n in der Zeit t_n abgetragen. Wann muß der Rest K_r abgetragen werden?

Die Aufgabe wird ganz nach Nr. 1 und 2 §. 15. entwickelt. Nennt man die Zeit, in welcher der Rest K_r abgetragen werden muß, x, so ist die Größe des Zinsbetrages, welchen der Schuldner empfängt:

$$1)\ z = t_1 K_1\, 0{,}0\, p + t_2 K_2\, 0{,}0\, p + \ldots . t_n K_n\, 0{,}0\, p + x K_r\, 0{,}0\, p.$$

Aus der ganzen Summe wird er Zins erhalten:

$$2)\ z = St.\, 0{,}0\, p.$$

Aus diesen sich gleichen Werthen ergiebt sich sofort:

$$3)\ x = \frac{tS - t_1 K_1 - t_2 K_2 - t_3 K_3 - \ldots . t_n K_n}{K_r}.$$

Nimmt man den Zeitpunkt (x) als bekannt an und die Größe des

zu zahlenden Restes K_r als unbekannt, und nennt ersteren t_r und letzteren K, so hat man aus 3:

$$4)\ K = \frac{tS - t_1 K_1 - t_2 K_2 - t_3 K_3 \ldots\ldots - t_n K_n}{t_r}.$$

Diese Gleichung giebt an, wie groß die letzte Abtragssumme sein müsse, wenn unter den obigen Bedingungen der Zeitpunkt bestimmt ist, wann dieselbe gezahlt werden soll.

10000 Fl. sollen nach 6 Monaten und 18 Tagen (den Monat zu 30 Tagen gerechnet) gezahlt werden. 6000 Fl. werden sogleich abgezahlt. Wann müssen die übrigen 4000 Fl. gezahlt werden? Nach 3 ist, wenn $t =$ 6 Mt. und 18 Tg. $= {}^{11}/_{20}$ Jahr gesetzt wird, $x = \frac{5500}{4000}$ J. $= 16{}^1/_2$ Monat.

Auch gegen die hier gegebenen Formeln wurden Verstöße gemacht, so giebt Reinhold (Arithm. forens. Bd. I. S. 244.) die eben bestimmte Zeit zu 16 Monaten an.

Zweites Kapitel.

Zinses=Zinsen.

§. 17.

Wird der Zins, der von einem Kapitale nach Verfluß eines Zeitraums fällig ist, sogleich wieder als Kapital nutzbringend angelegt, oder zum Kapitale selbst geschlagen, dann der, aus diesem neu angelegten Kapitale nach Abfluß des nämlichen Zeitraums sich ergebende, Zins wieder als Kapital angelegt und dies so fortgesetzt; so werden nicht allein Zinsen vom Kapitale, sondern auch Zinsen von den Zinsen, oder Zinses=Zinsen gewonnen.

Auch bei den hierher gehörigen Rechnungen kommt Kapital, Zeit und Zinsfuß in Betrachtung. Ihr Zusammenhang wird sich im Folgenden zeigen.

Die erste Frage, die hier auftritt, ist folgende: Zu welcher Summe S ist ein Kapital K sammt Zinses=Zinsen bei dem Zinsfuße p in n Jahren angewachsen?

Nennt man die Summen, wozu ein so angelegtes Kapital am Ende des 1sten, 2ten und 3ten Jahres ꝛc. erwachsen wird, K_1, K_2, K_3. . . . K_n, so ist nach 3 §. 6. der Maaßstab für das Anwachsen eines Kapitals sammt Zinsen von einem Jahre zum andern $1{,}0\,p$. Wendet man dies auf die vorstehenden Größen an, so hat man folgende Ableitungs-Bestimmungen für diese Kapitalien:

$K_1 = K\,.\,1{,}0\,p$; $K_2 = K_1\,.\,1{,}0\,p$; $K_3 = K_2\,.\,1{,}0\,p$ . . . . . $K_n = K_{n-1}\;1{,}0\,p$.

Hieraus kann man nun von dem Werth des Kapitals sammt Zinses-Zinsen, welchen ein Kapital am Ende des 1sten Jahres hat, auf den, welchen es am Ende des 2ten, von diesem auf denjenigen, welchen es am Ende des 3ten haben wird, aufsteigen u. s. w. Hiernach hat man für das Anwachsen eines Kapitals sammt Zinsen am Ende

des 1sten Jahres $K_1 = K\,.\,1{,}0\,p$

des 2ten Jahres $K_2 = K_1\,1{,}0\,p = K\;1{,}0\,p\,.\,1{,}0\,p = K\,(1{,}0\,p)^2$

des 3ten Jahres $K_3 = K_2\,.\,1{,}0\,p = K\;1{,}0\,p^2\;1{,}0\,p = K\,(1{,}0\,p)^3$

u. s. w. Hiernach ist der Werth des Kapitals sammt Zinses-Zinsen am Ende des $n$ten Jahres

$$1)\quad S = K\,(1{,}0\,p)^n = K\,1{,}0\,p^n = K\frac{(100+p)^n}{100^n}.$$

Der Kürze wegen wird künftig $1{,}0\,p^n$ statt $(1{,}0\,p)^n$ oder $\left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ geschrieben werden.

Bei Berechnung des in 1 angedeuteten Werthes lassen sich am besten Logarithmen gebrauchen, wenn nicht Tafeln, worin die Werthe von $1{,}0\,p^n$ berechnet sind, zu Gebote stehen, und es ist

$$2)\quad S = Num.\,[lg\;K + n\,lg\;1{,}0\,p\,].$$

Enthält p auch Bruchtheile, so wird es am besten sein, sie durch Decimalstellen anzugeben. Sollte hierbei ein unendlicher Decimalbruch entstehen, so kann man jedoch die gewöhnliche Bruchform belassen. Hat man daher den Werth $p + \frac{r}{s}$ statt p, und ist $\frac{r}{s}$ ein echter Bruch, so geht 1 über in

$$3)\quad S = K\frac{[s\,(100+p)+r]^n}{(s\,.\,100)^n} = N[lg\,K + n\,lg\,[s\,(100+p)+r] - n\,lg\,s.\,100]$$

In diesen Gleichungen bedeutet n eine ganze Zahl. Enthält aber n außer der Zahl der ganzen Jahre noch einen Bruchtheil $\frac{r}{s} = v$, so darf nach §. 2 in den vorstehenden Gleichungen nicht $n + v$ statt n gesetzt werden, wenn die Schlußfolge richtig sein soll. Man hat vielmehr den Werth zu bestimmen, zu welchem ein Kapital nebst Zinses-Zinsen in n Jahren anwächst, und dann den dadurch erhaltenen Werth nach 2 §. 6 zu behandeln. Hiernach ist

4) $S = K\,1{,}0\,p^n . 1{,}0\,v\,p = N[lg\,K + n\,lg\,1{,}0\,p + lg\,1{,}0\,v\,p]$.

Daß hierin p auch Bruchtheile enthalten kann, versteht sich von selbst. Wendet man diese Formeln an, so ergiebt sich für den Werth eines Kapitals von 1000 Fl., das 10 Jahre auf Zinses-Zinsen bei $3\frac{1}{2}$ Procent ausgeliehen ist, durch Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen

$S = 1000.\ 1{,}035^{10} = N\,(3 + 0{,}1494030) = 1410{,}597\ldots$ Fl.

oder genauer 1410,59877 ... Fl. Der Werth eines Kapitals von 1000 Fl., das $10\frac{1}{2}$ Jahre bei 4 Procent auf Zinses-Zinsen ausgeliehen ist, bestimmt sich nach 4 zu

$S = 1000.\ 1{,}04^{10} . 1{,}02 = 1509{,}849\ldots$ Fl.

Setzt man aber $n = 10{,}5$ in der Formel 1 oder 3, so erhält man durch siebenstellige Logarithmen

$S = 1000.\ 1{,}04^{10{,}5} = P\,(3 + 0{,}1788496) = 1509{,}557\ldots$ Fl.

Der Werth stellt sich im letzten Falle um etwas zu niedrig heraus, was bei kleineren Summen und Zeitfristen unbedeutend, bei größeren aber nicht zu übersehen ist. Wir werden in §. 19. auf das hier Gesagte wieder zurückkommen.

§. 18.

Die Gleichungen des vorigen §. gelten zwar vorerst nur, wenn eine Frist von einem Jahre der Verzinsung zu Grunde gelegt wird. Diese Beschränkung ist jedoch nicht wesentlich, denn sie gelten noch immer, wenn auch eine andere Zeitfrist t der Verzinsung zu Grunde gelegt wird, und zwar so, daß t größer oder kleiner als eine Jahresfrist sein kann. In diesem Falle ist nur nöthig, den Zinsfuß p nach §. 2. auf den für die genannte Zeitfrist gültigen zurückzuführen, wodurch $p_1 = t\,p$ entsteht, und dann den Werth von p_1 in die Formeln des vorigen §. einzuführen.

Dem Gesagten zufolge ist daher der Werth eines Kapitals mit Zinses-Zinsen, dessen Verzinsung in der Zeitfrist t vor sich geht, in n solcher Zeitfristen durch

1) $S = K\,(1{,}0\,p_1)^n = K\,1{,}0\,p_1{}^n$

bestimmt, wenn p der jährliche Zinsfuß und $p_1 = t\,p$ der aus ihm auf die Zeit t reducirte ist. Soll die vorstehende Formel auf eine Reihe ganzer Jahre (n) angewandt werden, so hat dies keine Schwierigkeit. Bedeutet nämlich $\frac{n}{t}$ eine ganze Zahl m, so wird die Zahl der Zeitabschnitte (m) größer oder kleiner als die Zahl der Jahre (n) werden, je nachdem t ein echter oder unechter Bruch ist. Hiernach geht die Gleichung 1 über in

2) $S = K\,(1{,}0\,t\,p)^m = K\left(\frac{100 + t\,p}{100}\right)^m = K\,1{,}0\,p_1{}^m$.

Geschieht die Verzinsung in jedem halben=, viertel=Jahre u. s. w., in dem $r$ten Theile des Jahres, so hat man hiernach bei dem Jahreszinsfuße p

3) $S = K\,1{,}0p_1^{2n}$; $S = K\,1{,}0\,p_1^{4n}$; .... $S = K\,1{,}0\,p_1^{rn}$

wenn n die Zahl der Jahre und $p_1 = {}^1/_2\,p = {}^1/_4\,p \ldots = \frac{p}{r}$ bedeutet.

Führt aber der Quotient $\frac{n}{t}$ auf eine ganze Zahl und einen Bruch, so tritt die Formel 4 §. 17. in Kraft. Es ist leicht zu erkennen, daß sich für den Gläubiger ein Vortheil ergiebt, wenn die Zinsabrechnung in kleineren Zeitabschnitten als Jahresfristen gemacht wird. Dieser Vortheil wird um so größer, je kleiner die Zeitabschnitte für die Verzinsung genommen werden. Doch tritt dieser Vortheil erst nach einer Reihe von Jahren hervor und ist überhaupt nicht so bedeutend, als man erwarten sollte. Bei kleinen Summen und für kleine Zeiträume ist er ganz unbedeutend, wie sich aus folgender Zusammenstellung ergiebt, worin der Zinsfuß 4 zu Grunde gelegt, also nach den Ausdrücken $1{,}04^n$; $1{,}02^{2n}$; $1{,}01^{4n}$ gerechnet und die Einheit als Kapital angenommen ist.

Zahl d. Jahre	jährlicher Zins	halbjährlicher Zins	vierteljährlicher Zins
5	1,2166529 . . .	1,2189944 . . .	1,2201900 . . .
10	1,4802442 . . .	1,4859474 . . .	1,4888637 . . .
15	1,8009435 . . .	1,8113615 . . .	1,8166967 . . .
20	2,1911231 . . .	2,2080396 . . .	2,2167152 . . .
25	2,6658363 . . .	2,6915880 . . .	2,7048138 . . .
30	3,2433975 . . .	3,2810307 . . .	3,3003868 . . .

Theilt man nun das Jahr in r Zeitabschnitte ein und nimmt an, daß die Verzinsung in jedem $r$ten Theile des Jahres vor sich geht, so ist nach §. 2. der hieraus sich ergebende Zinsfuß $p_1 = \frac{p}{r}$ und die Summe, zu welcher das Kapital mit Zinses=Zinsen erwachsen ist, nach 2

$$4)\quad S = K\left(1 + \frac{p}{r\,100}\right)^{rn}.$$

Entwickelt man nun das vorstehende Binomium in eine Reihe, so ist nach §. 77. der Alg.

$$5)\quad S = K\left(1 + \frac{rn}{1}\cdot\frac{p}{r.100} + \frac{rn(rn-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{p}{r.100}\right)^2 + \frac{rn(rn-1)(rn-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{p^3}{(r.100)^3}\ldots\right).$$

Vergrößert sich nun die Zahl dieser Zeitabschnitte, so wird zwar r größer, aber ihre Dauer kleiner. Wird aber die Dauer der einzelnen Abschnitte so klein, daß man die Verzinsung in jedem Zeitmomente vor sich gehend den=

ken kann, so wird die Verzinsung stetig und die Zahl sämmtlicher, einem Jahre zugehöriger Zeitabschnitte unbestimmbar oder unendlich, also $r = \infty$. Wird dieser Werth in 5 eingeführt und bemerkt, daß in diesem Falle $(n\infty)^{m1-1} = (n\infty)^m$ ist, so fällt ∞ aus der Reihe und 5 geht über in

$$6)\ S = K\left(1 + \frac{np}{100} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{np}{100}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{np}{100}\right)^3 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{np}{100}\right)^4 \ldots.\right).$$

Die in der Klammer eingeschlossene Reihe bedeutet nach §. 115. der Algebra eine Exponential=Größe, deren Grundgröße e oder die Zahl ist, welche die Einheit zum natürlichen Logarithmen hat. Es ist daher

$$7)\ S = K\, e^{\frac{np}{100}} = K\,(2{,}718281\ldots)^{\frac{np}{100}}$$

oder auch, wenn natürliche Logarithmen genommen werden,

$$8)\ lg.nat\ S = lg.nat\ K + \frac{np}{100}.$$

Diese Gleichung findet sich auch durch Differenzialrechnung auf folgende Art. Das Kapital K sei bei momentaner Verzinsung und dem Zinsfuße p in der Zeit t zu der Summe S erwachsen. Nun bezeichne man die Zunahme dieser Summe für das Zeitmoment dt durch dS, so bestimmt sich die Größe des Zuwachses für das Moment dt nach 2 §. 2. durch $S\,\frac{p\,dt}{100}$

Dies führt zu der Gleichung:

$$dS = S\,.\,\frac{p}{100}\,dt \qquad \text{oder} \quad \frac{dS}{S} = \frac{p}{100}\,dt.$$

Wird integrirt, so entsteht

$$9)\ lg\,S = \frac{pt}{100} + C.$$

Um die Constante zu bestimmen, hat man $t = o$ zu setzen. Dadurch wird der Werth des Kapitals S auf den Zeitpunkt der Anlage zurückgeführt. Dieser Werth ist das ursprüngliche Kapital K. Hiernach ist $C = lg\,K$. Es ist also aus 9

$$10)\ lg\,S = lg\,K + \frac{pt}{100}.$$

Auch hier gelten natürliche Logarithmen, die durch die Zahl 0,4342944.. auf künstliche zurückgebracht werden können. Die Gleichung 9 ist in so fern allgemeiner, als t keiner Beschränkung unterliegt, und jede positive Zahl bedeuten kann, was für 8 erst gefolgert werden muß.

Benutzt man die in diesem und dem vorigen §. gefundenen Formeln zur Vergleichung des Anwachsens der Kapitalien mit Zinses=Zinsen für den Zinsfuß 4 bei jähriger, halbjähriger, vierteljähriger, monatlicher, wöchentlicher, täglicher und momentaner Verzinsung auf die Dauer von 10 Jahren, so ergiebt sich der Reihe nach folgende Zusammenstellung:

1,480244; 1,485947; 1,488863; 1,490817; 1,491516; 1,491788; 1,491825.

Man sieht hieraus, daß die Vergrößerung der Kapitalien durch Zinses-Zins sich nicht so ungewöhnlich steigert, als man vielleicht glauben könnte, auch wenn sich die Zeiträume der Verzinsung sehr verkleinern. Bei kleiner Dauer der Kapital-Anlagen ist dieser Unterschied noch unbedeutender, denn der Werth, zu welchem die momentane Verzinsung führt, ist die Grenze, welcher sich die, durch Verkleinerung der Zeitabschnitte hervorgehenden, Werthe immer mehr nähern, ohne sie zu erreichen.

§. 19.

Die Gleichungen des §. 17. bilden die Grundlagen für die Rechnung mit Zinses-Zinsen. Aus ihnen leiten sich alle zusammengesetztern ab. Die nächste Frage ist folgende:

Ein Kapital K hat sich während der Zeit n bei Zinses-Zinsen zu der Summe S angehäuft. Zu welchem Zinsfuße war es ausgeliehen?

Um die Frage zu beantworten, hat man p aus 1 §. 17. abzuleiten. Es ist

$$\frac{S}{K} = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n.$$

Wird hieraus die $n$te Wurzel gezogen, mit 100 vervielfacht, und dann 100 entfernt, so hat man

$$1)\ p = 100\sqrt[n]{\frac{S}{K}} - 100 = N\left[\frac{2 + lg\,S - lg\,K}{n}\right] - 100.$$

Diese Gleichung gilt nur, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, wie aus 1 §. 17. folgt. Bedeutet aber n eine ganze Zahl und einen Bruch, dann kommt die Gleichung 4 in Anwendung, wodurch die Darstellung des Werthes von p schwieriger wird. Man kann sich dann der Substitution verschiedener Werthe für p bedienen, um denjenigen für p zu finden, welcher der Gleichung genügt. Dies Verfahren wird durch die Bemerkung unterstützt, daß sich der Zinsfuß innerhalb bestimmter Gränzen bewegt. Zweckmäßiger wird es aber sein, sich in dem vorliegenden Falle dennoch der Gleichung 1 zu bedienen und nach ihr den Werth von p zu ermitteln. Dadurch wird man einen Werth für p erhalten, der größer als der wirkliche sein wird, wie sich in §. 17. gezeigt hat. Da er aber nicht um ein Bedeutendes von ihm verschieden sein wird, so läßt sich der wahre durch Erniedrigung des gefundenen und Einführung in 4 §. 17. leicht ermitteln. Das Gesagte wird sich an folgendem Falle leicht verdeutlichen.

Ein Kapital von 1000 Fl. ist in 10,5 Jahren zu der Summe 1509,849...Fl. angewachsen. Zu welchem Zinsfuß war es ausgeliehen? Aus 1 ist

$$p = N\left[2 + \frac{0{,}1789335}{10{,}5}\right] - 100 = 4{,}0017\ldots.$$

Man schließt hieraus leicht auf 4, was denn auch nach 4 §. 17. der richtige Zinsfuß ist.

Geschieht die Verzinsung in jedem $r$ten Theile des Jahres statt jährlich, so hat man bei Ermittelung des jährlichen Zinsfußes die Gleichung 3 §. 18. zu Grunde zu legen. Es ist dann

$$2)\ p = r.100\sqrt[rn]{\frac{S}{K}} - 100r = N\left[lg\,100r + \frac{lgS - lgK}{rn}\right] - 100.r.$$

Nach den Gleichungen 2 und 3 §. 18. ergiebt sich ein Vortheil für den Gläubiger, wenn die Verzinsung für das halbe, Viertel-Jahr ꝛc., überhaupt für den $r$ten Theil des Jahres genommen und hierbei der zugehörige Zinsfuß nach §. 2. aus dem Jahres-Zinsfuß abgeleitet wird. Es entsteht daher die Frage: Wie groß muß der halbjährige, vierteljährige Zinsfuß ꝛc., überhaupt der Zinsfuß für den $r$ten Theil des Jahres angenommen werden, wenn die hieraus sich ergebende jährliche Verzinsung dem jährlichen Zinsfuß p gleichkommen soll?

Nennt man den dem $r$ten Theile eines Jahres entsprechenden Zinsfuß x, so ist die Summe, zu welcher sich ein Kapital K in den r Zeitabschnitten eines Jahres erhebt, nach 1 oder 3 §. 18.

$$3)\ S = K\ 1{,}0x^r.$$

Diese Summe muß nach der Aufgabe so groß als diejenige sein, zu welcher sich das Kapital K binnen Jahresfrist bei dem Zinsfuße p erhoben hat. Nach 1 §. 6. ist letztere $S_1 = K\ 1{,}0\,p$. Hieraus und aus 3 hat man

$K.1{,}0x = K.1{,}0p$. Es ist sofort

$$4)\ 1{,}0x = \sqrt[r]{1{,}0p} = 1{,}0\,p^{\frac{1}{r}}.$$

$$5)\ x = 100\sqrt[r]{1{,}0\,p} - 100 = 100(1{,}0p)^{\frac{1}{r}} - 100 = 100[(1{,}0p)^{\frac{1}{r}} - 1].$$

Unter den gegebenen Bedingungen ist ein Kapital in m solcher Zeitabschnitte nach 4 zu folgender Summe erwachsen:

$$6)\ S = K10x^m = K\left(1{,}0p^{\frac{1}{r}}\right)^m = K1{,}0\,p^{\frac{m}{r}}.$$

In n Jahren ist es zu folgender erwachsen:

$$7)\ S = K(1{,}0\,x)^{rn} = x\left(\ 1{,}0\,p^{\frac{1}{r}}\right)^{rn} = K\,1{,}0p^n\ .$$

Man erkennt hieraus, daß unter diesen Bedingungen das Kapital mit Zinses-Zinsen gerade sich so vermehrt, als wenn die Verzinsung jährlich vor sich geht. Der auf diese Weise für Theilabschnitte des Jahres abgeleitete Zinsfuß wird keiner sein als derjenige, welcher auf die in §. 2. angegebene Weise aus dem zährlichen Zinsfuß abgeleitet ist, und unterscheidet sich daher

wesentlich von demselben. Legt man nun 4 als Jahreszinsfuß zu Grund, so leiten sich aus ihm für den halbjährigen, vierteljährigen, monatlichen ꝛc. der Reihe nach folgende Werthe ab:

$$100\left(1{,}04^{\frac{1}{2}}-1\right)=1{,}98039\ldots;\quad 100\left(1{,}04^{\frac{1}{4}}-1\right)=0{,}9853\ldots;$$

Aus §. 2. ergeben sich hierfür folgende Werthe:

$\frac{1}{2}.4=2$; $\frac{1}{4}.4=1$; $\frac{1}{12}.4=\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots$.

Der hier in 4 und 5 angegebene Zinsfuß soll der »conforme Jahreszinsfuß« oder schlechthin der »conforme Zinsfuß« zum Unterschiede von dem in §. 2. angegebenen; dagegen der in §. 2. angegebene der »relative Zinsfuß« heißen, und letzterer überhaupt verstanden werden, wenn keine nähere Bestimmung über den Zinsfuß beigefügt ist. Das Wort »conform« möchte deswegen passend erscheinen, da der aus 4 und 5 für bestimmte Zeitabschnitte abgeleitete Zins immer binnen einer oder mehreren Jahresfristen auf den Jahreszinsfuß wieder zurückführt, also diesem conform bleibt, wie sich aus 7 erkennen läßt. Das Wort »relativ« wurde deswegen gewählt, weil es das Verhältniß oder die Beziehung andeutet, in welcher der in §. 2. für einen bestimmten Zeitabschnitt angegebene Zinsfuß zu dem Jahreszinsfuß steht, also von dem Verhältniß abhängt, worin ein gegebener Zeitabschnitt zu einer Jahresfrist steht. Nach diesen Bemerkungen läßt sich nun die Bedeutung der Gleichung

$$8)\quad S=K\,1{,}0\,p^{n+v}.$$

im Gegensatze von 4 §. 17. dahin bestimmen, daß sie die Größe des mit Zinses-Zinsen angewachsenen Kapitals K bei dem conformen Zinsfuße, während jene $S=1{,}0p^{n}.1{,}0\,v\,p$ den bei dem relativen Zinsfuße angiebt, wenn v einen Bruchtheil des Jahres bedeutet. Dasselbe gilt von den Gleichungen 4 §. 18. und 7 dieses §., die für die gleiche Zahl von Zeitabschnitten entwickelt sind. Stellt man nun den conformen Zinsfuß in seinem Verhältnisse zu 100 dar, so ergiebt sich hierfür aus 4:

$$9)\quad 0{,}0\,x=\sqrt[r]{1{,}0\,p}-1=1{,}0\,p^{\frac{1}{r}}-1$$

Durch diese Bemerkungen wird ein Unterschied im Calcul begründet, der wohl zu beachten ist, wenn die nöthige Genauigkeit und Sicherheit in denselben gebracht werden soll. Hieraus folgt weiter, daß die Gleichung 1 bei dem conformen Zinsfuß für jedes n gilt. Besteht dann n aus einer ganzen Zahl und einem Bruche $(n+v)$, so ergiebt sich hieraus folgende Form:

$$10)\quad p=100\left(\frac{S}{K}\right)^{\frac{1}{n+v}}-100=N\left[2+\frac{lg\,S-lg\,K}{n+v}\right]-100$$

Der Unterschied zwischen dem conformen und relativen Zinsfuß tritt dann besonders hervor, wenn es sich um die Bestimmung des Werthes handelt, wozu ein Kapital sammt Zinses-Zinsen erwachsen ist, dessen Ver-

zinsung in ganz unregelmäßigen Zeitabschnitten $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ vor sich geht. Man hat dann die in §. 17. befolgte Schlußweise anzuwenden, um durch die Werthe, welche von den verschiedenen Zeitabschnitten abhängen, zu dem Gesammtwerthe zu gelangen. Hiernach erhält man durch wiederholte Anwendung der in diesem §. aufgefundenen Gleichungen bei dem conformen Zinsfuß folgenden Werth:

$$11)\ S = K\,1{,}0\,p^{t_1}\,1{,}0\,p^{t_2} \ldots . 1{,}0\,p^{t_n} = K\,1{,}0\,p^{t_1+t_2+\ldots . t_n}$$

Bei dem relativen Zinsfuß durch wiederholte Anwendung der in 2 §. 2. gegebenen Gleichung:

$$12)\ S = K 1{,}0\,t_1\,p.\,1{,}0 t_2\,p \ldots . 1{,}0\,t_n\,p = K\left(1+\frac{t_1\,p}{100}\right) \ldots . \left(1+\frac{t_n\,p}{100}\right).$$

Beide Formeln führen auf 1 §. 17., wenn $t_1 = t_2 = \ldots t_n = 1$ gesetzt wird. Aus 11 zeigt sich deutlich, daß der conforme Zinsfuß immer auf den Jahres-Zinsfuß zurückführt, denn diese Gleichung fällt ihrem Wesen nach mit 8 zusammen.

§. 20.

Ein Kapital K ist zu p Proc. und Zinses-Zinsen auf n Jahre ausgeliehen, die Verwaltungskosten betragen für jedes Jahr q Proc. und werden am Ende des Jahres abgerechnet. Zu welcher Summe wird das Kapital anwachsen?

Das Kapital erwächst am Ende des ersten Jahres zur Summe $K_1 = K\,1{,}0\,p$. Die Verwaltungskosten betragen hiervon:

$$K_1\,0{,}0\,q = K\,1{,}0\,p\ 0{,}0\,q.$$

Werden diese abgezogen, so bleibt als Kapital übrig:

$$1)\ S_1 = K\,1{,}0\,p - K\,1{,}0p\,.\,0{,}0\,q = K\,1{,}0\,p\,(1 - 0{,}0\,q).$$

Diese Summe vergrößert sich wieder in dem Maaßstab von $1{,}0\,p$ und ist:

$$K_2 = S_1\,1{,}0\,p = K\,1{,}0\,p^2\,(1 - 0{,}0\,q).$$

Die Verwaltungskosten betragen hiervon:

$$K_2\,0{,}0\,q = K\,1{,}0\,p^2\,(1 - 0{,}0\,q)\,0{,}0\,q.$$

Werden diese abgezogen, so wird hieraus:

$$2)\ S_2 = K\,1{,}0\,p^2\,(1 - 0{,}0\,q) - K\,1{,}0\,p^2\,(1 - 0{,}0\,q)\,0{,}0\,q = K\,1{,}0\,p^2\,(1-0{,}0q)^2.$$

Wird diese Schlußweise fortgesetzt, so erhält man für die Summe, wozu das Kapital in n Jahren erwächst:

$$3)\ S = K\,1{,}0\,p^n\,(1 - 0{,}0\,q)^n.$$

Enthält n noch einen Bruchtheil eines Jahres (v), so gilt für den conformen Zinsfuß die vorstehende Gleichung und stellt sich so dar:

$$4)\ S = K\,1{,}0\,p^{n+v}\,(1 - 0{,}0\,q)^{n+v}$$

Wird aber der relative Zinsfuß für die Zeit $n+v$ zu Grunde gelegt, so findet man die Summe, wozu das Kapital in dieser Zeit erwächst, wenn

man vorerst die Größe des Kapitals für n ganze Jahre nach 3 ermittelt und dann den Zuwachs auf die nämliche Weise für die Zeit v bestimmt. Es ist sofort:

$$4)\ S = K\,1{,}0\,p^n\,(1-0{,}0\,q)^n\,\frac{100+vp}{100}\left(1-\frac{vq}{100}\right).$$

Ist ein Kapital von 10000 Fl. zu 5 Proc. ausgeliehen und mit 1 Proc. Verwaltungskosten belastet, so wird dasselbe in 20 Jahren zu folgender Summe erwachsen:

$$S = K\,1{,}05^{20}\,(0{,}99)^{20} = 21701{,}5 \text{ Fl.}$$

Werden 10000 Fl. zu 4 Proc. verzinst, so erwachsen sie in 20 Jahren nach 1 §. 17. zu 21911,23... Fl. Man sieht, daß die Verwaltungskosten mehr wegnehmen, als wenn das Kapital zu so viel Proc. weniger ausgeliehen wäre, als jene betragen. Kommen daher die Verwaltungskosten dem Zinsfuß gleich, so wird das Kapital aufgezehrt werden. Man kann daher fragen: Wie viel Proc. können die Verwaltungskosten höchstens betragen, damit das Kapital erhalten werde? Die Frage beantwortet sich, wenn $S = K$ in 3 gesetzt und dann q bestimmt wird. Es ist:

$$5)\ q = 100 - \frac{10000}{100+p}.$$

Bei 5 Proc. dürfen daher die Verwaltungskosten höchstens 4,76190476... Proc. betragen, wenn das Kapital nicht aufgezehrt werden soll.

§. 21.

Ein Kapital K ist bei dem Zinsfuße p und Zinses-Zinsen zu der Summe S erwachsen. Wie lange war es ausgeliehen?

Um diese Frage zu beantworten, hat man n aus 1 §. 17. zu bestimmen. Durch Anwendung von Logarithmen hat man:

$$lg\,S = lg\,K + n\,lg\,1{,}0\,p.$$

$$\text{also } 1)\ n = \frac{lg\,S - lg\,K}{lg\,1{,}0\,p}$$

Diese Gleichung gilt für ein ganzes n, wie aus 1 §. 17. folgt. Sie gilt jedoch auch für jedes n nach Zusatz §. 19., wenn der conforme Zinsfuß zu Grund gelegt wird. Für den relativen Zinsfuß kommt die Gleichung 4 §. 17. in Betrachtung. Soll nun der Werth von $n + v$ ermittelt werden, so wird man am besten auf folgende Weise verfahren. Aus 4 §. 17. ist:

$$S = K\,1{,}0\,p^n\left(1+\frac{v\ p}{100}\right) = K\,1{,}0\,p^n + K\,1{,}0\,p^n\ \frac{v\ p}{100} = S_1 + K\,1{,}0\,p^n\frac{v\ p}{100}$$

Hieraus ergiebt sich der Werth von v.

$$2)\quad v = \frac{(S - K\,1{,}0\,p^n)\,100}{p\,K\,1{,}0\,p^n} = \frac{(S - S_1)\,100}{p\,K\,1{,}0\,p^n}$$

Die Gleichungen 1 und 2 führen zu folgender Methode. Man ermittele zuerst nach 1 die Zahl der ganzen Jahre (n). Hierauf bestimme man den Werth von $S_1 = K\,1{,}0\,p^n$ nach 1 §. 17., führe diesen Werth in 2 ein und verfahre nach 2, wodurch sich der Werth von v ganz genau ergiebt.

Zur Verdeutlichung wird folgender Fall dienen. 1000 Fl. sind bei 4 Proc. und Zinses-Zinsen zu 2234,945 . . . Fl. erwachsen. Wie lange waren sie ausgeliehen? Nach 1 ist:

$$n = \frac{lg\,2234{,}945 - lg\,1000}{lg\,1{,}04} = \frac{0{,}3492668}{0{,}0170333} = 20{,}50494\ldots$$

Nun setze man $n = 20$ in 1 §. 17. und berechne den hieraus sich ergebenden Werth, so ist $S_1 = 1000.\,1{,}04^{20} = 2191{,}123\ldots$ Fl. Es ist also aus 2.

$$v = \frac{100.\,43{,}82245\ldots.}{4.\,2191{,}123\ldots.} = 1/2.$$

Es ist daher genau $n = 20{,}5 = 20$ J. $182\frac{1}{2}$ Tg. Der vorige Werth, welcher für den conformen Zinsfuß gilt, giebt 184 Tg. Die Gleichung 1 giebt hiernach den Werth zu groß an. Die nämlichen Gesetze gelten, wenn es sich um Ermittelung der Zahl der Zeitabschnitte handelt, die kleiner oder größer als ein Jahr sind. Bei momentaner Verzinsung bestimmt sich aus 7 §. 18:

$$3)\quad n = \frac{100}{p}\,lg\ nat.\,\frac{S}{K}$$

Hieher gehört die Frage: In welcher Zeit ist ein Kapital mit Zinses-Zinsen zur doppelten, dreifachen u. s. w., überhaupt zur $m$fachen Summe angewachsen? Um die Frage zu beantworten, hat man $m\,K$ statt S in 1 zu setzen. Hieraus ist:

$$4)\quad n = \frac{lg(m\,K) - lg\,K}{lg\,1{,}0\,p} = \frac{lg\ m}{lg\,1{,}0\,p}$$

Diese Gleichung gilt für den conformen Zinsfuß. Bei dem relativen Zinsfuß hat man nach der zu 2 angegebenen Methode zu verfahren, wenn Bruchtheile des Jahres vorkommen. Bei momentaner Verzinsung ist:

$$5)\quad n = \frac{100}{p}\,lg\ nat.\ m.$$

Wendet man die vorstehenden Gleichungen auf besondere Fälle an, so findet sich, daß ein Kapital mit Zinses-Zinsen bei 4 Proc. sich in etwas weniger als 18 Jahren verdoppelt hat. Aus 1 folgt der Werth von 17,67303.. aus 2 aber von 17,668662 . . Jahren. Der erste Werth wird gewöhnlich als Verdoppelungszeit angegeben, während der letztere der

richtige ist. Ersteres thut J. H. Meyer in seiner Anleitung (1ster Thl. S. 12.). Ueberhaupt ist zu bemerken, daß der hier besprochene Unterschied in den hieher gehörigen Werken von Tetens, Florencourt, Meyer, Brune ꝛc. nicht hervorgehoben wird.

Der Einfluß, welchen die halb=, viertel=jährliche, monatliche Verzinsung ꝛc. auf die Zeit der Verdoppelung der Kapitalien äußert, ist nicht so bedeutend, als man gemeiniglich glaubt. Wird der Kürze wegen, und weil bei dieser Vergleichung schon relative Werthe entscheiden, die Gleichung 1 statt 2 benutzt, so giebt die folgende Zusammenstellung an, in wie viel Jahren ein Kapital mit Zinses=Zinsen bei 5 Proc. sich verdoppelt hat, wenn es auf jährliche, halbjährliche, vierteljährliche, monatliche, wöchentliche, tägliche und momentane Verzinsung ausgeliehen war.

14,20669..; 14,03547; 13,94948..; 13,8918..; 13,8888385..;
13,8845071... 13,862943..;

Die Zeit der Verdoppelung bei momentaner Verzinsung ergiebt sich aus 5. Florencourt findet in seinem Werke S. 9. für diese Zeit nur 6,0206 Jahre. Diese Bestimmung ist unrichtig und rührt offenbar davon her, daß er sich bei der Rechnung künstlicher Logarithmen statt natürlicher bedient hat.

Gebraucht man bei Ausführung der hieher gehörigen Rechnungen siebenstellige Logarithmen, so findet man oft Resultate, die sich als unrichtig ankündigen. Man darf sich jedoch nicht irreführen lassen, weil dies davon herrührt, daß solche Logarithmen die gesuchten Werthe nicht genau genug angeben.

§. 22.

Durch mehrere Jahre wird jährlich ein Kapital K bei dem Zinsfuße p und Zinses=Zinsen angelegt. Zu welcher Summe sind diese Anlagen im Augenblick der letzten Zahlung erwachsen?

Die Frage beantwortet sich durch 1 §. 17., wenn man bemerkt, daß die letzte Anlage bei der Zahlung den Werth K hat, die zweitletzte ein Jahr lang, die drittletzte zwei Jahre lang u. s. f., die erste $(n-1)$ Jahre lang nutzbringend angelegt ist. Man hat daher der Reihe nach 0, 1, 2 . . . . $(n-1)$ statt n in 1 §. 17. zu setzen und sämmtliche Werthe zusammenzuzählen. Hiernach ist:

1) $S = K + K\,1{,}0\,p + K\,1{,}0\,p^2 + K\,1{,}0\,p^3 + \ldots + 1{,}0\,p^{n-1}$
$= K(1 + 1{,}0\,p + 1{,}0\,p^2 + 1{,}0\,p^3 + \ldots + 1{,}0\,p^{n-1})$

Die eingeklammerte Reihe läßt sich nach der Formel 3 §. 118. der Algebra

$$2)\ N = \frac{ue - a}{e - 1} = \frac{a - ue}{1 - e}$$

summiren, wenn $u = 1{,}0\,p^{n-1}$, $e = 1{,}0\,p$ (als Exponent) $a = 1$ in der ersteren Form von 2 gesetzt wird, denn die Darstellung 1 bildet eine geometrische Reihe. Hiernach ist:

$$3)\quad S = K\,\frac{1{,}0\,p^n - 1}{1{,}0\,p - 1} = K\,\frac{1{,}0\,p^n - 1}{0{,}0\,p} = \frac{K\,1{,}0\,p^n}{0{,}0\,p} - \frac{K}{0{,}0\,p}$$

Durch Logarithmen erhält man aus der letzten Form:

$$4)\quad S = Num.[lg\,K + n\,lg\,1{,}0\,p - lg\,0{,}0\,p] - \frac{K}{0{,}0\,p}.$$

Die Aufgabe läßt sich verallgemeinern, wenn man fragt: zu welchem Werthe die Kapital-Anlagen erwachsen sind, wenn h Jahre nach der letzten Zahlung verflossen sind? Der Werth jeder Zahlung wird sich im Verhältniß zu der längern Zeitdauer vergrößern. Man hat daher h, $h+1$, $h+2, \ldots h+n-1$ statt n in 1 §. 17. zu setzen, und wie oben zu verfahren, oder, was dasselbe ist, jedes Glied in 1 mit $1{,}0\,p^h$, also auch den Werth der Reihe damit zu vervielfachen. Es ist dann:

$$S = K\,1{,}0\,p^h + K\,1{,}0\,p^{h+1} + K\,1{,}0\,p^{h+2} \ldots . K\,1{,}0\,p^{h+n-1}$$
$$= K\,1{,}0\,p^h\,(1 + 1{,}0\,p + 1{,}0\,p^2 + \ldots . 1{,}0\,p^{n-1})$$

$$\text{oder}\quad 5)\quad S = K\,1{,}0\,p^h\,\frac{1{,}0\,p^n - 1}{0{,}0\,p} = \frac{K\,1{,}0\,p^{h+n}}{0{,}0\,p} - \frac{K\,1{,}0\,p^h}{0{,}0\,p}$$

$$6)\quad S = N[lg\,K + (h+n)\,lg\,1{,}0\,p - lg\,0{,}0\,p] - N[lg\,K + n\,lg\,1{,}0\,p - lg\,0{,}0\,p]$$

Diese Gleichungen gelten, wenn die Kapital-Anlagen in Jahresfristen gemacht werden. Sie lassen sich jedoch leicht auf die Fälle ausdehnen, wenn die Anlagen in andern Zeitabschnitten geschehen. Ist ein solcher Abschnitt der $v$te Theil des Jahres, so daß $v = \frac{w}{u}$ ein echter oder unechter Bruch ist, so ist der hieraus sich ergebende Zinsfuß $p_1 = \frac{p\,w}{u}$. Werden nun m Kapital-Anlagen gemacht, so ergiebt sich leicht nach dem Vorgange von 1 und 3 die Gleichung:

$$7)\quad S = K\,\frac{1{,}0\,p_1^m - 1}{0{,}0\,p_1}.$$

Soll der Werth dieser Anlagen für s weitere Zeitabschnitte nach der letzten Zahlung angegeben worden, so hat man, je nachdem dieselben von den ersten verschieden, oder nicht verschieden sind:

$$8)\quad S = K\,1{,}0\,p_1^s\,\frac{1{,}0\,p_1^m - 1}{0{,}0\,p_1};\qquad 9)\quad S = K\,1{,}0\,p_2^s\,\frac{1{,}0\,p_1^m - 1}{0{,}0\,p}$$

Werden die Kapital-Anlagen jährlich und während n Jahren gemacht, und geht die Verzinsung in jedem $r$ten Theil des Jahres vor sich, so kommen die in §. 18. gefundenen Resultate in Anwendung. Der Zinsfuß ist dann $\frac{p}{r} = p_1$ und jedes angelegte Kapital wird sich jährlich durch die

schnellere Verzinsung verhältnißmäßig vergrößern. Um den gesuchten Werth zu finden, hat man die letzte Form von 3 §. 18. anzuwenden und 0, 1, 2, ... $n-1$ statt n zu setzen. Es entsteht:

$$S = K + K\,1{,}0\,p_1^{\,r} + K\,1{,}0\,p_1^{\,2r} \ldots\ldots + K\,1{,}0\,p_1^{\,(n-1)r}.$$

Diese Reihe summirt sich nach 2, wenn $e = 1{,}0\,p^r$ gesetzt wird. Es ist

$$10)\quad S = K\,\frac{1{,}0\,p_1^{\,nr} - 1}{1{,}0\,p_1^{\,r} - 1}$$

Es ist klar, daß hier nur der relative Zinsfuß in Anwendung kommen kann, indem die Verzinsung nach dem conformen (4 §. 19.) auf die Gleichung 3 führen würde, also keine Bedeutung hätte. Sollen bei der nämlichen Verzinsung die Kapital-Anlagen noch h Jahre nach der letzten Anlage stehen bleiben, so ist ihr Werth:

$$11)\quad S = K\,1{,}0\,p_1^{\,hr}\,\frac{1{,}0\,p_1^{\,nr} - 1}{1{,}0\,p_1^{\,r} - 1}$$

Werden die Kapital-Anlagen in jedem $r$ten Theile des Jahres während n Jahren gemacht, und geschieht die Verzinsung nach dem relativen Zinsfuß, so erhält man:

$$12)\quad S = K + K\,1{,}0\,p_1 + K\,1{,}0\,p_1^{\,2} + K\,1{,}0\,p_1^{\,3} + \ldots K\,1{,}0\,p_1^{\,(n-1)r}$$
$$= K\,\frac{1{,}0\,p_1^{\,rn} - 1}{0{,}0\,p_1}$$

Alle diese Gleichungen gelten, wenn die Anzahl der Abschnitte eine ganze Zahl bedeutet. Soll aber der Werth der Kapital-Anlagen bei relativem Zinsfuße auf einen Zeitpunkt nach der letzten Zahlung zurückgebracht werden, welcher einen Bruchtheil v eines Jahres oder Zeitabschnittes beträgt, so hat man die Gleichung 4 §. 17., wie bisher, anzuwenden. Hierdurch entsteht:

$$S = K\,1{,}0\,vp + K\,1{,}0\,p.\,1{,}0\,vp + K\,1{,}0\,p^2\,1{,}0\,vp + \ldots K\,1{,}0\,p^{n-1}\,1{,}0\,vp$$

$$13)\quad S = K\,\frac{1{,}0\,p_n - 1}{0{,}0\,p}\,1{,}0\,vp = K\,\frac{1{,}0\,p^n - 1}{0{,}0\,p}\cdot\frac{100 + vp}{100}$$

Fällt der Zeitpunkt $(h + v)$ Jahre nach der letzten Anlage, so ist:

$$14)\quad S = K\,\frac{1{,}0\,p^n - 1}{0{,}0\,p}\,1{,}0\,p^h\,1{,}0\,vp$$

Die eben gemachten Bemerkungen lassen sich ohne alle Schwierigkeit auch auf die Gleichungen 7 — 12 ausdehnen, weswegen die speciellen Fälle nicht besonders aufgeführt werden. Die bisher entwickelten Gleichungen gelten unter den gestellten Voraussetzungen nur für den relativen Zinsfuß. Die Gleichung 5 gilt auch für den onformen Zinsfuß, wobei zu bemerken ist, daß h eine ganze, gebrochene, oder eine aus einer ganzen und gebrochenen, bestehende Zahl $(h+v)$ bedeuten kann, wie sich leicht aus §. 19. und der entwickelten Darstellung vor 5 folgert. Im letzten Falle entsteht:

$$15)\ S = K\,1{,}0\,p^{h+v}\,\frac{1{,}0\,p^{n}-1}{0{,}0\,p}$$

Sollen nun bei dem conformen Zinsfuß die Kapital-Anlagen in Zeitabschnitten gemacht werden, welche von der Dauer eines Jahres verschieden sind, so hat man aus §. 19. vorerst den Ausdruck für den Zinsfuß abzuleiten. Kommt der Zeitabschnitt dem $v$ten Theil eines Jahres gleich, so daß $v = \frac{w}{u}$ ist, so ist derselbe $1{,}0\,p^{v}$. Werden nun diese Kapital-Anlagen $m$mal gemacht, so ist:

$$S = K + K\,1{,}0\,p^{v} + K\,1{,}0\,p^{2v} + \ldots K\,1{,}0\,p^{(m-1)v}$$

Die Summe dieser Reihe bestimmt sich wie in 10 und ist:

$$16)\ S = K\,\frac{1{,}0\,p^{mv}-1}{1{,}0\,p^{v}-1} = \frac{K\left(\sqrt[u]{1{,}0\,p^{mw}}-1\right)}{\sqrt[u]{1{,}0\,p^{w}}-1}$$

Ist statt der Zahl der Zeitabschnitte (m) die Zahl der Jahre n gegeben, so findet sich erstere, wenn n durch v getheilt wird. Es ist sofort $m = \frac{n}{v} = \frac{nu}{w}$ zu setzen, und es wird aus 16:

$$17)\ S = K\,\frac{1{,}0\,p^{n}-1}{1{,}0\,p^{\frac{w}{u}}-1} = \frac{K\,1{,}0\,p^{n}-1}{\sqrt[u]{1{,}0\,p^{w}-1}}$$

Werden die Kapital-Anlagen bei dem conformen Zinsfuß halbjährlich, vierteljährlich ꝛc., überhaupt in jedem $r$ten Theile des Jahres gemacht, so ist hiernach der Werth sämmtlicher Anlagen nach Verfluß von n Jahren:

$$19)\ S = K\,\frac{1{,}0\,p^{n}-1}{1{,}0\,p^{\frac{1}{r}}-1} = \frac{K\,1{,}0\,p^{n}-1}{\sqrt[r]{1{,}0\,p-1}}$$

Es können nun auch solche Fälle vorkommen, worin die Kapital-Anlagen in unregelmäßigen Summen und Zeitabschnitten gemacht werden. Für ihre Werthbestimmung lassen sich keine allgemeine Formeln entwickeln. Sie müssen nach den Eigenthümlichkeiten der Aufgabe immer besonders behandelt werden, wofür in dem Bisherigen, namentlich in den Gleichungen 11 und 12 §. 19, die Elemente gegeben sind.

Wendet man diese Gleichungen an, so wird sich der Unterschied in ihrer Bedeutung zeigen. Werden nämlich 1000 Fl. in jedem halben Jahre während 30 Jahre zu 4 Proc. angelegt, so ist der Werth sämmtlicher

Anlagen am Ende des 30sten Jahres bei halbjährlicher Verzinsung nach dem relativen Zinsfuß aus 12, wenn $r = 2$, $p_1 = \frac{1}{2}4 = 2$ gesetzt wird:

$$S = 1000\,\frac{1{,}02^{60} - 1}{0{,}02} = 114051{,}539\ldots\text{Fl.}$$

Bei halbjährlicher Verzinsung nach dem conformen Zinsfuß ist aus 17, wenn $p = 4$, $r = 2$ gesetzt wird:

$$S = 1000\,\frac{1{,}04^{30} - 1}{\sqrt{1{,}04 - 1}} = 113280{,}5\ldots\text{Fl.}$$

Das letzte Resultat ist ungünstiger als das erste. Es ist jedoch noch immer günstiger, als wenn 2000 Fl. jährlich während 30 Jahren zu 4 Proc. angelegt werden, denn hieraus erwächst die Summe 112169,877 Fl.

§. 23.

Mehrere Jahre hindurch wird jährlich ein Kapital K bei dem Zinsfuße p angelegt. Die Verwaltungskosten betragen jährlich q Proc. und werden am Ende eines jeden Jahres abgerechnet. Zu welcher Summe sind diese Anlagen im Augenblicke der letzten Anlage angewachsen?

Die Frage beantwortet sich durch Anwendung der Gleichung 3 §. 20, wenn nach der in §. 22 gezeigten Schlußweise $0, 1, 2 \ldots n-1$ statt n gesetzt und die hiedurch entstehenden Werthe zusammengezählt werden. Es ist hiernach

$$S = K[1 + 1{,}0p(1\text{-}0{,}0q) + (1{,}0p(1\text{-}0{,}0q))^2 + \ldots . (1{,}0p(1\text{-}0{,}0q))^{n\text{-}1}].$$

$$1)\quad S = K\frac{1{,}0p^n\,(1\text{-}0{,}0q)^n\,\text{-}1}{1{,}0p(1\text{-}0{,}0q)\,\text{-}1} = \frac{K1{,}0p^n\,(1\text{-}0{,}0q)^n}{1{,}0p(1\text{-}0{,}0q)\text{-}1} - \frac{K}{1{,}0p(1\text{-}0{,}0q)\text{-}1}.$$

Zur Rechnung mit Logarithmen eignet sich die Darstellung

$$2)\quad S = N[lgK + n\,lg1{,}0p(1\text{-}0{,}0q) - N[lgK\text{-}lg(1{,}0p\,(1\text{-}0{,}0q\text{-}1))].$$

Soll der Werth auf h Jahre nach der letzten Anlage zurückgebracht werden, so unterliegt jede einzelne Anlage einer längern Zeitdauer, also auch die hieraus sich ergebende Summe. Nach den Bedingungen der Gleichung 3 §. 20 ist:

$$3)\quad S = K1{,}0p^h\,(1\text{-}0{,}0q)^h\,\frac{1{,}0p^n\,(1\text{-}0{,}0q)^n\,\text{-}1}{1{,}0p(1\text{-}0{,}0q)\,\text{-}\,1}.$$

Diese Gleichungen gelten für ganze Jahre und bei dem conformen Zinsfuß für jedes mögliche n. Dauert die Verwaltung noch einen Theil eines Jahres (v) weiter, so ist für den relativen Zinsfuß aus den nämlichen Gründen, wie in 4 §. 20:

$$4)\quad S = K1{,}0p^h\,(1\text{-}0{,}0q)^h\,\frac{1{,}0p^n\,(1\text{-}0{,}0q)^n\,\text{-}\,1}{1{,}0p(1\text{-}0{,}0q)\,\text{-}\,1}\cdot\frac{100 + vp}{100}\left(1 - \frac{vq}{100}\right).$$

Sind die Kapitalanlagen ungleich, so hat die Werthermittelung keine weitere Schwierigkeit. Dasselbe gilt für andere Zeitabschnitte als Jahresfristen. Wird eine Jahresrente von 1000 fl. jährlich zu 5 Proc. und mit Abzug von 1 Proc. für die Verwaltungskosten angelegt, so ist sie in 10 Jahren zu der Summe

$$S = \frac{1000[1{,}05^{10}(0{,}99)^{10} - 1]}{1{,}05 \,.\, 0{,}99 - 1} = 11987{,}86 \text{ fl.}$$

angewachsen. Die nämliche Kapitalanlage erwächst in 10 Jahren bei 4 Proc. nach 3 §. 22 zu 12006,107 .. fl.

§. 24.

Ein Kapital K ist nach n Jahren unverzinslich zahlbar. Es soll durch gleiche Summen, die am Ende eines jeden Jahres fällig sind (Zeitrente)*), gezahlt werden. Wie groß sind diese Theilzahlungen, wenn Zinses-Zinsen bei p Proc. gerechnet werden und das Kapital in n Jahren getilgt sein soll?

Nennt man die jährlich zu zahlende Summe A, so werden die einzelnen Abtragssummen mit Zinses-Zinsen zur nämlichen Größe erwachsen müssen, als das zu tilgende Kapital besagt. Nach 1 §. 22 ist daher

$$K = A\,1{,}0p^{n-1} + A.\,1{,}0p^{n-2} \ldots + A.1{,}0p^2 + A.1{,}0p + A = A.\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}.$$

Hieraus bestimmt sich der Werth der jährlichen Rente durch

$$1)\quad A = K\,\frac{0{,}0p}{1{,}0p^n - 1}$$

Diese Gleichung gilt nur für ein ganzes n. Nach ihr kann eine Rente K, die alle n Jahre fällig ist, in eine jährlich auszuzahlende verwandelt werden. Soll eine alle 5 Jahre fällige Rente von 2500 fl. in eine jährliche verwandelt werden, so ist bei dem Zinsfuß 4 aus 1, wenn $p = 4$, $n = 5$ gesetzt wird, der gesuchte Werth

$$A = \frac{2500 \,.\, 0{,}04}{1{,}04^5 - 1} = 461{,}567 \ldots \text{ fl.}$$

Soll eine jährliche Rente in eine verwandelt werden, welche in jedem $r$ten Theile des Jahres fällig ist, so hat man den Zinsfuß für den $r$ten Theil des Jahres zu bestimmen und wie bei 1 zu verfahren. Denn man hat die in kleineren Zeitabschnitten auszuzahlende Summe so anzusehen, als erwachse sie mit Zinses-Zinsen zur Jahresrente. Setzt man $\frac{p}{r} = p_1$, so ist

$$K = A.1{,}0p^{r-1} + A.1{,}0p^{r-2} \ldots . A.1{,}0p + A = A\frac{1{,}0p_1{}^r - 1}{0{,}0p_1}.$$

*) Unter Zeitrente soll eine Reihe von gleichen oder ungleichen Kapitalzahlungen verstanden werden, die in beliebigen (gleichen oder ungleichen) Zeitabschnitten geleistet werden.

$$\text{Also } 2)\ A = \frac{K.0,0p_1}{1,0p_1^r - 1}.$$

Diese Gleichung gilt für den relativen Zinsfuß. Soll aber der Jahreszinsfuß beibehalten, und doch die Rente in jedem $r$ten Theile des Jahres ausgezahlt werden, so ist hiernach der conforme Zinsfuß (4 §. 19) anzuwenden, und es ist

$$K = A + A.1,0p^{\frac{1}{r}} + A1,0p^{\frac{2}{r}} + \ldots A.1,0p^{\frac{r-1}{r}} = A.\frac{1,0p-1}{1,0p^{\frac{1}{r}}-1}.$$

$$\text{Also: } 3)\ A = K\frac{1,0p^{\frac{1}{r}}-1}{0,0p} = \frac{K}{0,0p}1,0p^{\frac{1}{r}} - \frac{K}{0,0p}.$$

Soll eine jährliche Rente von 1000 Fl. bei dem Zinsfuße 4 in eine vierteljährlich auszuzahlende verwandelt werden, so erhält man für den relativen Zinsfuß aus 2, wenn $p_1 = 1$ gesetzt wird,

$$A = \frac{1000.0,01}{1,01^4-1} = \frac{10}{0,040604} = 246,281\ldots \text{ Fl.}$$

Wird der conforme Zinsfuß zu Grunde gelegt, so ist aus 3

$$A = \frac{1000.\ (1,04^{\frac{1}{4}}-1)}{0,04} = 246,33\ldots.$$

Man sieht, daß der Unterschied bei kleineren Summen nicht bedeutend ist. Die vorliegenden Gleichungen, so wie alle hieher gehörigen, lassen sich auch aus den in §. 22 aufgestellten ableiten, denn man bemerkt leicht, daß K an die Stelle S, und A an die Stelle von K getreten ist. Man hat daher K aus den dort gefundenen Ausdrücken abzuleiten und im erhaltenen Resultat A statt K, und K statt S zu setzen. Hiernach beantworten sich leicht folgende hieher gehörige Fragen.

Ein Kapital K ist nach $(n+h)$ Jahren ohne Zinsen fällig. Es soll in den ersten n Jahren durch gleiche jährliche Abtragssummen getilgt werden. Wie groß ist die jährliche Abtragssumme?

Sie ergiebt sich aus 5 §. 22, wenn dort K entwickelt und die angegebenen Vertauschungen gemacht werden, und ist

$$4)\ A = \frac{K.0,0p}{1,0p^h\,(1,0p^n - 1)}.$$

Diese Gleichung gilt bei dem relativen Zinsfuße nur für ein ganzes h und n. Bei dem conformen Zinsfuße kann h jeden beliebigen Werth haben und eine gebrochene, oder eine aus einer ganzen und gebrochenen bestehende Zahl bedeuten $(h+v)$ 15 §. 22. Ist das unverzinsliche Kapital nach $(n+h+v)$ Jahren fällig, und soll es in den ersten n Jahren durch gleiche Summen getilgt werden, so ist die jährliche Abtragssumme, wenn v einen Bruchtheil des Jahres bedeutet und der relative Zinsfuß zu Grunde gelegt wird, aus 13 §. 22:

$$5)\quad A = \frac{K.0{,}0p}{1{,}0p^{\prime}.1{,}0vp(1{,}0p^{n}-1)} = \frac{K\ p}{(100+rp).1.0p^{h}\,(1{,}0p^{n}-1)}.$$

Hierin kann h jede ganze positive Zahl oder auch 0 bedeuten. Sollen die Zahlungen in jedem $r$ten Theile des Jahres gemacht werden und in n Jahren beendigt sein, so ergeben sich für den relativen und den conformen Zinsfuß aus 12 und 17 §. 22 folgende Darstellungen:

$$6)\quad A = \frac{K.0{,}0p_1}{1{,}0p_1^{rn}-1}\ ;\qquad 7)\quad A = \frac{K(1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1)}{1{,}0p^{n}-1}.$$

Sollen die Zahlungen jährlich gemacht, die Verzinsung aber für jeden $r$ten Theil des Jahres gerechnet werden, so ist aus 10 §. 22:

$$8)\quad A = \frac{K(1{,}0p_1^{r}-1)}{1{,}0p_1^{nr}-1}$$

u. s. w. Der conforme Zinsfuß kommt hier nicht in Betrachtung, weil er auf die Gleichung 1 führen würde. Diese Gleichungen beantworten auch folgende Frage: Unter den oben angeführten Bedingungen wurde während einer Reihe von Jahren ein Kapital bei dem Zinsfuße p mit Zinses-Zinsen angelegt und erhob sich zur Summe K. Wie groß ist die jeweils angelegte Summe?

§. 25.

Eine jährliche Kapitalanlage K ist mit Zinses-Zinsen bei dem Zinsfuße p zur Summe S erwachsen. Wie oft oder durch wie viele Jahre wurde die Anlage gemacht?

Diese Frage beantwortet sich durch Entwickelung des Werthes von n aus der Gleichung 3 §. 22. Man erhält nämlich aus ihr $S.0{,}0p = K.1{,}0p^{n} - K$. Hieraus entsteht durch Versetzung und Division mit K die Form $1{,}0p^{n} = \frac{S.0{,}0p+K}{K}$, und dies führt durch Anwendung von Logarithmen zu folgender Gleichung:

$$1)\quad n = \frac{lg(S.0{,}0p+K)-lg\,K}{lg\ 1{,}0p}.$$

Diese Gleichung gilt nach der Anlage, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, und in diesem Falle gilt sie für den conformen und relativen Zinsfuß. Führt aber der Werth von n auf eine ganze Zahl und einen Bruch, dann kommen die Gleichungen 5, 13, 14 und 15 §. 22 in Betrachtung, und man hat zwischen den Fällen zu unterscheiden, welche sich auf den conformen und relativen Zinsfuß beziehen. Hält man nun zuerst den conformen Zinsfuß fest, so sind aus 15 §. 22 zwei Größen zu bestimmen. Ist v ein Bruch und setzt man $h = 0$, so entsteht, wenn v bekannt ist und die nöthigen Entwickelungen gemacht werden,

$$2)\quad n = \frac{lg(S.0{,}0p + K.1{,}0p)^v - lg\,K - lg\,1{,}0p^v}{lg\,1{,}0p}.$$

Ist n bekannt, so entsteht auf demselben Wege

$$3)\quad v = \frac{lg\,S.0{,}0p - lg\,K - lg\,(1{,}0p^n - 1)}{lg\,1{,}0p}.$$

Nun kann auch der Fall eintreten, daß die Kapitalanlagen noch eine längere Zeit, als eine Jahresfrist oder einen Theil des Jahres, zinstragend belassen werden, wie in §. 22 vorausgesetzt wurde. In diesem Falle kommen die Zeiträume n und $(h+v)$ in Frage. Es ergiebt sich dann aus der Gleichung 15 §. 22, wenn $(h+v)$ als bekannt vorausgesetzt wird,

$$4)\quad n = \frac{lg(S.0{,}0p + K1{,}0p^{h+v}) - lgK - (h+v).lg\,1{,}0p}{lg\,1{,}0p}.$$

$$5)\quad h+v = \frac{lg\,S.0{,}0p - lg\,K - lg\,(1{,}0p^n - 1)}{lg\,1{,}0p}.$$

Man sieht aus den in 2—4 gegebenen Gleichungen, daß es sich hier um die Auflösung einer unbestimmten Gleichung, wie in §. 8, handelt. Um nun die vorliegende Frage zu beantworten, verfahre man ähnlich, wie dort, bestimme aus 1 den Werth von n ohne Rücksicht auf v. Erhält man eine ganze Zahl, so betrachte man die Gleichung als gelöst. Erhält man aber eine aus einer ganzen und gebrochenen zusammengesetzte Zahl für n, so setze man der Reihe nach die Werthe n, $n-1$, $n-2$, ... statt n in S, und man wird für jede dieser Annahmen einen Werth für $h+v$ erhalten, welcher der Aufgabe genügt. Man kann jedoch auch hier die Aufgabe dadurch fixiren, daß man die größtmögliche ganze Zahl für n festhält, oder dadurch, daß man n oder $h+v$ als gegeben annimmt. Kommt der relative Zinsfuß in Betrachtung, so hat man die Gleichungen 13 und 14 §. 22 der Entwickelung zu Grunde zu legen. Ist v bekannt, so erhält man

$$6)\quad n = \frac{lg\,(Sp + K(100 + vp)) - lg\,K(100 + vp)}{lg\,1{,}0p}.$$

Ist n bekannt, so wird

$$7)\quad v = \frac{S}{K(1{,}0p^n - 1)} - \frac{100}{p}.$$

Geht man von der Gleichung 14 aus, so sind außer S, K, p die drei von einander unabhängigen Größen n, h, v zu bestimmen. Hieraus entsteht

$$8)\quad n = \frac{lg\,[Sp + K1{,}0p^h\,(100 + vp)] - lg\,K.1{,}0p^h\,(100 + vp)}{lg\,1{,}0p}.$$

$$9)\quad h = \frac{lg\,Sp - lg\,K(1{,}0p^n - 1)(100 + vp)}{lg\,1{,}0p}.$$

$$10)\quad v = \frac{S}{K(1{,}0p^n - 1)\,1{,}0p^h} - \frac{100}{p}.$$

Es müssen daher in diesem Falle eigentlich 5 Größen gegeben sein, um

die sechste finden zu können. Ist dies nicht der Fall, so handelt es sich auch hier um die Auflösung einer unbestimmten Aufgabe, die sich nach den bisher gemachten Mittheilungen ohne weitere Schwierigkeiten lösen lassen wird, denn man hat auch hier vorerst n nach 1 zu bestimmen, dann hiefür bestimmte Werthe anzunehmen, um sofort nach 9 und 10 die entsprechenden für h und v zu finden. Das Gesagte wird sich leicht an einem besondern Falle verdeutlichen. Ein Kapital von 1000 Fl. wurde jährlich bei 4 Proc. angelegt und erwuchs zu der Summe 12006,107... Fl. Wie oft wurde es angelegt? Setzt man die angegebenen Werthe in 1, so erhält man

$$n = \frac{lg\,1480{,}24428.. - lg\,1000}{lg\,1{,}04} = \frac{0{,}1703332}{0{,}0170333} = 10.$$

Das Kapital wurde also 10 Mal angelegt. Wäre das Kapital unter den angegebenen Bedingungen zu der Summe 12246,2292. Fl. erwachsen, so hat man auf folgende Weise zu verfahren. Man bestimme n nach 1. Hieraus wird

$$n = \frac{lg\,1489{,}8491... - lg\,1000}{lg\,1{,}04} = \frac{0{,}1731422}{0{,}0170333} = 10{,}164....$$

Würde man nun n zu 10,164... Jahren annehmen, so wäre dies sehr unrichtig. Um den Bruchtheil des Jahres richtig zu erhalten, hat man eine der Gleichungen 3 oder 7 anzuwenden. Für den relativen Zinsfuß ist, wenn man $1{,}04^{10} - 1$ für 7 berechnet und dann einführt:

$$v = \frac{12246{,}2292...}{1000.0{,}4802442} - 25 = 0{,}5$$

für den conformen Zinsfuß aber ist aus 3:

$$v = \frac{lg\,489{,}84917.. - lg\,1000 - lg\,0{,}48024428..}{lg\,1{,}04} = \frac{0{,}6900622 - 0{,}6814620}{0{,}0170333}$$

$$= \frac{86002}{170333} = 0{,}5049...$$

Der Unterschied beider Resultate ist, wie man sieht, bei kleinen Summen und Zeiträumen nicht sehr bedeutend. Er beträgt hier nahezu zwei Tage, denn bei dem relativen Zinsfuß erhält man für $v = 182{,}5$ Tage, und bei dem conformen nahezu 184,32.. Tage. Bei größeren Summen und größeren Zeiträumen möchte der Unterschied bedeutender sein. Ist nun n gefunden, so kann man statt n allmälig die Werthe 9, 8,.. setzen. Man wird dann für jeden dieser Werthe einen für $h + v$ erhalten, welcher der Aufgabe genügen wird.

Soll der Zinsfuß p ermittelt werden, wenn unter den in §. 22 angegebenen Bedingungen S, K, n, h, v bekannt ist, so handelt es sich um Auflösung einer Gleichung von einem höheren Grade. Man kann nun die Mittel benutzen, welche die Lehre von der Auflösung der höheren Gleichun-

gen an die Hand giebt. Man kann aber auch den Weg der Substitution wählen, wonach man in die Gleichungen des §. 22 so lange Werthe für p einführt, bis einer von ihnen der Gleichung genügt. Hiebei kommt die Bemerkung zu Hülfe, daß die Werthe 3; 3,5; 4; 4,5; 5 . . . am häufigsten vorkommen. Endlich kann man auch folgende Annäherungsmethode wählen, die in vielen Fällen zum Ziele führt. Man setze in 3 §. 22 der Kürze wegen $0{,}0p = q$, so ist $\frac{S}{K} = \frac{(1+q)^n - 1}{q}$.

Nun entwickle man das Binomium $(1+q)^n$ in eine Reihe, ziehe hievon die Einheit ab und drücke der Kürze wegen die Binomialcoefficienten durch $n_1 = n$, $n_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}$, $n_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ . . . aus, so ist

$$(1+q)^n - 1 = n_1 q + n_2 q^2 + n_3 q^3 \ldots .$$

Wird nun durch q gemessen, so entsteht

$$\frac{S}{K} = n + n_2 q + n_3 q^2 + n_4 q^3 + \ldots .$$

Da nun, wie bemerkt, $q = 0{,}0p$, also in der Regel einen kleinen Bruch ausdrückt, so convergiren die Glieder dieser Reihe, wenn nicht n eine etwas große Zahl bedeutet, und man kann die Glieder vom vierten an vernachlässigen. Hiedurch hat man folgende quadratische Gleichung zu lösen:

$$q^2 + \frac{n_2}{n_3} q = \frac{S}{n_3 K} - \frac{n}{n_3}.$$

Man erhält nach 3 §. 93 der Algebra:

$$11)\quad q = -\frac{n_2}{2n_3} + \sqrt{\frac{S}{n_3 K} - \frac{n}{n_3} + \left(\frac{n}{2n_3}\right)^2}$$

$$= -\frac{3}{2(n-2)} + \sqrt{\frac{6S}{n(n-1)(n-2)K} - \frac{6}{(n-1)(n-2)} + \frac{9}{4(n-2)^2}}.$$

Auch hiebei kommt die obige Bemerkung über die Beschaffenheit des Zinsfußes zu Hülfe. Die Brauchbarkeit dieser Methode wird sich leicht zeigen. Ein Kapital von 1000 Fl. ist durch zehnmalige Anlage zur Summe 12006,10712.. im Augenblick der letzten Anlage erwachsen. Zu welchem Zinsfuß war es ausgeliehen? Aus 11 ist

$$q = -\frac{3}{16} + \sqrt{\left(\frac{12006{,}107\ldots}{120 . 1000} - \frac{1}{12} + \frac{9}{4.64}\right)}$$

$$= -0{,}1875\ldots + \sqrt{0{,}051875\ldots} = 0{,}2275\ldots - 0{,}1875 = 0{,}04$$

und der Werth von q ist, wie sich zeigt, bis auf die 5te Decimalstelle richtig. Ist die Zahl der Anlagen eine größere Zahl, so wird der aus 11 sich ergebende Werth größer als der wirkliche sein. Man kann daher immer diese Formel benutzen, weil man dann durch sie erkennt, daß der Werth von $0{,}0p$ kleiner als der gefundene sein wird, und man daher durch Substitu-

tion eines niederen Werthes leicht den richtigen finden kann. Ist z. B. ein Kapital von 1000 Fl. durch 30fache Anlage bei 4 Proc. zur Summe 56084,93775.. Fl. erwachsen, so ergiebt sich für die Größe des Zinsfußes aus 11:

$$q = -\frac{3}{56} + \sqrt{\left(\frac{112169{,}8755}{29.28.10000} - \frac{6}{29.28} + \frac{9}{4.28^2}\right)}$$

$$= -0{,}053571\ldots + \sqrt{0{,}0092947\ldots} = 0{,}0428\ldots.$$

Setzt man nun $p = 4$ in 3 §. 22, so ergiebt sich, daß n der richtige Werth ist, und demnach wurde p um 0,2 zu groß gefunden.

§. 26.

Ein Kapital K ist nach n Jahren unverzinslich fällig. Es soll sogleich gezahlt werden. Wie groß ist sein jetziger Werth (R), wenn Zinses-Zinsen bei p Proc. gerechnet werden?

Der Maaßstab für die jährliche Verkleinerung oder Werthminderung eines Kapitals ist in 3 §. 10 aufgestellt, wenn $t = 1$ gesetzt wird. Man hat daher von dem Werthe des $n$ten Jahres auf den des $(n\text{-}1)$ten, von diesem auf den des $(n\text{-}2)$ten u. s. w. bis auf den gegenwärtigen Zeitpunct überzugehen und bei jedem Uebergang den angegebenen Maßstab anzuwenden. Nennt man daher die Werthe, welche das gegebene Kapital K in den verschiedenen Zeitpunkten durchläuft, $K_{n-1}, K_{n-2}, \ldots K_2, K_1, R$; so hat man folgende Ableitungsbestimmungen:

$$K_{n-1} = \frac{K}{1{,}0p}, K_{n-2} = \frac{K_{n-1}}{1{,}0p}, K_{n-3} = \frac{K_{n-2}}{1{,}0p} \ldots K_1 = \frac{K_2}{1{,}0p}, R = \frac{K_1}{1{,}0p}.$$

Hieraus entsteht nun durch Einführung

$$K_{n-2} = \frac{K_{n-1}}{1{,}0p} = \frac{K}{1{,}0p.1{,}0p} = \frac{K}{1{,}0p^2} = K\,1{,}0p^{-2}.$$

$$K_{n-3} = \frac{K_{n-2}}{1{,}0p} = \frac{K}{1{,}0p.1{,}0p^2} = \frac{K}{1{,}0p^3} = K\,1{,}0p^{-3}.$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$K_1 = \frac{K_2}{1{,}0p} = \frac{K}{1{,}0p.1{,}0p^{n-2}} = \frac{K}{1{,}0p^{n-1}} = K\,1{,}0p^{-n+1}.$$

$$R = \frac{K_1}{1{,}0p} = \frac{K}{1{,}0p.1{,}0p^{n-1}} = \frac{K}{1{,}0p^n} = K\,1{,}0p^{-n}.$$

Hiernach ist der gesuchte gegenwärtige Werth des Kapitals:

$$1)\ R = \frac{K}{1{,}0p^n} = K.1{,}0p^{-n} = \frac{K.100^n}{(100+p)^n} = N\,[lg\,K - n\,lg\,1{,}0p].$$

Diese Gleichung gilt immer für ein ganzes n. Soll bie Rabattirung noch außerdem auf einen Bruchtheil (v) des Jahres ausgedehnt werden, so

hat man bei dem relativen Zinsfuß die Gleichung 3 §. 10 auf den Werth in 1 anzuwenden, und es ist

$$2)\ R = \frac{K}{1{,}0p^n \,.\, 1{,}0vp} = \frac{K\,.\,1{,}0p^{-n}}{1{,}0vp}.$$

Bei dem conformen Zinsfuß aber gilt in diesem Falle

$$3)\ R = \frac{K}{1{,}0p^n \,.\, 1{,}0p^v} = \frac{K}{1{,}0p^{n+v}} = K\,1{,}0p^{-n-v}.$$

Soll bei diesen Bestimmungen die Verzinsung in Zeitabschnitten vor sich gehen, welche den $\frac{w}{u} = v$ten Theil eines Jahres betragen, so bleibt die Schlußweise dieselbe. Man hat für den relativen Zinsfuß, wenn das Kapital nach m solcher Zeitabschnitte fällig ist,

$$4)\ R = \frac{K}{(1{,}0p_1)^m} = K\,1{,}0p_1{}^{-m},$$

worin $p_1 = \frac{w}{u}p$ ist. Für den conformen Zinsfuß gilt

$$5)\ R = \frac{K}{1{,}0p^{vm}} = \frac{K}{1{,}0p^{\frac{wm}{u}}}.$$

In den vorstehenden Formeln kann v einen echten oder unechten Bruch bezeichnen. Kommt hiebei noch ein Bruchtheil (S) eines solchen Zeitabschnittes vor, so ist aus 4 und 5:

$$6)\ R = \frac{K}{1{,}0p_1{}^n \,.\, 1{,}0sp}\ ;\quad 7)\ R = \frac{K}{1{,}0p^{vm+s}}.$$

Geht die Verzinsung in jedem $r$ten Theile des Jahres vor sich und ist das Kapital nach n Jahren fällig, so ist sein gegenwärtiger Werth, wenn $\frac{p}{r} = p_1$ ist,

$$8)\ R = \frac{K}{1{,}0p_1{}^{rn}}\ ;\quad 9)\ R = \frac{K}{1{,}0p_1{}^{rn} \,.\, 1{,}0sp}.$$

Die Gleichung 8 kann nur bei relativem Zinsfuß gelten. Die Anwendung des conformen Zinsfußes führt auf 1. In 9 kann s nur einen aliquoten Theil von r bedeuten.

Zusatz. Vergleicht man die Gleichungen dieses §. mit den in §. 17 und 18 gefundenen, so bemerkt man, daß sie sich durch ein positives und negatives n unterscheiden. Hieraus folgt, daß bei Zinseszins-Rechnungen die Zeit auch einen negativen Werth haben kann, was bei denen mit einfachen Zinsen nicht der Fall ist. Deutet man diesen Unterschied, so folgt weiter, daß sich das positive n auf die Zukunft oder auf den zukünftigen Werth eines Kapitals bezieht und eine Zunahme oder Vermehrung andeutet; das negative n aber sich auf die Vergangenheit (im vorliegenden Falle: die Gegenwart, als der Zukunft gegenüberstehend) bezieht und eine Abnahme oder

Werthminderung andeutet. Dies stimmt ganz mit dem Sinne der hier und in §. 17 gestellten Aufgaben überein, denn die eine ist die umgekehrte von der andern. Diese Ansicht bringt Harmonie in den Calcul mit Zinses-Zinsen, welche dem mit einfachen Zinsen ganz abgeht. — Bei momentaner Rabattirung ist aus 10 §. 18:

$$10)\ lg\ nat.\ R = lg\ nat.\ K - \frac{np}{100}.$$

Bei Auffindung der bisherigen Resultate ging man von der Bemerkung aus, daß die Verzinsung in lauter gleichen Zeiträumen geschieht. Diese Beschränkung ist nicht nöthig. Soll die Verzinsung durch die ganz willkürlichen Zeiträume $t_1, t_2, t_3 \ldots t_n$ laufen, so gewinnt man für den relativen Zinsfuß aus der bei 1 angewandten Schlußweise:

$$11)\ R = \frac{K}{1{,}0t_1p.1{,}0t_2p.1{,}0t_3p....1{,}0t_n\,p} = \frac{(100+t_1p)(100+t_2p)....(100+t_n\,p)}{K.100^n}$$

für den conformen Zinsfuß ist:

$$12)\ R = \frac{K}{1{,}0p^{t_1}.1{,}0p^{t_2}.1{,}0p^{t_3}....1{,}0p^{t_n}} = \frac{K}{1{,}0p^{t_1+t_2+t_3+\ldots t_n}}$$

$$= \frac{K.100^{t_1+t_2+\ldots t_n}}{(100+p)^{t_1+t_2+..t_n}}.$$

Die Richtigkeit dieser Formeln bestätigt sich, wenn man $t_1 = t_2 = t_3 = \ldots t_n = 1$ setzt, woraus sich sofort die Gleichung 1 folgert.

§. 27.

Die Rabattirung mit Zinses-Zinsen wird, wie sich im Folgenden zeigen wird, sehr wichtig, namentlich wenn der gegenwärtige Werth mehrerer, künftig unverzinslich fälliger, Summen zu berechnen ist. Daher sollen in diesem §. die hieher gehörigen Aufgaben zusammengestellt werden.

Mit dem Ende des laufenden Jahres beginnt eine Reihe von unverzinslichen und unter sich gleichen Zahlungen (K) und dauert n Jahre. Wie groß ist der Werth sämmtlicher Zahlungen (R) zu Anfang des laufenden Jahres, oder wie groß ist ihr gegenwärtiger Werth bei p Proc. und Zinses-Zinsen?

Der gesuchte Werth ergiebt sich, wenn man bemerkt, daß das erste Kapital, da es am Ende des ersten Jahres fällig ist, auf ein Jahr, das zweite, da es am Ende des zweiten Jahres fällig ist, auf zwei Jahre u. s. w., und endlich das nach n Jahren fällige Kapital auf n Jahre rabattirt werden muß. Hiernach hat man die Gleichung 1 §. 26 wiederholt anzuwenden,

also 1, 2, 3, . . . n statt n zu setzen und dann sämmtliche Werthe zusammenzuzählen. Es entsteht sofort:

$$R = \frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}0p^2} + \frac{K}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots \frac{K}{1{,}0p^n}$$

$$= K\left(\frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}0p^2} + \frac{1}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{1}{1{,}0p^n}\right)$$

$$= K\,(1{,}0p^{-1} + 1{,}0p^{-2} + 1{,}0p^{-3} + \ldots\ldots 1{,}0p^{-n}).$$

Man kann die Summe dieser Reihe nach 2 §. 22 dadurch auf die einfachste Weise geben, daß man das letzte Glied als das erste und umgekehrt betrachtet. Dadurch wird $a = 1{,}0p^{-n}$, $u = 1{,}0p^{-1}$, $e = 1{,}0p$, und es entsteht sofort:

$$1)\ R = K.\frac{1-1{,}0p^{-n}}{1{,}0p-1} = \frac{K}{0{,}0p}\left(1-\frac{1}{1{,}0p^n}\right) = \frac{K}{0{,}0p} - \frac{K}{0{,}0p\,.\,1{,}0p^n}.$$

Hat man Tafeln, worin die Werthe von $1{,}0p^{-n}$ angegeben sind, so kann man sich am zweckmäßigsten der zweiten Form dieser Gleichung bedienen, um R zu berechnen. Zur Anwendung der Logarithmen benutzt man am besten die letzte Form. Hieraus ergiebt sich

$$2)\ R = \frac{K.100}{p} - N[\,lg\,K + 2 - lg\,p - n\,lg\,1{,}0p\,].$$

Hat man Tafeln, worin nur die Werthe von $1{,}0p^n$ gegeben sind, so kann man zu dem Ende 1 dadurch umformen, daß man mit $1{,}0p^n$ vervielfacht und theilt. Dadurch entsteht:

$$3)\ R = K.\frac{1{,}0p^n - 1}{1{,}0p^n\,.\,0{,}0p} = N[\,lg\,K + lg\,(1{,}0p^n - 1) - n\,lg\,1{,}0p - lg\,0{,}0p\,].$$

Beginnen die Zahlungen erst mit dem Ende des $h$ten Jahres und dauern n Jahre lang, so sind die Zahlungen der Reihe nach auf h, $h+1$, $h+2$, ... $h+n-1$ Jahre zu rabattiren. Werden nun die Werthe h, $h+1$ . . . in 1 §. 26 gesetzt, so entsteht sofort:

$$R = \frac{K}{1{,}0p^h} + \frac{K}{1{,}0p^{h+1}} + \frac{K}{1{,}0p^{h+2}} + \ldots \frac{K}{1{,}0p^{h+n-1}}$$

$$= \frac{K}{1{,}0p^{h-1}}\left(\frac{1}{1{,}0p^1} + \frac{1}{1{,}0p^2} + \frac{1}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{1}{1{,}0p^n}\right)$$

$$4)\ R = \frac{K}{1{,}0p^{h-1}}\,\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} = \frac{K.(1{,}0p^n-1)}{1{,}0p^{n+n-1}\,.\,0{,}0p}$$

Diese Gleichung ist allgemeiner, als 1 und 3, denn man kann jene aus ihr ableiten, wenn man $h = 1$ setzt. Werden die jährlichen Zahlungen so gemacht, daß sie nicht auf den Schluß eines Jahres, sondern auf das Ende eines Zeitraums fallen, welcher einen Bruchtheil des Jahres $\frac{w}{u} = v$ be-

trägt, so hat man zu Ermittelung des gesuchten Werthes die Gleichung 2 oder 3 §. 26 wiederholt anzuwenden. Dadurch entsteht:

$$R = \frac{K}{1{,}0p \,.\, 1{,}0vp} + \frac{K}{1{,}0p^2 \,.\, 1{,}0vp} + \frac{K}{1{,}0p^3 \,.\, 1{,}0vp} + \cdots \frac{K}{1{,}0p^n \,.\, 1{,}0vp.}$$

$$5)\quad R = \frac{K}{1{,}0vp} \cdot \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} = \frac{K(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0vp \,.\, 1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p}.$$

Diese Gleichung gilt für den relativen Zinsfuß. Für den conformen ergiebt sich aus 3 §. 26 durch ganz gleiche Schlußweise:

$$6)\quad R = \frac{K}{1{,}0p^v} \frac{1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} + \frac{K(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{n+v} \,.\, 0{,}0p}.$$

Die beiden Gleichungen lassen sich leicht verallgemeinern und auf die Fälle ausdehnen, wenn die Zahlungen erst nach $h + v$ Jahren beginnen, so daß h eine ganze Zahl und v ein echter Bruch ist. Für den relativen und conformen Zinsfuß erhält man sofort:

$$7)\quad R = \frac{K}{1{,}0vp \,.\, 1{,}0p^{h-1}} \cdot \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} = \frac{K(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0vp \,.\, 1{,}0p^{h+n-1} \,.\, 0{,}0p}$$

$$8)\quad R = \frac{K}{1{,}0p^{h+v-1}} \cdot \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} = \frac{K(1{,}0p^n - 1)}{1{,}0p^{h+n+v-1} \,.\, 0{,}0p}.$$

Werden die Zahlungen in jedem $\frac{v}{u} = v$ten Theile des Jahres gemacht und geschieht die Verzinsung in den nämlichen Zeitabschnitten, so hat man bei dem relativen Zinsfuße $\frac{v}{u}p = p_1$ zu setzen, und es ist der gegenwärtige Werth, wenn m Zahlungen gemacht werden und die Zahlungen am Ende des ersten Zeitabschnittes beginnen,

$$R = \frac{K}{1{,}0p_1} + \frac{K}{1{,}0p_1^2} + \frac{K}{1{,}0p_1^3} + \cdots \frac{K}{1{,}0p_1^m}.$$

$$9)\quad R = \frac{R(1 - 1{,}0p_1^{-m})}{0{,}0p_1} = \frac{K \,.\, (1{,}0p_1^m - 1)}{1{,}0p_1^m \,.\, 0{,}0p_1}.$$

Beginnen die Zahlungen erst nach der Zeit $h + s$, so daß h eine ganze Zahl und s einen Bruchtheil eines Abschnittes bezeichnet, so ist:

$$10)\quad R = \frac{K(1 - 1{,}0p^{-m})}{1{,}0sp \,.\, 1{,}0p_1^{h-1} \,.\, 0{,}0p_1} = \frac{K(1{,}0p_1^m - 1)}{1{,}0sp \,.\, 1{,}0p_1^{h+m-1} \,.\, 0{,}0p_1}.$$

Wird der conforme Zinsfuß zu Grunde gelegt, so ist:

$$R = \frac{K}{1{,}0p^v} + \frac{K}{1{,}0p^{2v}} + \frac{K}{1{,}0p^{3v}} \cdots \frac{K}{1{,}0p^{mv}}.$$

$$11)\quad R = \frac{K(1 - 1{,}0p^{-mv})}{1{,}0p^v - 1} = \frac{K(1{,}0p^{mv} - 1)}{1{,}0p^{mv}\ (1{,}0p^v - 1)}.$$

Beginnen die Zahlungen am Ende des Zeitabschnitts $h + s$, so ist:

$$12)\ R = \frac{K(1-1{,}0p^{-mv})}{1{,}0p^{hv+s-1}(1{,}0p^{v}-1)} = \frac{K(1{,}0p^{mv}-1)}{1{,}0p^{mv+hv+s-1}(1{,}0p^{v}-1)}.$$

In den Gleichungen 9 — 12 kann $\frac{w}{u} = v$ ein echter oder unechter Bruch sein. Hiebei wird vorausgesetzt, daß die Verzinsung in den nämlichen Zeitabschnitten geschieht, als die Zahlungen gemacht werden. Nun können die Zahlungen auch in jedem $r$ten Theil des Jahres gemacht werden. Werden sie dann n Jahre hindurch fortgesetzt, so müssen auch rn Zahlungen gemacht werden. Geschieht dann die Verzinsung auch in jedem $r$ten Theile des Jahres, und wird der relative Zinsfuß zu Grunde gelegt und $\frac{p}{r} = p_1$ gesetzt, so ist der gegenwärtige Werth aller rn Zahlungen:

$$R = \frac{K}{1{,}0p_1} + \frac{K}{1{,}0p_1^{2}} + \frac{K}{1{,}0p_1^{3}} + \ldots\ldots \frac{K}{1{,}0p_1^{rn}}.$$

$$13)\ R = \frac{K(1-1{,}0p_1^{-rn})}{0{,}0p_1} = \frac{K(1{,}0p_1^{rn}-1)}{1{,}0p_1^{rn}\,0{,}0p_1}.$$

Beginnen die Zahlungen nach $m+s$ solcher Zeitabschnitte, so daß s einen aliquoten Theil eines Abschnitts bedeutet, so ist der gegenwärtige Werth:

$$14)\ R = \frac{K(1-1{,}0p_1^{-rn})}{1{,}0sp\,.\,1{,}0p_1^{m-1}\,.\,0{,}0p_1} = \frac{K(1{,}0p_1^{rn}-1)}{1{,}0sp\,.\,1{,}0p_1^{rn+m-1}\,.\,0{,}0p_1}.$$

Wird m durch Jahre (h) ausgedrückt, so muß $m = hr$ gesetzt werden. Geschehen die Zahlungen wie vorhin, wird aber der conforme Zinsfuß zu Grunde gelegt, so ergiebt sich für den gegenwärtigen Werth des in 13 behandelten Falles:

$$R = \frac{K}{1{,}0p^{\frac{1}{r}}} + \frac{K}{1{,}0p^{\frac{2}{r}}} + \frac{K}{1{,}0p^{\frac{3}{r}}} + \ldots \frac{K}{1{,}0p^{\frac{rn}{r}}}.$$

$$15)\ R = \frac{K(1-1{,}0p^{-n})}{1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1} = \frac{K(1{,}0p^{n}-1)}{1{,}0p^{n}(1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1)}.$$

Beginnen die Zahlungen nach $m+s$ solcher Zeitabschnitte, so ist:

$$16)\ R = \frac{K(1-1{,}0p^{-n})}{1{,}0p^{\frac{m-1}{r}+s}(1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1)} = \frac{K(1{,}0p^{n}-1)}{1{,}0p^{n+\frac{m-1}{r}+s}(1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1)}.$$

Werden endlich die Zahlungen jährlich gemacht und geht die Verzinsung in jedem $r$ten Theile des Jahres nach dem relativen Zinsfuß vor sich, so ergiebt sich nach §. 26 folgende Darstellung, wenn die erste Zahlung am Ende des ersten Jahres geschieht und $\frac{p}{r} = p_1$ gesetzt wird,

$$R = \frac{K}{1{,}0p_1{}^r} + \frac{K}{1{,}0p_1{}^{2r}} + \frac{K}{1{,}0p_1{}^{3r}} + \cdots \frac{K}{1{,}0p_1{}^{nr}}.$$

$$17)\quad R = \frac{K(1-1{,}0p_1{}^{-rn})}{1{,}0p_1{}^r - 1} = \frac{K(1{,}0p_1{}^{rn}-1)}{1{,}0p_1{}^{rn}(1{,}0p_1{}^r - 1)}.$$

Beginnen die Zahlungen am Ende des *h*ten Jahres, so ist unter den eben angegebenen Bedingungen der gegenwärtige Werth:

$$18)\quad R = \frac{K(1-1{,}0p_1{}^{-rn})}{1{,}0p_1{}^{hr-r}(1{,}0p_1{}^r - 1)} = \frac{K(1{,}0p_1{}^{rn}-1)}{1{,}0p_1{}^{hr-r+nr}(1{,}0p_1{}^r - 1)}.$$

Kommt hiebei noch ein aliquoter Theil (s) eines solchen Zeitabschnittes in Betrachtung, so ist aus 18:

$$19)\quad R = \frac{K(1-1{,}0p_1{}^{-rn})}{1{,}0sp.\,1{,}0p_1{}^{hr-r}(1{,}0p_1{}^r - 1)} = \frac{K(1{,}0p_1{}^{rn}-1)}{1{,}0sp.1{,}0p_1{}^{hr+nr-r}(1{,}0p_1{}^r - 1)}$$

Werden diese Bemerkungen auf den conformen Zinsfuß angewendet, so führen sie zu keinen neuen Resultaten, sondern auf die in 3 und 4 entwickelten Gleichungen zurück.

Vergleicht man die in diesem §. gefundenen Gleichungen mit denen in §. 22 gefundenen, so zeigt sich leicht der Zusammenhang zwischen beiden. Man kann nämlich von jenen auf diese übergehen, wenn man die Exponenten negativ nimmt, und den aus ihnen gefundenen Werth gleichfalls negativ. Letzteres aus dem Grunde, weil hier die Glieder der erzeugenden geometrischen Reihe in umgekehrter Ordnung genommen wurden. In den Gleichungen 4, 7, 8 u. s. w. erscheint der Exponent von $1{,}0p$ im Nenner um die Einheit kleiner. Dies rührt davon her, weil in diesen Fällen die Zahl der Zeitabschnitte um einen verkürzt wurde.

Anwendungen dieser Gleichungen werden sich später häufig ergeben. Hier sollen der Vergleichung wegen einige besondere Fälle stehen. Ein Kapital von 1000 Fl. wird 10 Mal in Jahresfristen gezahlt. Die Zahlungen beginnen am Ende des ersten Jahres. Wie groß ist ihr gegenwärtiger Werth, wenn ein Rabatt von 4 Proc. und jährliche Verzinsung zugestanden ist? Aus 3 ergiebt sich, wenn $n = 10$, $p = 4$, $K = 1000$ gesetzt wird:

$$R = 1000.\frac{1{,}04^{10}-1}{1{,}04^{10}.0{,}04} = \frac{48024{,}428..}{4.1{,}4802442..}\ 8110{,}897..\ \text{Fl.}$$

Geschehen die Zahlungen halbjährlich und werden die Zahlungen binnen 5 Jahren gemacht, so ist bei dem relativen Zinsfuß aus 13, wenn $r = 2$, $n = 5$, $p_1 = \frac{1}{2}4 = 2$ gesetzt wird,

$$R = 1000\,\frac{(1{,}02^{10}-1)}{1{,}02^{10}.0{,}02} = \frac{21899{,}442..}{2.1{,}2189944..} = 8982{,}586\ldots\ \text{Fl.}$$

Bei dem conformen Zinsfuß ist aus 15:

$$R = 1000 . \frac{1{,}04^5 - 1}{1{,}04^5 (\sqrt{1{,}04} - 1)} = \frac{216{,}6529}{1{,}2166529.. + 0{,}019803..}$$

$$= 8991{,}81 .. \text{ Fl.}$$

Der conforme Zinsfuß muß ein größeres Resultat als der relative geben, weil er kleiner als jener ist.

In allen hier aufgeführten Fällen wurde angenommen, daß die Zahlungen einander gleich sind und in gleichen Zeitabschnitten nach einander geschehen. Dies trifft nicht immer ein. Nimmt man nun an, daß die zu machenden Zahlungen ungleich, die Zeiträume aber, worin sie gezahlt werden, gleich, und der Einfachheit wegen ganze Jahre sind, und nennt erstere der Reihe nach $K_1, K_2, K_3, \ldots K_n$, so hat man, wenn es sich darum handelt, den gegenwärtigen Werth aller dieser Zahlungen zu bestimmen, jede einzelne Summe nach der Gleichung 1 §. 26 zu behandeln. Hiedurch erhält man folgende Darstellung:

$$20) \quad R = \frac{K_1}{1{,}0p} + \frac{K_2}{1{,}0p^2} + \frac{K_3}{1{,}0p^3} + \frac{K_4}{1{,}0p^4} + \ldots \frac{K_n}{1{,}0p^n}.$$

Soll nun der Werth für R berechnet werden, so wird, wie man leicht sieht, viele Arbeit nöthig, wenn man alle Glieder in der vorstehenden Darstellung berechnet und die hieraus erhaltenen Resultate zusammenzählt. Man kann nun in dem vorliegenden Falle viel leichter zum Ziele gelangen, wenn man eine zurücklaufende Rechnungsweise wählt und bei Ausführung der Rechnung mit dem letzten Gliede in der Reihe 20 beginnt, von diesem auf das vorhergehende, von diesem auf das ihm vorhergehende übergeht, und so fortfährt, bis man auf den gegenwärtigen Zeitpunct gelangt. Man verfahre daher so: Man theile K_n durch $1{,}0p$ und zähle das erhaltene Resultat zu K_{n-1}, theile die erhaltene Summe durch $1{,}0p$ und zähle das erhaltene Resultat zu K_{n-2}, theile die so erhaltene Summe gleichfalls durch $1{,}0p$ und fahre so bis zu Ende fort. Diese zurücklaufende Rechnungsweise läßt sich auf folgende Art in Zeichen andeuten:

$$21) \quad R = \Big(\Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\Big(\frac{K_n}{1{,}0p} + K_{n-1}\Big)\frac{1}{1{,}0p} + K_{n-2}\Big)\frac{1}{1{,}0p} + K_{n-3}\Big)\frac{1}{1{,}0p} + \ldots.$$

$$\ldots\ldots + K_3\Big)\frac{1}{1{,}0p} + K_2\Big)\frac{1}{1{,}0p} + K_1\Big)\frac{1}{1{,}0p}.$$

Aendert sich die Dauer der Zeitabschnitte, so bleibt dennoch die Schlußweise ungeändert, wenn nur die Zeitabschnitte einander gleich bleiben. Die Aenderungen, welche sich hiebei an Einführung des relativen und conformen Zinsfußes knüpfen, ergeben sich leicht, und werden deswegen nicht besonders hervorgehoben.

Sind aber weder die zu zahlenden Summen, noch die Zeitabschnitte, in denen sie fällig sind, einander gleich, so hat man zwischen dem relativen

und conformen Zinsfuß zu unterscheiden. Sind nun die Summen K_1, K_2, K_3 . . . K_n in den ganz willkürlichen Zeitabschnitten t_1, t_2, t_3, . . . t_n fällig, und zwar so, daß K_1 nach dem Zeitraum t_1, K_2 nach dem Zeitraum t_1+t_2, K_3 nach dem Zeitraume $t_1+t_2+t_3$ u. s. w. fällig ist, und wird verlangt, daß die Verzinsung in den nämlichen Zeiträumen vor sich geht, als die Zahlungen gemacht werden, so ist der gegenwärtige Werth aller Zahlungen, wenn der relative Zinsfuß zu Grunde gelegt wird, in Rücksicht auf 11 §. 26:

$$22)\quad R = \frac{K_1}{1{,}0t_1p} + \frac{K_2}{1{,}0t_1p\ 1{,}0t_2p} + \cdots \frac{K}{1{,}0t_1p\ 1{,}0t_2p \ldots . 1{,}0t_n\ p}.$$

Für den conformen Zinsfuß ist unter den nämlichen Bedingungen und in Rücksicht auf 12 §. 26:

$$23)\quad R = \frac{K_1}{1{,}0p^{t_1}} + \frac{K_2}{1{,}0p^{t_1+t_2}} + \frac{K_3}{1{,}0p^{t_1+t_2+t_3}} \cdots \frac{K}{1{,}0p^{t_1+t_2+t_3+\ldots t_n}}$$

Auch bei diesen Darstellungen wird die oben angeführte zurücklaufende Rechnungsmethode gute Dienste leisten. Wendet man sie an, so gewinnt man folgende Darstellungen:

$$24)\quad R = \Big(\Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\Big(\frac{K_n \,.\, 100}{100+t_np} + K_{n-1}\Big)\frac{100}{100+t_{n-1}p} + K_{n-2}\Big)\frac{100}{100+t_{n-2}p}$$

$$\ldots\ldots + K_3\Big)\frac{100}{100+t_3p} + K_2\Big)\frac{100}{100+t_2p} + K_1\Big)\frac{100}{100+t_1p}.$$

$$25)\quad R = \Big(\Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\Big(\frac{K_n}{1{,}0p^{t_1}} + K_{n-1}\Big)\frac{1}{1{,}0p^{t_{n-1}}} + K_{n-2}\Big)\frac{1}{1{,}0p^{t_{n-2}}}$$

$$\ldots\ldots + K_3\Big)\frac{1}{1{,}0p^{t_3}} + K_2\Big)\frac{1}{1{,}0p^{t_2}} + K_1\Big)\frac{1}{1{,}0p^{t_1}}.$$

Das in diesem §. behandelte Problem fällt mit folgendem zusammen. Eine Reihe von beliebigen Kapitalzahlungen soll in irgend beliebigen Zeiträumen gemacht werden. Wie groß ist die Schuld, welche für sie in dem gegenwärtigen Zeitpuncte aufgenommen und durch sie getilgt werden kann?

Drittes Kapitel.

Verhältniß zwischen der Rechnung mit einfachen Zinsen und der mit Zinses-Zinsen und Anwendungen.

§. 28.

In dem ersten Kapitel wurde die Art und Weise gezeigt, wie mit einfachen Zinsen gerechnet werden müsse, im zweiten die, welche bei der Rechnung mit Zinses-Zinsen anzuwenden ist. In beiden Kapiteln wurden im Wesentlichen die nämlichen Fragen untersucht. Bei der Vergleichung der hiebei gefundenen Resultate zeigt sich ein nicht verkennbarer Unterschied, und das nämliche Problem, nach der einen oder der andern Methode gelöst, führt zu ganz verschiedenen Werthen. Es ist nun in der Natur der Sache begründet, daß die Auflösung eines und desselben Problems, auch wenn sie auf verschiedene Weise gewonnen wird, auf ein und dasselbe Resultat führen müsse. Geschieht dies nicht, so liegt die weitere Frage ganz nahe, welche von beiden Methoden verbürgt das richtige Resultat, und ist also die richtige? da beide zugleich nicht wahr sein können. So nahe nun diese Frage liegt, so wurde sie doch bisher in keiner der hierher gehörigen Schriften beachtet. Manche entwickelten nur die Rechnungsmethode mit einfachen Zinsen, andere nur die mit Zinses-Zinsen, und wieder andere beide zusammen, ohne jedoch zu entscheiden, welches die richtige Methode sei. Auf Untersuchung der Frage selbst ging man nicht ein. Daher kommt es, daß man noch nicht darüber einig ist, nach welcher Methode die hieher gehörigen Rechnungen zu behandeln sind, wie man sich aus dem Spätern überzeugen wird §. 44 u. ff. Manche vertheidigten die eine, andere die andere Methode, und wieder andere erklärten beide Methoden für zulässig, indem sie es der gegenseitigen Uebereinkunft überlassen zu müssen glaubten, welche Rechnungsweise anzuwenden sei. Bei allem Hin- und Herreden über die Zulässigkeit der einen oder der andern Methode berief man sich immer nur auf äußere Gründe, so daß auf diesem Wege keine Entscheidung abzusehen ist. Um die Frage zur Entscheidung zu bringen, hat man innere Gründe aufzusuchen. Diese giebt der Calcul an die Hand, an den wir uns sofort wenden wollen. Es wird zu dem Ende nöthig, beide Methoden mit einander zu vergleichen,

und hiebei allgemein anerkannte Sätze als maaßgebend festzuhalten. Wir wenden uns daher zur Untersuchung des folgenden Falles:

Ein gegenwärtig aufzunehmendes Kapital (K) soll von dem Aufnehmer (Schuldner) in n Jahren so zurückgezahlt werden, daß am Ende des ersten Jahres die Summe A_1, am Ende des zweiten die Summe A_2, am Ende des dritten die Summe A_3 u. s. w. getilgt und außerdem noch die auf der jeweils noch vorhandenen Kapitalschuld ruhenden Zinsen Z_1, Z_2, Z_3, ... Z_n bei dem Zinsfuße p mit bezahlt werden. In welchem Verhältnisse steht der Werth sämmtlicher Zahlungen, welche der Schuldner leistet, zu der Summe (K), welche der Gläubiger gegenwärtig giebt, wenn Zinses-Zinsen oder einfache Zinsen gerechnet werden?

Bei Beantwortung der vorliegenden Frage gehen wir von folgenden zwei allgemein anerkannten Sätzen aus:

1) Sollen die gegenseitigen Leistungen des Schuldners und Gläubigers zu Recht bestehen, so müssen sie sich ausgleichen, oder gleich groß sein, wenn sie auf den nämlichen Zeitpunkt zurückgebracht werden. Gleichen sie sich nicht aus, und sind die des einen größer als die des andern, so können sie nicht zu Recht bestehen, und es ist der Schuldner oder Gläubiger entweder bevorzugt oder beeinträchtigt

2) Die Forderung des Gläubigers ist durch die in der Aufgabe aufgeführten Zahlungen befriedigt, denn er erhält nicht nur das geliehene Kapital vollständig zurück, sondern auch die auf der jeweils noch vorhandenen Schuld haftenden Zinsen.

Nachdem nun die Grundzüge für die weitere Schlußweise festgestellt sind, ergeben sich auch aus der Aufgabe und den in 1 und 2 aufgestellten Sätzen leicht folgende Bestimmungen für den Calcul.

Die Summe, welche der Schuldner jährlich abzutragen hat, besteht einerseits aus einem Kapitalabtrag, andererseits aus dem Jahreszins derjenigen Summe, welche nach Abzug aller früher geleisteten Abtragssummen noch vorhanden ist. Nennt man die hiernach fälligen Summen der verschiedenen Jahre L_1, L_2, L_3 .... L_n, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

$$3)\quad \begin{aligned} L_1 &= A_1 + Z_1 \\ L_2 &= A_2 + Z_2 \\ L_3 &= A_3 + Z_3 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \\ L_n &= A_n + Z_n. \end{aligned}$$

Nennt man die Größe der Summen, welche der Reihe nach in den verschiedenen Jahren an der Schuld abgetragen werden, M_1, M_2, M_3.... M_n, so ist:

$$4)\quad \begin{aligned} M_1 &= A_1 \\ M_2 &= A_1 + A_2 \\ M_3 &= A_1 + A_2 + A_3 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ M_n &= A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n = K. \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, daß die Summe sämmtlicher Kapitaltilgungen der aufgenommenen Schuld gleichkommt, wie dies auch sein muß. Aus dieser Darstellung ergiebt sich nun auch die Größe der noch in den verschiedenen Jahren rückständigen Kapitalschuld. Bezeichnet man den Stand der Schuld der Reihe nach durch R_1, R_2, $R_3 \ldots R_n$, so ist

$$5)\quad \begin{aligned} R_1 &= K - M_1 = K - A_1 && = A_2 + A_3 + A_n \ldots + A_n \\ R_2 &= K - M_2 = K - A_1 - A_2 && = A_3 + A_n + A_5 \ldots + A^n \\ R_3 &= K - M_3 = K - A_1 - A_2 - A_3 && = A_4 + A_5 + A_6 \ldots A_n \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ R_{n-2} &= K - M_{n-2} = K - A_1 - A_2 - \ldots A_{n-2} && = A_{n-1} + A_n \\ R_{n-1} &= K - M_{n-1} = K - A_1 - A_2 - \ldots A_{n-1} && = A_n \\ R_n &= K - M_n = K - A_1 - A_3 - \ldots A_n && = 0. \end{aligned}$$

Die Werthe von R_1, R_2, $R_3 \ldots R_{n-1}$ geben zugleich den Stand der Schuld im Laufe des 2ten, 3ten, ... $(n+1)$ten Jahres an. Die jährlichen Leistungen des Schuldners bestehen nun nach 3 aus dem jeweiligen Kapital-Abtrag und den Zinsen des rückständigen Kapitals. Hiernach und nach §. 2 ist:

$$6)\quad \begin{aligned} L_1 &= A_1 + K.\,0{,}0\,p \\ L_2 &= A_2 + (K - A_1)\,0{,}0\,p \\ L_3 &= A_3 + (K - A_1 - A_2)\,0{,}0\,p \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ L_n &= A_n + (K - A_1 - A_2 - \ldots - A_{n-1})\,0{,}0\,p. \end{aligned}$$

Nachdem nun in dieser Darstellung der Reihe nach die Größe der jährlichen Leistungen des Schuldners angegeben ist, so hat man nach den oben gemachten Bemerkungen an ihnen die zwei Arten des Rabattirens, nämlich die mit Zinses-Zinsen und die mit einfachen Zinsen, nach §. 26 und §. 10 anzuwenden und zur Entscheidung der vorliegenden Frage die hieraus sich ergebenden Werthe untereinander zu vergleichen. Rabattirt man nun mit Zinses-Zinsen, und nennt den hieraus hervorgehenden Werth N, so erhält man folgende Darstellung:

$$7)\quad \begin{aligned} N &= \frac{L_1}{1{,}0\,p} = \frac{A_1}{1{,}0\,p} + \frac{K.\,0{,}0\,p}{1{,}0\,p} \\ &+ \frac{L_2}{1{,}0p^2} = + \frac{A_2}{1{,}0p^2} + \frac{(K - A_1).\,0{,}0\,p}{1{,}0\;p^2} \end{aligned}$$

$$+\frac{L_3}{1{,}0p^3} = +\frac{A_3}{1{,}0\ p^3} + \frac{(K-A_1-A_2).\,0{,}0\ p}{1{,}0\ p^3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$+\frac{L_n}{1{,}0\,p^n} = +\frac{A_n.}{1{,}0\ p^n} + \frac{(K-A_1-A_2--\ldots-A_{n-1})\,0{,}0\,p}{1{,}0\ p^n}.$$

Rabattirt man mit einfachen Zinsen nach §. 10, und nennt den hieraus hervorgehenden Werth N_1, so erhält man folgende:

$$8)\ N_1 = \frac{L_1\,100}{100+p} = \frac{A_1.100}{100+p} + \frac{K.100}{100+p}\ .\ 0{,}0\ p$$

$$+\frac{L_2.100}{100+2p} = +\frac{A_2\,100}{100+2p} + \frac{(K-A_1)\,100}{100+2\,p}\ .\ 0{,}0\ p$$

$$+\frac{L_3\ 100}{100+3p} = +\frac{A_3\ 100}{100+3\,p} + \frac{(K-A_1-A_2)\,100}{100+3\,p}\ .\ 0{,}0\,p$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$+\frac{L_n}{100+np} = +\frac{A_n.100}{100+np} + \frac{(K-A_1-A_2-\ldots A_{n-1})100}{100+n\,p}\ .0{,}0\,p.$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß N_1 größer als N und zwar auf folgende Weise:

$$9)\quad \frac{1}{1{,}0\ p^2} = 1{,}0\,p^{-2} = \left(1+\frac{p}{100}\right)^{-2} = \left(1+\frac{2\,p}{100}+\frac{p^2}{100}\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{1{,}0p^3} = 1{,}0p^{-3} = \left(1+\frac{p}{100}\right)^{-3} = \left(1+\frac{3p}{100}+\frac{3p^2}{100}+\frac{p^3}{100}\right)^{-1}$$

$$\frac{1}{1{,}0\,p^4} = 1{,}0p^{-4} = \left(1+\frac{p}{100}\right)^{-4} = \left(1+\frac{4\,p}{100}+\frac{6p^2}{100}+\frac{4p^3}{100}+\frac{p^4}{100}\right)^{-1}$$

u. s. w. Ferner ist:

$$10)\quad \frac{100}{100+2p}\ . = \left(\frac{100+2p}{100}\right)^{-1} = \left(1+\frac{2p}{100}\right)^{-1}$$

$$\frac{100}{100+3p} = \left(\frac{100+3\,p}{100}\right)^{-1} = \left(1+\frac{3\,p}{100}\right)^{-1}$$

$$\frac{100}{100+4p} = \left(\frac{100+4\,p}{100}\right)^{-1} = \left(1+\frac{4\,p}{100}\right)^{-1}$$

u. s. w. Aus der Vergleichung der in 9 und 10 gefundenen Werthe zeigt sich nun, daß $\frac{1}{1{,}0\ p^2}$ ein größerer Divisor als $\frac{100}{100+2p'}$ $\frac{1}{1{,}0\ p^3}$ ein größerer als $\frac{100}{100+3p}$ u. s. w. ist. Hieraus folgt nun, daß die Werthe in der Darstellung 7 vom zweiten Gliede an kleiner sind, als die in 8, weil

sie mit einem größern Divisor in Verbindung treten, und daß daher der Werth von 8, oder N_1, größer sein müsse als der von 7, oder N. Hiernach erzeugt unter gleichen Verhältnissen die Rabattirung mit einfachen Zinsen, sobald sie das zweite Jahr überschreitet, größere Werthe, als die mit Zinses-Zinsen. Da sich nun gezeigt hat, daß die Werthe von N und N_1 verschieden sind, so entsteht nun die weitere Frage: welcher von beiden Werthen ist der richtige? Um dies zu beantworten, hat man die zweite Darstellung in 7 aufzulösen und das hiedurch erhaltene Resultat nach den Potenzen von $1{,}0\,p$ zu ordnen. Hierdurch geht 7 über in

$$11)\ N = \frac{A_1}{1{,}0\,p} + \frac{A_2}{1{,}0\,p^2} + \frac{A_3}{1{,}0\,p^3} + \ldots\ldots \frac{A_n}{1{,}0\,p^n}$$
$$+ K\left(\frac{1}{1{,}0\,p} + \frac{1}{1{,}0\,p^2} + \frac{1}{1{,}0\,p^3} + \ldots \frac{1}{1{,}0\,p^n}\right) . 0{,}0\,p$$
$$- A_1\left(\frac{1}{1{,}0\,p^2} + \frac{1}{1{,}0\,p^3} + \frac{1}{1{,}0\,p^4} \ldots\ldots \frac{1}{1{,}0\,p^n}\right) 0{,}0\,p$$
$$- A_2\left(\frac{1}{1{,}0\,p^3} + \frac{1}{1{,}0\,p^4} + \frac{1}{1{,}0\,p^5} + \ldots\ldots \frac{1}{1{,}0\,p^n}\right) 0{,}0\,p$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$- A_{n-2}\left(\frac{1}{1{,}0\,p_{n-1}} + \frac{1}{1{,}0\,p^n}\right) . 0{,}0\,p$$
$$- A_{n-1}\,\frac{0{,}0\,p}{1{,}0\,p^n} .$$

Werden nun sämmtliche Reihen dieser Darstellung nach 2 §. 22. und der in §. 27. angegebenen Methode behandelt, so entstehen Summen-Ausdrücke, deren Nenner $0{,}0\,p$ ist. Hiedurch fällt aus allen Reihen in 11 von der zweiten an der Factor $0{,}0\,p$ weg und man erhält:

$$12)\ N = \frac{A_1}{1{,}0\,p} + \frac{A_2}{1{,}0p^2} + \frac{A_3}{1{,}0p^4} + \ldots\ldots \frac{A_n}{1{,}0p^n} + K\left(1 - \frac{1}{1{,}0\,p^n}\right)$$
$$- A_1\left(\frac{1}{1{,}0p} - \frac{1}{1{,}0p^n}\right) - A_2\left(\frac{1}{1{,}0p^2} - \frac{1}{1{,}0p^n}\right) - A_3\left(\frac{1}{1{,}0p^3} - \frac{1}{1{,}0p^n}\right) \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - A_{n-2}\left(\frac{1}{1{,}0p^{n-2}} - \frac{1}{1{,}0p^n}\right) - A_{n-1}\left(\frac{1}{1{,}0p^{n-1}} - \frac{1}{1{,}0\,p^n}\right)$$

Werden nun auch in dieser Darstellung die Klammern aufgelöst, so fallen diejenigen Glieder, die gleich und mit entgegengesetzten Zeichen versehen sind, aus dem Calcul, und es entsteht

$$13)\ N = K - \frac{K .}{1{,}0p^n} + \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n}{1{,}0\,p^n} .$$

Da nun $A_1 + A_2 + A_3 + .. A_n = K$ ist, so wird

$$14) \quad N = K.$$

Die eben gefundene Gleichung stimmt mit den in 1 und 2 aufgestellten Sätzen überein, denn sie sagt, daß unter den vorliegenden Bedingungen die sämmtlichen Leistungen des Schuldners gerade so groß sind, als das Darlehen des Gläubigers, wenn die Rabattirung mit Zinses-Zinsen gemacht wird. Da nun die Rabattirung mit einfachen Zinsen zu einer Summe führt, welche der eben genannten nicht gleich ist, sondern größer als sie, so kann die hierauf gegründete Rechnung nicht die richtige sein. Dies führt daher zu folgendem Schlusse:

15) Soll der Werth eines gegenwärtig aufzunehmenden Kapitals mit einer Reihe von Zahlungen verglichen werden, die mit dem Ende des ersten Jahres beginnen, n Jahre dauern und deren Größe auf die oben angegebene Weise bestimmt ist, so muß bei der Zurückführung des Werthes dieser Zahlungen auf die Gegenwart die Rabattirung mit Zinses-Zinsen geschehen. Die Rechnung mit einfachen Zinsen ist nicht zulässig, denn sie giebt ein zu großes Resultat und der Gläubiger würde bei ihrer Anwendung zu Schaden kommen.

Geht man nun von der umgekehrten Ansicht aus und betrachtet die Summen L_1, L_2, $L_3 \ldots L_n$ als gegeben und ohne Rücksicht auf die Elemente, woraus sie zusammengesetzt sind, so rechtfertigt sich hiedurch folgender Satz.

16) Soll der Werth ganz willkührlicher Kapitalzahlungen L_1, L_2, L_3 $\ldots\ldots L_n$, welche durch n Jahre gemacht werden und mit dem Ende des ersten Jahres beginnen, auf den Anfang dieses Jahres zurückgebracht werden, so muß die Rechnung mit Zinses-Zinsen angewendet werden, wenn das Resultat richtig und mit den unter 1 und 2 ausgesprochenen Sätzen übereinstimmen soll. Die Rechnung mit einfachen Zinsen würde ein zu großes Resultat geben und ist deswegen nicht zulässig. Es gilt also bei Zurückführung des Werthes der Zahlungen L_1, L_2, $\ldots$ L_n auf die Gegenwart folgende Gleichung:

$$17) \quad K = \frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2} + \frac{L_3}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{L_n}{1{,}0p_n}.$$

Werden die Zahlungen L_1, L_2, $L_3 \ldots$ in andern, aber unter sich gleichen Zeitabschnitten gemacht und beginnen sie mit dem Ende des ersten Zeitabschnittes, so läßt sich leicht zeigen, daß die eben gefundenen Sätze noch gelten. Werden die Zahlungen in jedem ersten Theile des Jahres gemacht, so ergiebt sich in Uebereinstimmung mit 7 für den relativen Zinsfuß, also für $p, = \frac{p}{r}$.

$$N = \frac{L_1}{1{,}0 p_1} = \frac{A_1}{1{,}0 p_1} + \frac{K.0{,}0\ p_1}{1{,}0\ p_1}$$

$$+ \frac{L_2}{1{,}0\ p_1^2} = + \frac{A_2}{1{,}0\ p_1^2} + \frac{(K - A_1)\,0{,}0\ p_1}{1{,}0\ p_1^2}$$

$$+ \frac{L_3}{1{,}0\ p_1^3} = + \frac{A_3}{1{,}0\ p_1^3} + \frac{(K - A_1 - A_2)\,0{,}0\ p_1}{1{,}0\ p_1^3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{L_{rn}}{1{,}0\ p_1^{rn}} = \frac{A_{rn}}{1{,}0\ p_1^{rn}} + \frac{(K - A_1 - A_2 \ldots . - A_{rn-1})\ 0{,}0\ p_1}{1{,}0\ p_1^{rn}}.$$

Legt man den conformen Zinsfuß zu Grund, so bestimmen sich die Zinsen nach dem Zinsfuß $1{,}0\,p^{\frac{1}{r}} - 1$, und es ergiebt sich folgende Darstellung:

$$N = \frac{L_1}{1{,}0\ p^{\frac{1}{r}}} = \frac{A_1}{1{,}0\ p^{\frac{1}{r}}} + \frac{K.(1{,}0\,p^{\frac{1}{r}} - 1)}{1{,}0\ p^{\frac{1}{r}}}$$

$$\frac{L_2}{1{,}0\ p^{\frac{2}{r}}} = \frac{A_2}{1{,}0\ p^{\frac{2}{r}}} + \frac{(K - A_1)(1{,}0\,p^{\frac{1}{r}} - 1)}{1{,}0\,p^{\frac{2}{r}}}$$

$$\frac{L_3}{1{,}0\ p^{\frac{3}{r}}} = \frac{A_3}{1{,}0\ p^{\frac{3}{r}}} + \frac{(K - A_1 - A_2)\ (1{,}0\ p^{\frac{1}{r}} - 1)}{1{,}0\,p^{\frac{3}{r}}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{L_{rn}}{1{,}0\ p^{\frac{rn}{r}}} = \frac{A_{rn}}{1{,}0\ p^{\frac{rn}{r}}} + \frac{(K - A_1 - A_2 \ldots - A_{rn-1})\ (1{,}0\,p^{\frac{1}{r}} - 1)}{1{,}0\,p^{\frac{rn}{r}}}.$$

Behandelt man diese Darstellungen ganz auf die in 11—14 angegebene Methode, so führen sie auf folgende Darstellungen:

18) $K = L_1 . 1{,}0\,p_1^{-1} + L_2\,1{,}0\,p_1^{-2} + L_3 . 1{,}0 p_1^{-3} + \ldots L_{rn}\ 1{,}0 p^{-rn}$

19) $K = L_1\,1{,}0\,p^{-\frac{1}{r}} + L_2\,1{,}0 p^{-\frac{2}{r}} + L_3\,1{,}0 p^{-\frac{3}{r}} + \ldots L_{rn}\ 1{,}0\,p^{-n}$.

§. 29.

Nachdem nun die Grundsätze über die Ermittelung des Werthes von Kapitalzahlungen festgestellt sind, deren Beschaffenheit im vorigen §. angegeben wurde, so ist nun nöthig, noch weitere Folgerungen über Anwendung des Zinsfußes hier anzuknüpfen. Wir gehen hiebei von folgendem besondern Falle aus:

Ein Kapital K wird durch eine Reihe ihm gleicher Summen A_1, A_2, $A_3 \ldots . A_n$ getilgt, die mit dem Ende des laufenden Jahres beginnen und am Ende eines jeden Jahres gezahlt werden. Die Verzinsung geschieht halbjährlich und nach dem relativen Zinsfuß. Auf welche Weise muß der Werth sämmtlicher Leistungen des Schuldners ermittelt werden?

Der Unterschied dieser Aufgabe von der im vorigen liegt deutlich vor. Die Abtragung geschieht auf die gleiche Weise, wie bei der frühern. Daher finden auch hier die Gleichungen 3, 4, 5 §. 28. ihre Anwendung. Die Verzinsung aber ist verschieden und geschieht halbjährlich. Deswegen muß nach 18 §. 28. auch halbjährlich rabattirt werden. Man könnte allerdings die Ansicht aufstellen, daß die Rabattirung demungeachtet jährlich genommen werden müsse. Es wird jedoch leicht gezeigt werden können, daß diese Ansicht unrichtig ist. Nennt man nun der Kürze wegen den halbjährlichen relativen Zinsfuß $\frac{1}{2}p = q$, so ergiebt sich folgende Darstellung:

$$1)\quad N = \frac{L_1}{1{,}0\,q} = \frac{K\,0{,}0\,q}{1{,}0\,q}$$

$$\frac{L_2}{1{,}0\,q^2} = + \frac{A_1}{1{,}0\,q^2} + \frac{K\,0{,}0\,q}{1{,}0\,q^2}$$

$$\frac{L_3}{1{,}0\,q^3} = + \frac{(K - A_1)\,0{,}0\,q}{1{,}0\,q^3}$$

$$\frac{L_n}{1{,}0\,q^4} = + \frac{A_2}{1{,}0\,q^4} + \frac{(K - A_1)\,0{,}0q}{1{,}0\,q^4}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{L_{rn}}{1{,}0\,q^{2n}} = + \frac{A_n}{1{,}0\,q^{2n}} + \frac{(K - A_1 - A_2 - \ldots . - A_{n-1})\,0{,}0\,q}{1{,}0\,q^{2n}}$$

Löst man auch hier die Klammern auf und ordnet die Glieder nach den Potenzen von $1{,}0\,p$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} 2)\quad N = {} & A_1\,1{,}0\,q^{-2} + A_2\,1{,}0\,q^{-4} + A_3\,1{,}0\,q^{-6} \ldots\ldots + A_n\,1{,}0\,q^{-2n} \\ & + K\,(1{,}0\,q^{-1} + 1{,}0\,q^{-2} + 1{,}0\,q^{-3} \ldots . 1{,}0\,q^{-2n})\,0{,}0\,q \\ & - A_1\,(1{,}0\,q^{-3} + 1{,}0\,q^{-4} + 1{,}0\,q^{-5} \ldots . 1{,}0\,q^{-2n})\,0{,}0\,q \\ & - A_2\,(1{,}0\,q^{-5} + 1{,}0\,q^{-6} + 1{,}0\,q^{-7} \ldots . 1{,}0\,q^{-2n})\,0{,}0\,q \\ & \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ & - A_{n-1}\,(1{,}0\,q^{-2n+1} + 1{,}0\,q^{-2n}). \end{aligned}$$

Wird nun die in §. 28. angegebene Methode auf diese Darstellung angewendet, so führt sie zu folgender Gleichung:

$$3)\quad N = K - \frac{K}{1{,}0\,q^{2n}} + \frac{(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n}{1{,}0\,q^{2n}} = K.$$

Es ist also hieraus und aus 1:

$$4)\ K = \frac{L_1}{1{,}0\,q} + \frac{L_2}{1{,}0\,q^2} + \frac{L_3}{1{,}0\,q^3} + \ldots \frac{L_{2n}}{1{,}0\,q^{2n}}.$$

Würde man die Leistungen des Schuldners nach dem jährlichen Zinsfuß rabattiren, so entstände statt 1

$$5)\ N_1 = \frac{L_1}{1{,}0\,q} = \frac{K.0{,}0\,q}{1{,}0\,q}$$

$$\frac{L_2}{1{,}0\,p} = \frac{A_1}{1{,}0\,p} + \frac{K.0{,}0\,q}{1{,}0\,p}$$

$$\frac{L_3}{1{,}0p.1{,}0q} = + \frac{(K-A_1)\,0{,}0\,q}{1{,}0\,p\,.\,1{,}0\,q}$$

$$\frac{L_n}{1{,}0\,p^2} = \frac{A_2}{1{,}0\,p^2} + \frac{(K-A_1)\,0{,}0\,q}{1{,}0\,p^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{L_{rn}}{1{,}0\,p^n} = \frac{A_n}{1{,}0\,p^n} + \frac{(K-A_1-A_2\ldots\ldots-A^{n-1})\,0{,}0\,q}{1{,}0\,p^n}.$$

Diese Darstellung kann nicht auf die Gleichung $N_1 = K$ führen, wie man sich leicht überzeugt, daher ist der eben angewendete Calcul nicht zulässig, und man darf unter den oben angegebenen Bedingungen den Rabatt nicht jährlich nehmen. Man kann endlich die Verzinsung in dem relativen, die Rabattirung aber in dem conformen Zinsfuß nehmen. Unter dieser Voraussetzung geht die Darstellung 1 in folgende über, wenn $^1/_2 = 0{,}5$ gesetzt wird:

$$6)\ N_2 = \frac{L_1}{1{,}0\,p^{0{,}5}} + \frac{L_2}{1{,}0\,p} + \frac{L_3}{1{,}0\,p^{1{,}5}} + \frac{L_4}{1{,}0\,p^2} + \ldots \frac{L_{2n}}{1{,}0\,p^n}$$

$$= \frac{A_1}{1{,}0\,p} + \frac{A_2}{1{,}0\,p^2} + \frac{A_3}{1{,}0\,p^3} + \ldots \frac{A_n}{1{,}0\,p^n}$$

$$+ \left(\frac{K}{1{,}0p^{0{,}5}} + \frac{K}{1{,}0\,p} + \frac{K-A_1}{1{,}0\,p^{1{,}5}} + \frac{K-A_1}{1{,}0p^2} + \frac{K-A_1-A_2}{1{,}0\,p^{2{,}5}} + \ldots\right.$$

$$\left. \ldots\ldots + \frac{K-A_1-A_2-\ldots-A_{n-1}}{1{,}0\,p^n}\right) 0{,}0\,p_1.$$

Die zweite Form in dieser Darstellung kann nimmermehr auf $N_2 = K$ führen, daher ist auch die hier angewendete Methode nicht zulässig.

Wie nun bei Beantwortung der oben vorgelegten Frage der relative Zinsfuß zu Grunde gelegt wurde, so kann auch der conforme zu Grunde gelegt werden. Die Verzinsung muß dann nach der Formel $1{,}0\,p^{\frac{1}{2}} - 1 =$

$1{,}0\ p^{0,5} - 1$ vor sich gehen. Bei der Rabattirung kann man aber entweder den conformen halbjährlichen oder jährlichen, oder den relativen Zinsfuß zu Grunde legen. Legt man nun bei ihr vorerst den conformen halbjährlichen zu Grunde, so ergiebt sich folgende Darstellung:

$$7)\quad N = \frac{L_1}{1{,}0\ p^{0,5}} = \frac{K\,(1{,}0\ p^{0,5} - 1)}{1{,}0\ p^{0,5}}$$

$$+\frac{L_2}{1{,}0\ p} = +\frac{A_1}{1{,}0\ p} + \frac{K\,(1{,}0\ p^{0,5} - 1)}{1{,}0\ p}$$

$$+\frac{L_3}{1{,}0\ p^{1,5}} = \quad + \frac{(K - A_1)\,(1{,}0\ p^{0,5} - 1)}{1{,}0\ p^{1,5}}$$

$$+\frac{L_n}{1{,}0\ p^2} = \frac{A_2}{1{,}0\ p^2} + \frac{(K - A_1)\,(1{,}0\ p^{0,5} - 1)}{1{,}0\ p^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{L_{2n}}{1{,}0\ p^n} = \frac{A_n}{1{,}0\ p^n} + \frac{(K - A_1 - A_2 - \ldots A_{n-1})\,(1{,}0\ p^{0,5} - 1)}{1{,}0\ p^n}.$$

Werden nun an dieser Darstellung die nämlichen Veränderungen wie früher gemacht, so führt sie zu folgender

$$8)\quad N = \frac{L_1}{1{,}0\ p^{0,5}} + \frac{L_2}{1{,}0\ p} + \frac{L_3}{1{,}0 p^{1,5}} + \frac{L_n}{1{,}0 p^2} + \ldots \frac{L_{rn}}{1{,}0 p^n} = K.$$

Jede andere Art der Rabattirung führt zu einem von 8 verschiedenen Werthe, und ist deswegen nicht zulässig. Man bemerkt nun leicht, daß die in diesem §. angewendete Schlußweise noch immer richtig ist, wenn die Zinszahlungen in jedem $r$ten Theile des Jahres, die Kapitalzahlungen aber nur jährlich gemacht werden. Hieraus rechtfertigen sich nun folgende Sätze:

9) Wird eine Schuld durch jährliche Kapitalzahlungen in n Jahren getilgt, werden dabei die Zinsen in jedem $r$ten Theil des Jahres nach dem relativen Zinsfuße gezahlt und soll der gegenwärtige Werth aller dieser Leistungen berechnet werden, so geschieht dies, wenn sämmtliche Summen, welche der Schuldner zu zahlen hat, nach dem relativen Zinsfuß und in den Zeit-Abschnitten, worin die Verzinsung geschieht, rabattirt werden. Hiernach tritt die Gleichung 18 §. 28 in Kraft.

10) Geschieht aber die Verzinsung nach dem conformen Zinsfuß, so müssen sämmtliche Leistungen des Schuldners nach diesem Zinsfuß und in den Zeiträumen, worin die Verzinsung geschieht, rabattirt werden, und es tritt hiernach die Gleichung 8 dieses §. oder 19 §. 28 in Kraft. Für den Fall, als die Verzinsung in jedem $r$ten Theile nach dem conformen Zinsfuß die Kapitalabtragungen nur jährlich vor sich gehen, kann auch die Gleichung

17 §. 28 in Kraft bleiben, wenn unter L_1, L_2, L_3 . . die Abtragssummen und die in jedem einzelnen Jahre fälligen Zinssummen verstanden werden.

Beide Sätze führen zu Folgendem:

11) Geschieht die Verzinsung eines Kapitals in dem relativen Zinsfuße, so müssen auch sämmtliche Leistungen des Schuldners in dem relativen Zinsfuße und dürfen daher nicht in dem conformen rabattirt werden, und umgekehrt; geschieht die Verzinsung nach dem conformen Zinsfuß, so müssen auch sämmtliche Leistungen des Schuldners in dem conformen und dürfen nicht in dem relativen rabattirt werden.

§. 30.

Es bleibt nun noch übrig, die in den beiden vorigen §§. aufgestellten Sätze, die in so ferne noch eine Beschränkung in sich tragen als die Zahlungen in gleichen Zeiträumen zu machen sind, als allgemein gültig nachzuweisen. Dies geschieht auf folgende Art:

Ein Kapital K wird durch eine Reihe von Zahlungen A_1, A_2, A_3 .... A_n so getilgt, daß die Summe A_1 nach der Zeit m_1, die Summe A_2 nach Verfluß der Zeit m_2 nach der ersten Zahlung, die Summe A_3 nach Verfluß der Zeit m_3 nach der zweiten Zahlung u. s. f. von dem Kapitale abgetragen und außerdem noch bei jeder Zahlung die Zinsen gezahlt werden, welche seit der letzten Zahlung von dem noch rückständigen Kapitale fällig sind. Die Zinsen sind nach dem relativen Zinsfuß zu berechnen. Es soll nun der gegenwärtige Werth sämmtlicher Zahlungen bestimmt werden. Es fragt sich, ob bei dieser Werthbestimmung mit Zinses-Zinsen, oder einfachen Zinsen rabattirt werden müsse?

Da die Zeiträume m_1, m_2, m_3 . . . . m_n willkührlich sind, so können sie auch größer als eine Jahresfrist sein. Ist dies der Fall, so sollen für diese Dauer nur einfache Zinsen nach §. 2 gerechnet werden. Um nun die vorliegende Frage zu beantworten, müssen vorerst die Summen ermittelt werden, welche mit dem Ende jedes Jahres zu zahlen sind. Auch hier gelten die Gleichungen 3, 4 und 5 §. 28. Zur Bestimmung der rückständigen, für jedes Jahr verzinslichen Kapitalschuld wird die dritte Form in 5 §. 28 gewählt, wornach für die verschiedenen Jahre gilt:

$$
\begin{aligned}
1)\quad R_0 &= K = A_1 + A_2 + \ldots A_n \\
R_1 &= A_2 + A_3 + A_4 \ldots A_n \\
R_2 &= A_3 + A_4 + A_5 \ldots . A_n. \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}
$$

u. s. w. Hievon müssen die fälligen Zinsen außer der jeweiligen Abtragssumme gezahlt werden. Die Größe der jährlichen Leistungen ergiebt sich nun aus folgender Darstellung:

2) $L_1 = A_1 + K\ 0{,}0\ m_1\ p$
$L_2 = A_2 + (A_2 + A_3 + A_n \ldots A_n)\ 0{,}0\, m_2\, p$
$L_3 = A_3 + (A_3 + A_4 + A_5 \ldots A_n)\ 0{,}0\, m_3\, p$
$\vdots$
$L_{n-1} = A_{n-1} + (A_{n-1} + A_n)\ 0{,}0\, m_{n-1}\, p$
$L_n = A_n\ \ 0{,}0\ m_n\ p + A_n.$

Diese Darstellung läßt sich umformen, wenn das erste Glied jeder Horizontalreihe aus der Klammer genommen und zu dem vorhergehenden gezählt wird. Dadurch entsteht

3) $L_2 = A_2\, 1{,}0\, m_2\, p + (A_3 + A_4 \ldots A_n)\ 0{,}0\, m_2\, p$
$L_3 = A_3\, 1{,}0\, m_3\, p + (A_4 + A_5 + \ldots A_n)\ 0{,}0\, m_3\, p$
$\vdots$
$L_{n-1} = A_{n-1}\, 1{,}0\, m_{n-1}\, p + A_n\, .\, 0{,}0\, m_{n-1}\, p$
$L_n = A_n\ \ 1{,}0\ m_n\ \ p.$

Wird nun rabattirt, so kann dies nach den vorstehenden Zeiträumen oder in Jahresfristen, bei einfachen oder Zinses-Zinsen geschehen. Hier soll dasselbe in den vorstehenden Zeiträumen und bei Zinses-Zinsen, also nach 11 §. 26, geschehen. Man erhält hiernach folgende Darstellung:

4) $$N = \frac{K\, .\, 0{,}0\, m_1\, p}{1{,}0\, m_1\, p} + \frac{A_1}{1{,}0\ m_1\, p}$$
$$+ \frac{(A_3 + A_4 + \ldots . A_n)\, 0{,}0\, m_2\, p}{1{,}0\, m_1\, p\, .\, 1{,}0\, m_2\, p} + \frac{A_2}{1{,}0\, m_1\, p}$$
$$+ \frac{(A_4 + A_5 + \ldots A_n)\, 0{,}0\, m_3\, p}{1{,}0\, m_1\, p\, .\, 1{,}0\, m_2\, p\, .\, 1{,}0\, m_3\, p} + \frac{A_3}{1{,}0 m_1 p\, .\, 1{,}0 m_2 p}$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\frac{A_n\ \ 0{,}0\ \ m_{n-1}\ p}{1{,}0 m_1 p . 1{,}0 m_2 p \ldots . 1{,}0 m_{n-1} p} + \frac{A_{n-1}}{1{,}0 m_1 p . 1{,}0 m_2 p \ldots . 1{,}0 m_{n-2} p}$$
$$+ \frac{A_n}{1{,}0 m_1 p . 1{,}0 m_2 p \ldots . 1{,}0 m_{n-1} p}$$

In dieser Darstellung erscheint A_1 und A_2 mit dem Divisor $1{,}0\ m_1\ p$ in Verbindung. Man kann nun durch schickliche Behandlung allmälig sämmtliche Abtragssummen darauf zurückbringen, daß sie nur noch mit diesem Divisor in Verbindung stehen. Bei A_3 zeigt sich dies leicht. Man darf nur A_3 aus der Klammer in der zweiten Horizontalreihe nehmen und mit A_3 der folgenden Reihe in Verbindung bringen. Dadurch entsteht:

$$\frac{A_3\, .\, 0{,}0\, m_2\, p}{1{,}0 m_1 p . 1{,}0 m_2 p} + \frac{A_3}{1{,}0 m_1 p . 1{,}0 m_2 p} = \frac{A_3\, .\, 1{,}0\, m_2\, p}{1{,}0 m_1 p . 1{,}0 m_2 p} = \frac{A_3}{1{,}0\ m_1\ p}.$$

Um nun auch die spätern A auf diese Form zurückzubringen, hat man auf die nämliche Weise zu verfahren. Es findet sich immer ein A mit der

nämlichen Stellenzahl auf zwei Horizontalreihen. So oft man nun solche zwei Glieder mit einander verbindet, wird ein Divisor wegfallen. Man kann daher auf diesem Wege die letzten Glieder dieser Reihe zuerst von dem Divisor $1{,}0\,m_{n-1}\,p$, dann von $1{,}0\,m_{n-2}\,p$ u. s. w. befreien und durch Fortsetzung dieses Verfahrens auf die genannte Form zurückbringen. Geschieht dies, so gelangt man zu folgender Darstellung:

$$5)\ N = \frac{K.0{,}0m_1p}{1{,}0\,m_1\,p} + \frac{A_1+A_2+A_3+....A_n}{1{,}0\,m_1\,p} = \frac{K+K.0{,}0m_1p}{1{,}0\,m_1\,p} = K.$$

Man ist also wiederholt auf den Satz gekommen, daß $N = K$ ist, wenn nach dem relativen Zinsfuß in den angegebenen Zeiträumen, worin die Verzinsung vor sich geht, rabattirt wird und hiebei Zinses-Zinsen gerechnet werden. Es wird nun nicht schwer sein, sich zu überzeugen, daß eine Rabattirung, welche nach einem andern Zinsfuß oder in andern Zeiträumen als den angegebenen, oder bei einfachen Zinsen vor sich geht, nicht zu dem in 5 erhaltenen Resultate führt und führen kann, und daß deswegen jede andere Rechnungsweise auch nicht zulässig ist, weil sie kein richtiges Resultat verbürgt.

Wie nun der relative Zinsfuß bei der Verzinsung der Schuld, wovon zum Theil die Größe der jährlichen Leistungen des Schuldners abhängt, zu Grund gelegt wurde, so kann auch der conforme zu Grund gelegt werden. Geschieht dies, so bestimmt sich der Werth der jährlichen Leistungen unter den oben angegebenen Bedingungen und nach Analogie der oben gemachten Schlüsse und in Rücksicht auf 12 §. 26 durch folgende Darstellung:

$$6)\ N = \frac{A_1}{1{,}0\,p^{m_1}} + \frac{K(1{,}0\,p^{m_1}-1)}{1{,}0\,p^{m_1}}$$

$$+ \frac{A_2}{1{,}0\,p^{m_1+m_2}} + \frac{(A_2+A_3+A_4\ldots A_n)\,(1{,}0\,p^{m_2}-1)}{1{,}0\,p^{m_1+m_2}}$$

$$+ \frac{A_3}{1{,}0\,p^{m_1+m_2+m_3}} + \frac{(A_3+A_4+A_5\ldots A_n)\,(1{,}0\,p^{m_3}-1)}{1{,}0\,p^{m_1+m_2+m_3}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{A_{n-1}}{1{,}0\,p^{m_1+m_2\ldots m_{n-1}}} + \frac{(A_{n-1}+A_n)\,(1{,}0\,p^{m_{n-1}}-1)}{1{,}0\,p^{m_1+m_2+\ldots.m_{n-1}}}$$

$$\frac{A_n}{1{,}0\,p^{m_1+m_2+\ldots m_n}} + \frac{A_n\,(1{,}0\,p^{m_n}-1)}{1{,}0\,p^{m_1+m_2+m_3+\ldots m_n}}$$

Löst man in dieser Darstellung die Klammern auf, so zerstören sich immer zwei Glieder in einer und derselben Reihe, und ferner eines oder meh-

rere in zwei auf einander folgenden Horizontalreihen. Daher entsteht folgende Gleichung:

$$7)\quad N = \frac{K\,(1{,}0\,p^{m_1} - 1)}{1{,}0\,p^{m_1}} + \frac{A_1 + A_2 + A_3 \ldots A_n}{1{,}0\,p^{m_1}} = K.$$

Hiedurch ist man gleichfalls zu dem Satze gekommen, daß $N = K$ ist, wenn nach dem conformen Zinsfuß und in den angegebenen Zeitabschnitten, worin die Verzinsung vor sich geht, rabattirt wird und hiebei Zinses-Zinsen gerechnet werden. Auch hier wird man sich leicht überzeugen, daß eine Rabattirung in einem andern Zinsfuß, oder in andern Zeitabschnitten, oder bei einfachen Zinsen nicht zu diesem Resultate führen kann, und daß daher auch jede andere hiervon verschiedene Rechnungsweise nicht zulässig ist.

Die beiden in 5 und 7 gefundenen Resultate beruhen auf der Voraussetzung, daß keine Zinses-Zinsen bei Abtragung des Kapitals in Anrechnung gebracht werden, auch wenn einer oder mehrere von den Zeitabschnitten m_1, m_2, m_3 ... größer als ein Jahr sein sollte. Auch diese Beschränkung ist nicht wesentlich. Hebt man sie auf und verlangt, daß in dem Falle, als die Zeiträume die Dauer eines Jahres überschreiten, die entsprechenden Zinses-Zinsen von dem Gläubiger in Anrechnung gebracht werden dürfen, so bleiben die Sätze 5 und 7 noch immer in Kraft, wenn nur bei der Rabattirung die nämlichen Zeitabschnitte wieder eingehalten werden, wie sie von dem Gläubiger festgestellt wurden.

In dem Bisherigen ging man von dem gegenwärtigen Stand einer Schuld aus und auf die künftig fälligen Summen über, die zu ihrer Deckung oder Tilgung nöthig sind, um eine Vergleichung zwischen beiden zu erhalten. Hiebei war die Schuld gegeben. Nun kann man auch umgekehrt von künftig fälligen Summen ausgehen, diese als gegeben betrachten, und von ihnen auf diejenige Summe übergehen, welche ihr gegenwärtig gleich kommt, oder die gegenwärtig durch sie getilgt werden kann. Die oben angegebenen Gesetze bestimmen die Art und Weise, wie ihr gegenwärtiger Werth ermittelt werden muß, denn es handelt sich um die Beantwortung einer Frage, welche die nämliche geblieben und nur von einer andern Ansicht aufgefaßt ist. Hieraus rechtfertigt sich nun folgender allgemeine Satz:

8) Werden beliebige Kapitalzahlungen L_1, L_2, L_3 .... L_n in willkührlichen Zeitabschnitten m_1, m_2, m_3 .... m_n gemacht und soll ihr Werth auf den Anfang des ersten Zeitabschnittes m_1 zurückgeführt werden, so muß dies unter folgenden Bedingungen geschehen:

a. Der Rechnung müssen Zinses-Zinsen, nicht aber einfache Zinsen zu Grunde gelegt werden;

b. die Rabattirung muß in den Zeitabschnitten gemacht werden, worin die Zahlungen vor sich gehen;

c. die Wahl des Zinsfußes und der Verzinsungsmethode ist willkührlich und hängt von der Uebereinkunft ab. Sind aber Umstände vorhanden, woraus auf einen bestimmten Zinsfuß oder eine bestimmte Verzinsungsmethode geschlossen werden kann, so ist die Wahl beider nicht mehr der Willkühr überlassen, sondern es muß der Rabattirung der nämliche Zinsfuß und die nämliche Verzinsungsmethode zu Grunde gelegt werden, welche sich aus den vorliegenden Umständen ergeben.

Der unter 8 aufgestellte Satz läßt sich durch eine Formel darstellen, wenn der conforme Zinsfuß in Frage kommt. Sie ist folgende:

$$9)\quad K = \frac{L_1}{1{,}0\,p^{m_1}} + \frac{L_2}{1{,}0\,p^{m_1+m_2}} + \frac{L_3}{1{,}0p^{m_1+m_2+m_3}} \ldots + \frac{L_n}{1{,}0\,p^{m_1+m_2 \ldots m_n}}$$

Kommt aber der relative Zinsfuß in Frage, so werden die Fälle mannigfaltiger, und man kann nicht alle gedenkbare durch eine Formel geben, da die Verzinsungsmethode bei größern Zeiträumen als Jahresfristen verschieden sein kann. Für den Fall, als die Rabattirung sich genau an die Zeitabschnitte, worin Summen fällig sind, anschließt, und die Verzinsungsmethode für m_1, m_2, . . . auf einfache Zinsen nach §. 2. beschränkt bleiben soll, ergiebt sich folgende Darstellung:

$$10)\quad K = \frac{L_1}{1{,}0 m_1 p} + \frac{L_2}{1{,}0 m_1 p . 1{,}0 m_2 p} \ldots \frac{L_n}{1{,}0\,m_1\,p\,.\,1{,}0\,m_2\,p \ldots . 1{,}0\,m_n\,p}\,.$$

Die Gleichungen 9 und 10 fallen, wie man sieht, mit 22 und 23 §. 27 zusammen. Am einfachsten sind die Fälle, wenn die Zeiträume einander gleich sind und Jahre oder halbe Jahre bedeuten, was am häufigsten vorkommt.

Das Gesagte soll nun durch die Betrachtung eines besondern Falles verdeutlicht werden. Nach einem Jahre sind 1000 Fl., nach $2^1/_2$ Jahren 2000 Fl., nach 4 Jahren 1500 Fl., nach 6 Jahren 2000 Fl. unverzinslich fällig. Wie groß ist ihr gegenwärtiger Werth?

Wird der conforme Zinsfuß zu Grunde gelegt, so ist ihr Werth nach 9:

$$K = \frac{1000}{1{,}04} + \frac{2000}{1{,}04^{2{,}5}} + \frac{1500}{1{,}04^4} + \frac{2000}{1{,}04^6} = 5637{,}578\,\text{Fl.}$$

$$= 961{,}5385 + 1813{,}204 + 1282{,}2063 + 1580{,}6290.$$

Wird der relative Zinsfuß zu Grunde gelegt und wird nach den angegebenen Zeiträumen rabattirt, so ist nach 10:

$$K = \frac{1000}{1{,}04} + \frac{2000}{1{,}04 . 1{,}06} + \frac{1500}{1{,}04 . 1{,}06^2} + \frac{2000}{1{,}04 . 1{,}06^2 . 1{,}08}$$

$$= \left(\left(\left(\frac{2000}{1{,}08} + 1500\right)\frac{1}{1{,}06} + 2000\right)\frac{1}{1{,}06} + 1000\right)\frac{1}{1{,}04} = 5644{,}1621\,..\,\text{Fl.}$$

Wird bei diesem Zinsfuß nach Jahren mit Rücksicht auf die angegebenen Zeitabschnitte rabattirt, so ist:

$$K = \frac{1000}{1{,}04} + \frac{2000}{1{,}04^2 . 1{,}02} + \frac{1500}{1{,}04^3 . 1{,}02^2} + \frac{2000}{1{,}04^5 . 1{,}02^2}$$

$$= \left(\left(\left(\frac{2000}{1{,}04^2} + 1500\right)\frac{1}{1{,}04 . 1{,}02} + 2000\right)\frac{1}{1{,}02 . 1{,}04} + 1000\right)\frac{1}{1{,}04} =$$

5636,12845 . . . Fl.

Wird nach halben Jahren rabattirt, so ist:

$$K = \frac{1000}{1{,}02^2} + \frac{2000}{1{,}02^5} + \frac{1500}{1{,}02^8} + \frac{2000}{1{,}02^{12}} = 5629{,}852 \text{ . . Fl.}$$

$$= 961{,}1688 + 1811{,}4616 + 1280{,}2356 + 1576{,}9864.$$

Jede dieser Rechnungsweisen ist zulässig. Die Verschiedenheit der Resultate zeigt sich deutlich und ist bei größeren Summen nicht unbedeutend. Würde man mit einfachen Zinsen nach §. 12 rechnen, so ergäbe sich:

$$K = \frac{1000}{1{,}04} + \frac{2000}{1{,}1} + \frac{1500}{1{,}16} + \frac{2000}{1{,}24} = 5685{,}72695 \text{ . . . Fl.}$$

$$= 961{,}53856 + 1818{,}18 \ldots + 1293{,}10344 + 1612{,}9032.$$

Dieses Resultat, welches größer als die genannten ist, verwirft der Calcul als unrichtig.

Mit den in diesem und den zwei vorhergehenden §§. entwickelten Sätzen ist die Basis gegeben, nach welcher die gegenwärtigen Werthe künftig fälliger, unverzinslicher Kapitalien ermittelt werden müssen. Sie scheinen um so wichtiger, obgleich sie bis jetzt in den hieher gehörigen Werken gar nicht beachtet wurden, da sie allein dem Calcul diejenige Sicherheit und Festigkeit geben, die ihn gegen Mißtrauen und Unzuverlässigkeit schützt, und ihn ein für allemal aus dem Gebiete der Unbestimmtheit in das der festen und wissenschaftlichen Begründung versetzt. Hieher gehört nun noch die Betrachtung des Falles, wenn der gegenwärtige Werth einer Summe K, die jemand nach Verfluß irgend einer Zeit zu besitzen wünscht, wobei also die Rechte eines zweiten auf diese Summe nicht in Frage kommen, und die Summe nicht wie bisher mit andern in Verbindung tritt, sondern isolirt steht, bestimmt werden soll. Es wird sich auch hier um die Frage handeln: Müssen bei der Reduction auf die Gegenwart einfache oder Zinses-Zinsen gerechnet werden?

Für die Rabattirung mit einfachen Zinsen und Zinses-Zinsen bestehen bekanntlich folgende Formeln:

$$11)\quad R = \frac{K . 100}{100 + np}; \qquad 12)\quad R = \frac{K . 100^n}{(100 + p)^n}.$$

Da die Ableitung beider Formeln keinen Widerspruch in sich trägt, so giebt auch der Calcul keine Gründe an, um zu entscheiden, welche Rechnungsweise im vorliegenden Falle die richtige ist. Auf diese Formeln können daher die in §. 28, 29, 30 aufgestellten Sätze nicht angewendet werden. Es müssen also äußere Gründe aufgesucht werden, um die Frage zur Entscheidung zu bringen. Hieher gehört einerseits die Größe des Kapitals, welches solche Zinsen jährlich abwirft, daß sie sogleich wieder als Kapital zinstragend angelegt werden können; andererseits die Gelegenheit, eingehende Zinsen wieder nutzbringend anzulegen, wie dies an großen Geldmärkten, an Orten, wo sich Anstalten zur nutzbringenden Anlegung kleiner Geldsummen vorfinden, der Fall ist u. s. w.

§. 31.

Nachdem nun die Grundzüge für die Anwendung des Calculs bei Rabattirung gewonnen sind, so lassen sich nun hieraus noch andere, nicht minder wichtige Folgerungen ziehen. Bisher wurde nämlich die Vergleichung der Kapitalwerthe untereinander auf den Anfang des ersten Zeitabschnittes zurückgeführt, in welchem die einzelnen Zahlungen beginnen. Es fragt sich nun, ob die nämlichen Bedingungen noch gelten, wenn der Zeitpunkt der Vergleichung verlegt wird.

Um diese Frage zu beantworten, sind die in §. 28 — 30 erhaltenen Resultate so zu verändern, daß sie noch immer gültig bleiben und den Zeitpunkt verrücken. Wir wählen hiezu die Gleichungen 17 und 18 §. 28, und zwar aus dem Grunde, weil diese die einfachsten sind, und sich deswegen an ihnen auch die nöthigen Veränderungen am leichtesten machen lassen; ferner weil sie diejenigen Fälle begreifen, welche am gewöhnlichsten vorkommen, und endlich weil hiedurch die Beweisführung nichts an ihrer Allgemeinheit verliert. Denn obgleich die in §. 30 erhaltenen Resultate viel allgemeiner sind, als die in §. 28 erhaltenen, so erkennt man doch aus den bisher gegebenen Entwickelungen leicht, daß sich die in §. 30 gefundenen Resultate ohne Schwierigkeit in's Allgemeine übertragen lassen, wodurch sofort die Allgemeinheit der Beweisführung durchaus nicht gefährdet ist. Nach diesen Bemerkungen wenden wir uns zur Sache und vervielfachen die Gleichung 17 §. 28 mit $1{,}0\,p^n$ die Gleichung 18 mit $1{,}0\,p_1^{rn}$. Hierdurch entsteht:

$$1)\quad K\,1{,}0p^n = L_1 1{,}0p^{n-1} + L_2 1{,}0p^{n-2} + \ldots . L_{n-2}\,1{,}0\,p^2 + L_{n-1}\,1{,}0p + L_n$$

$$2)\quad K1{,}0p_1^{rn} = L_1 1{,}0p_1^{rn-1} + L_2 1{,}0p_1^{rn-2} + \ldots . L_{rn-2}\,1{,}0p_1^{\,2} + L_{rn-1}\,1{,}0p_1 + L_{rn}.$$

Diese Gleichungen sind noch immer gültig und führen sämmtliche Kapitalwerthe auf den Zeitpunkt der letzten Zahlung zurück. Das Nämliche

gilt, wenn die Gleichung 19 §. 28 mit $\sqrt[r]{1{,}0\,p^{rn}}$ vervielfacht wird. Es entsteht:

$$3)\ K.1{,}0p^{n}=L_1 1{,}0p^{n-\frac{1}{r}}+L_2 1{,}0p^{n-\frac{2}{r}}+\ldots L_{rn-2}1{,}0p^{\frac{2}{r}}+L_{rn-1}1{,}0p^{\frac{1}{r}}+L_{rn}$$

Das Nämliche läßt sich von den Gleichungen des §. 30. zeigen. Hieraus und in Rücksicht auf 8 §. 30 folgt der Satz:

4) Soll der Werth mehrerer Kapitalzahlungen auf den Augenblick der letzten Zahlung zurückgebracht werden, so müssen dem Calcul Zinses-Zinsen zu Grunde gelegt werden. Die Verzinsung muß sich den Zeitabschnitten anschließen, in welchen die Zahlungen erfolgen. Ueber die Verzinsungsmethode und den Zinsfuß gelten die in 8 §. 30 gemachten Bemerkungen.

Vervielfacht man die Gleichungen 17 und 18 §. 28 mit $1{,}0\,p^{h}$ und $1{,}0\,p_1{}^{hr}$, so daß h kleiner als n ist, so entsteht:

$$5)\ K1{,}0\,p^{h}=L_1 1{,}0\,p^{h-1}+L_2 1{,}0\,p^{h-2}+\ldots L_{h-2}\,1{,}0\,p^{2}+L_{h-1}\,1{,}0\,p+L_h$$
$$+\frac{L_{h+1}}{1{,}0\,p}+\frac{L_{h+2}}{1{,}0p^2}+\ldots\ldots\frac{L_{n-1}}{1{,}0p^{+n-h+1}}+\frac{L_n}{1{,}0\,p^{+n-h}}$$

$$6)\ K.1{,}0\,p_1{}^{hr}=L_1\,1{,}0\,p_1{}^{hr-1}+L_2\,1{,}0\,p_1{}^{hr-2}+\ldots\ldots L_{rh-1}\,1{,}0p_1+L_{rh}$$
$$+\frac{L_{rh+1}}{1{,}0\,p_1}+\frac{L_{rh+1}}{1{,}0p_1{}^2}+\ldots\ldots\frac{L_{nr+1}}{1{,}0p_1{}^{nr-hr+1}}+\frac{L_{rn}}{1{,}0\,p_1{}^{nr-hr}}.$$

Aehnliches ergiebt sich, wenn 19 §. 28 mit $\sqrt[r]{1{,}0\,p^{hr}}$ vervielfacht wird. Diese Gleichungen führen den Werth der Zahlungen auf den Zeitpunkt der $h$ten und (rh)ten Zahlung zurück und gelten mit den nöthigen Modifikationen unter den in 4 genannten Bedingungen.

Daß diese Gleichungen nicht für die Rechnung mit einfachen Zinsen gelten, zeigt sich ganz einfach dadurch, wenn man sie mit $\frac{100+np}{100}$ vervielfacht. Es entstehen dann Gleichungen, die der Form nach noch immer richtig sind, die aber keine Bedeutung haben, denn der Zeitpunkt, für den sie gelten, ist nicht verändert worden. Hieraus folgt der Satz:

7) In den unter 1, 2, 3, 5 und 6 genannten Fällen ist die Rechnung mit einfachen Zinsen nicht zulässig.

Man kann nun die Gleichungen 17, 18 und 19 §. 28 auch auf einen Zeitpunkt zurückführen, der früher liegt, als der Anfang des ersten Zeitabschnittes, oder später, als das Ende des letzten, und kann dann mit Zinses-Zinsen oder einfachen Zinsen rechnen. Für einen frühern Zeitpunkt entsteht:

$$8)\ \frac{K}{1{,}0\,p^{h}}=1{,}0\,p^{-h}\left(\frac{L_1}{1{,}0p}+\frac{L_2}{1{,}0p^2}+\frac{L_3}{1{,}0\,p^3}+\ldots\ \frac{L_n}{1{,}0\,p^{n}}\right)$$

$$9)\ \frac{K.100}{100+ph} = \frac{100}{100+ph}\left(\frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2} + \frac{L_3}{1{,}0p^3} + \cdot\cdot\ \frac{L_n}{1{,}0\,p^n}\right).$$

Der Calcul giebt jedoch kein Merkmal an, woraus man auf die Richtigkeit der einen oder andern Rechnungsmethode schließen kann. Es gelten auch hier die zu 11 und 12 §. 30 gemachten Bemerkungen, und die Gleichungen 1—6 in diesem §., so wie die in den §§. 27—29 entwickelten, sind unter den, für die Zeit festgestellten, Beschränkungen festzuhalten.

Die Gleichungen 5 und 6 lassen sich noch dazu benutzen, um den Stand einer Schuld, welche durch die Theilzahlungen L_1, L_2, L_3 ... getilgt werden soll, zu irgend einem Zeitabschnitte während der Tilgungszeit zu bestimmen. Betrachtet man vorerst die Gleichung 5 und wählt hiezu den Zeitpunkt, an welchem die *h*te Tilgungssumme gezahlt wird, so ist:

$$K1{,}0p^{h}\text{-}(L_1 1{,}0p^{h-1} + L_2 1{,}0p^{h-2} + \ldots L_{h-1}\,1{,}0p + L_h) = \frac{L_{h+1}}{1{,}0p} + \ldots \frac{L_n}{1{,}0\,p^{n-h}}$$

Der Werth aller Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens fällt nach 8 §. 30 und 17 §. 28 offenbar mit dem Werthe zusammen, welchen alle spätern Theilzahlungen in dem Zeitpunkte haben, worin die Summe L_h fällig ist. Dies ist aber gerade der Stand der Schuld in dem genannten Zeitpunkt. Nennt man diesen S, so hat man:

$$10)\ S = K.\,1{,}0\,p^h - (L_1\,1{,}0\,p^{h-1} + L_2\,1{,}0\,p^{h-2} + \ldots L_{h-1}\,1{,}0\,p + L_h).$$

Geschehen die Zahlungen in dem *r*ten Theile des Jahres, so ist:

$$11)\ S = K.\,1{,}0\,p_1^{rh} - (L_1\,1{,}0\,p_1^{rh-1} + L_2 1{,}0 p_1^{rh-2} + \ldots L_{rh-1}\,1{,}0 p_1 + L_{rh}).$$

Diese Gleichungen gelten für den relativen Zinsfuß. Sind alle Zahlungen einander gleich, so hat man aus 10 und 11:

$$12)\ S = K.\,1{,}0p^h - L.\frac{1{,}0p^h - 1}{1{,}0\,p};\quad 13)\ S = K.\,1{,}0p_1^{rh} - L\,\frac{1{,}0\,p_1^{rh} - 1}{0{,}0\,p_1}$$

Geschehen die Kapitalzahlungen jährlich, geht aber die Verzinsung in jedem *r*ten Theile des Jahres vor sich, wie in 17 §. 27 vorausgesetzt wird, so ist der Stand der Schuld im Augenblick der *h*ten Zahlung:

$$14)\ S = K.\,1{,}0\,p_1^{rh} - (L_1\,1{,}0\,p_1^{rh-r} + L_2 1{,}0 p_1^{rh-2r} + \ldots L_{h-1}\,1{,}0 p_1^{r} + L_h).$$

Bei gleichen Theilzahlungen ist:

$$15)\ S = K.\,1{,}0\,p_1^{rh} - L.\,\frac{1{,}0\,p_1^{rh} - 1}{1{,}0\,p_1^{r} - 1}.$$

Bei halbjährlichen Zahlungen hat man für den relativen und conformen Zinsfuß:

$$16)\ S = K.1{,}0p_1^{2h} - L.\frac{1{,}0p_1^{2h} - 1}{0{,}0\,p_1};\quad 17)\ S = K.\,1{,}0\,p^h - L\,\frac{1{,}0\,p^h - 1}{1{,}0\,p^{0{,}5} - 1}$$

Bei jährlichen Zahlungen und halbjährlicher Verzinsung ist aus 15:

$$18)\ S = K.\,1{,}0\,p_1^{2h} - L.\,\frac{1{,}0\,p_1^{2h} - 1}{1{,}0\,p_1^{2} - 1}.$$

Die Gleichungen 12, 15 und 18 antworten auch folgende Frage: Je-

mand hat ein Kapital K bei dem Zinsfuße p ausgeliehen und bezieht hievon am Ende eines jeden Jahres die Summe T. Wie groß ist das Kapital am Ende des $h$ten Jahres, wenn die Verzinsung auf eine der genannten Methoden vor sich geht?

Wir kommen nun auf die zu Anfang des §. 28 gemachten Bemerkungen, von welchen wir ausgingen, zurück und werden, indem wir die in den §§. 28 — 31 aufgefundenen Resultate darauf anwenden, zu folgendem Schlusse geführt, daß die in den §§. 22, 26—31 aufgestellten Methoden zu richtigen Resultaten führen, dagegen die in §. 7, 9 und 12—14 angegebenen nicht, und daß in den genannten Fällen die Rechnung mit einfachen Zinsen nicht zulässig ist.

Die Richtigkeit dieser Behauptung läßt sich auch durch Anwendung auf besondere Fälle nachweisen. Zu dem Ende sollen folgende betrachtet werden.

Ein Kapital von 10000 Fl. soll so getilgt werden, daß jedes Jahr 1000 Fl. am Kapitale abgetragen und außerdem die fälligen Jahreszinsen zu 4 Proc. gezahlt werden. Es sind der Reihe nach am Ende der verschiedenen Jahre den Bedingungen zufolge zu zahlen 1400, 1360, 1320, 1280, 1240, 1200, 1160, 1120, 1080, 1040 Fl., wodurch dann die Schuld vollkommen getilgt ist. Bringt man nun den Werth dieser Summen auf den gegenwärtigen Zeitpunkt zurück, indem man mit Zinses-Zinsen und einfachen Zinsen rabattirt, so erhält man folgende Resultate:

$$K = \frac{1400}{1{,}04} + \frac{1360}{1{,}04^2} + \frac{1320}{1{,}04^3} + \ldots \frac{1040}{1{,}04^{10}} = 9999{,}9999\ldots \text{ Fl.}$$

$$= 10000 \text{ Fl.}$$

$$K = \frac{1400}{1{,}04} + \frac{1360}{1{,}08} + \frac{1320}{1{,}12} + \ldots \frac{1040}{1{,}40} = 10180{,}2176\ldots \text{ Fl.,}$$

wie man sich leicht überzeugt, wenn man die angezeigten Geschäfte ausführt. Nun sind offenbar die oben genannten Summen nicht mehr werth, als ein gegenwärtig disponibles Kapital von 10000 Fl., denn der Schuldner muß sie als Aequivalent für seine Schuld entrichten. Damit stimmt die Rechnung mit Zinses-Zinsen. Die Rechnung mit einfachen Zinsen sagt aber, daß die Summen einen höheren Werth haben, was offenbar einen Widerspruch in sich enthält.

An einem Anlehen von 5000000 wurden 15 Jahre lang jährlich 200000 Fl. abgetragen. Wie groß ist der Stand der Schuld bei 4 Proc. und halbjährlicher Verzinsung bei der 15ten Zahlung. Nach 18 ist:

$$S = 5000000 \cdot 1{,}02^{30} - 200000 \frac{1{,}02^{30}-1}{1{,}02^2-1} = 9056807{,}9 - 4016641{,}5$$

$$= 5040166{,}4 \text{ Fl.}$$

Die Schuld hat sich vermehrt, denn es wurden nicht einmal die laufen-

den Zinsen abgetragen. Fragt man aber nach dem Stande der Schuld bei 4 Proc. und jährlicher Verzinsung im Zeitpunkte der 15ten Zahlung, so hat man aus 12:

$$S = 5000000 \,.\, 1{,}04^{15} - 200000\,\frac{1{,}04^{15}-1}{0{,}04} = 9004717{,}5 - 4{,}004717{,}5$$
$$= 5000000 \text{ Fl.},$$

wie dies sein muß, denn es wurden jährlich nur die laufenden Zinsen gezahlt. Die Rechnung mit einfachen Zinsen würde nicht zu diesen Resultaten führen.

Endlich gehören hieher alle Fälle, wenn Kaufobjecte so veräußert werden, daß ein bestimmter Theil der Kaufsumme sogleich, und der übrige in verschiedenen Terminen unverzinslich gezahlt wird, wovon ein Beispiel in §. 12 bei einfachen Zinsen behandelt wurde. Wir behalten das nämliche Beispiel bei und behandeln es nach der hier angegebenen Methode. Bietet nun A auf eine Sache 24000 Fl. sogleich baar, B 16000 Fl. sogleich baar und 3000 Fl. unverzinslich am Ende des 1sten, 2ten, 3ten Jahres, C 17000 Fl. baar und 2000 Fl. nach $1\frac{1}{2}$, 3, $4\frac{1}{2}$ und 6 Jahren, und fragt man nach dem vortheilhaftesten Gebote, so ist bei 4procentiger Rechnung der Werth des Anerbietens von B:

$$K = 16000 + \frac{3000}{1{,}04} + \frac{3000}{1{,}04^2} + \frac{3000}{1{,}04^3} = 24325{,}27 \text{ Fl.}...,$$

wenn die angezeigten Rechnungen ausgeführt werden. Der Werth des Anerbietens von C ist, wenn die Verzinsung nach den Terminen, worin gezahlt wird, vor sich geht und die Gleichung 10 §. 30 benutzt wird:

$$K = 17000 + \frac{2000}{1{,}06} + \frac{2000}{1{,}06^2} + \frac{2000}{1{,}06^3} + \frac{2000}{1{,}06^4} = 23930{,}211 \text{ Fl.}$$

Wird die Verzinsung so oft jährlich genommen, als die Zeitabschnitte zulassen, so ergiebt sich folgender Werth für das Anerbieten von C:

$$K = 17000 + \frac{2000}{1{,}04 \,.\, 1{,}02} + \frac{2000}{1{,}04^2 \,.\, 1{,}02^2} + \frac{2000}{1{,}04^3 \,.\, 1{,}02^3} + \frac{2000}{1{,}04^4 \,.\, 1{,}02^4}$$
$$= 23917{,}5348\,..\text{ Fl.}$$

Man kann nun auch die Werthe der verschiedenen Anerbieten nach den Sätzen dieses §. dadurch unter einander vergleichen, daß man sie auf einen andern Zeitpunct zurückführt, etwa auf das Ende des 6ten Jahres. Dann ist der Werth des Anerbietens von A:

$$K = 24000 \,.\, 1{,}04^6 = 30367{,}6565\,..\text{ Fl.}$$

Der Werth des Anerbietens von B ist:

$$K = 17000 \,.\, 1{,}04^6 + 3000 \,.\, 1{,}04^5 + 3000 \,.\, 1{,}04^4 + 3000 \,.\, 1{,}04^3$$
$$= 32044{,}549\ldots \text{ Fl.}$$

Der Werth des Anerbietens von C ist, wenn die Verzinsung in dem

relativen Zinsfuß nach Maßgabe der Termine, worin die Zahlungen gemacht werden, vor sich geht:

$$K = 17000 \,.\, 1{,}06^4 + 2000 \,.\, 1{,}06^3 + 2000 \,.\, 1{,}06^2 + 2000 \,.\, 1{,}04 + 2000$$
$$= 30211{,}3403 \ldots \text{ Fl.}$$

Aus der Vergleichung der eben erhaltenen Werthe der Anerbieten von A, B und C mit den vorhin erhaltenen zeigt sich, daß diese in gleichem Verhältnisse bleiben, und nicht, wie bei einfachen Zinsen §. 12, variiren, denn in beiden hier angewendeten Methoden macht B das beste, A das zweite, C das dritte Gebot. Diese Bemerkung spricht gleichfalls für die Richtigkeit der in den §§. 28—31 entwickelten Methoden. Wir gehen nun zu weiteren Anwendungen über.

§. 32.

Ein Kapital K soll bei dem Zinsfuße p durch eine jährliche Rente getilgt werden, die von dem Ende des ersten Jahres beginnt und n Jahre dauert. Wie groß muß die Rente sein?

Nennt man die Rente oder gleiche, jährlich zu zahlende Summe T, so muß sie, n Mal gezahlt, dem gegenwärtig disponibeln Kapitale K gleich sein. Hiernach ist der Werth sämmtlicher Summen auf den Anfang des ersten Jahres zurückzubringen, und man hat, wenn die Rabattirung jährlich gemacht wird, nach 17 §. 28:

$$K = \frac{T}{1{,}0p} + \frac{T}{1{,}0p^2} + \frac{T}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{T}{1{,}0p^n} = T \,.\, \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} \,.$$

Hieraus bestimmt sich nun die Rente durch folgende Gleichung:

$$1)\ T = \frac{K \,.\, 0{,}0p}{1 - 1{,}0p^{-n}} = \frac{K \,.\, 1{,}0p^n \,.\, 0{,}0p}{1{,}0p^n - 1} \,.$$

Geschieht die Rabattirung in jedem $r$ten Theile des Jahres, so ist bei dem relativen Zinsfuß:

$$K = \frac{T}{1{,}0p_1^{\,r}} + \frac{T}{1{,}0p_1^{\,2r}} + \frac{T}{1{,}0p_1^{\,3r}} + \ldots \frac{T}{1{,}0p_1^{\,rn}} = T \,.\, \frac{1 - 1{,}0p_1^{\,-rn}}{1{,}0p_1^{\,r} - 1} \,,$$

$$\text{also } 2)\ T = \frac{K(1{,}0p_1^{\,r} - 1)}{1 - 1{,}0p_1^{\,-rn}} = \frac{K(1{,}0p_1^{\,r} - 1)\,1{,}0p_1^{\,rn}}{1{,}0p_1^{\,rn} - 1} \,.$$

Soll die Rente in jedem $r$ten Theile des Jahres fällig sein und fragt man nach ihrer Größe, so hat man bei dem relativen Zinsfuß die Gleichung 18 §. 28, und bei dem conformen 19 §. 28 anzuwenden, sämmtliche Zahlungen einander gleich zu setzen und dann die Größe T hieraus zu bestimmen.

Es ist für den relativen und conformen Zinsfuß:

$$3)\ T = \frac{K \,.\, 0{,}0p_1}{1 - 1{,}0p_1^{\,-rn}} = \frac{K \,.\, 0{,}0p_1 \,.\, 1{,}0p_1^{\,rn}}{1{,}0p_1^{\,rn} - 1} \,.$$

$$4)\quad T = \frac{K\,(1,0p^{\frac{1}{r}} - 1)}{1 - 1,0p^{-n}} = \frac{K(1,0p^{\frac{1}{r}} - 1)\,1,0p^{n}}{1,0p^{n} - 1}\,.$$

Soll die Rente immer dauern, so ist $n = \infty$ in diesen Darstellungen zu setzen. Für diesen Fall wird $\frac{1}{1,0p^{n}} = 1,0p^{-n} = 0$ und $1,0p^{n} = \infty$ u. s. w., und man erhält die folgenden Werthe für die in 1—4 genannten Fälle:

$$5)\quad T = K.0,0p\;;\; T = K(1,0p_1{}^{r} - 1)\;;\; T = K.0,0p_1\;;\; T = K(1,0p^{\frac{1}{r}} - 1)$$

Auch die in 5 gefundenen Resultate sprechen offenbar für die Richtigkeit der in §. 28—31 aufgestellten Sätze, denn wird eine immerwährende Rente auf einen Kapitalwerth in der Gegenwart zurückgeführt, so kann dieser offenbar nicht größer sein, als dasjenige Kapital, welches, bei einem bestimmten Zinsfuß auf Zinsen ausgelegt, jährlich die genannte Summe hervorbringt, wie sich dies in §. 3 schon ergab, und womit die Darstellungen in 5 übereinstimmen. Würde man aber die in §. 12 entwickelte Methode, wornach einfache Zinsen der Rechnung zu Grunde gelegt werden, um den gegenwärtigen Werth einer immerwährenden Rente zu bestimmen, anwenden, so müßte man auch dort $n = \infty$ setzen. Geschieht dies, so wird auch der gegenwärtige Werth einer Rente unendlich groß, was eine Ungereimtheit ist. Es zeigt sich also auch hier wieder, daß die in §. 12 angewendete Rechnungsmethode unzulässig ist.

Durch die vorstehenden Gleichungen ist auch folgende Aufgabe gelöst: Ein Kapital, ein Werkzeug, irgend ein physisches Gut ꝛc. wird in n Jahren aufgebraucht. Wie viel beträgt die jährliche, halbjährliche ꝛc. Abnutzungssumme bei dem relativen oder conformen Zinsfuß, wenn p Proc. gerechnet werden?

Anwendungen der hier aufgestellten Gleichungen kommen häufig vor. Will ein Staat ein Anlehen von 5000000 in 25 Jahren durch jährliche gleiche Summen bei $3\frac{1}{2}$ Proc. und bei jährlicher Verzinsung tilgen, so beträgt die jährliche Rente nach 1:

$$T = \frac{5000000 . 1,035^{25} . 0,035}{1,035^{25} - 1} = 303370,2 \text{ Fl.},$$

bei halbjährlicher Tilgung würde die Rente nach 3:

$$T = \frac{5000000 . 1,0175^{50} . 0,0175}{1,0175^{50} - 1} = 150869,6 \text{ Fl.}$$

Bei einer jährlichen Verzinsung mit 4, 5 und 6 Proc. würde nach 1 die Rente 320059,8 ; 354762,4 ; 391133,6 Fl. betragen.

Dauert eine Maschine, welche 20000 Fl. kostet, 30 Jahre, und muß sie

dann durch eine neue ersetzt werden, so ist nach 1 das jährliche Abnutzungskapital, wenn 4 Proc. gerechnet werden,

$$T = \frac{20000 . 1{,}04^{20} . 0{,}04}{1{,}04^{20} - 1} = 1156{,}602 \ldots \text{Fl.}$$

§. 33.

Ein Kapital K soll durch die jährliche Rente T bei dem Zinsfuße p getilgt werden. Wie lange muß die Rente bei jährlicher Verzinsung gezahlt werden?

Die Frage beantwortet sich dadurch, daß n aus 1 §. 32 ermittelt wird. Es ist $K . 0{,}0p = T - T . 1{,}0p^{-n}$. Wird diese Gleichung mit $1{,}0p^n$ vervielfacht, und werden die Glieder versetzt, so entsteht: $T = (T - K 0{,}0p)\, 1{,}0p^n$. Wendet man Logarithmen an, so wird:

$$1)\ n = \frac{lg\, T - lg\,(T - K . 0{,}0p)}{lg\, 1{,}0p} = lg \frac{T}{T - K . 0{,}0p} : lg\, 1{,}0p.$$

Ist $T = K . 0{,}0p$, oder ist die jährliche Rente nicht größer, als die jährlich fälligen Zinsen, so wird aus der zweiten Form von 1:

$$2)\ n = lg \frac{T}{0} : lg\, 1{,}0p = \infty,$$

oder die Rente hört nicht auf. Wird die Rente jährlich bezahlt, aber in jedem $r$ten Theile des Jahres verzinst, so ist aus 2 §. 32:

$$3)\ n = \frac{lg T - lg(T - K(1{,}0p_1^{\,r} - 1))}{r\, lg\, 1{,}0p_1} = lg \frac{T}{T - K(1{,}0p_1^{\,r} - 1)} : r\, lg\, 1{,}0p_1.$$

Ist $T = K(1{,}0p_1^{\,r} - 1)$, so hört die Rente nicht auf. Ist die Rente in jedem $r$ten Theile fällig, so ist für den relativen und conformen Zinsfuß aus 3 und 4:

$$4)\ n = \frac{lg\, T - lg\,(T - K . 0{,}0p_1)}{r\, lg\, 1{,}0p_1} = lg \frac{T}{T - K . 0{,}0p_1} : r\, lg\, 1{,}0p_1.$$

$$5)\ n = \frac{lg\, T - lg\,(T - K(1{,}0p^{\frac{1}{r}} - 1))}{lg\, 1{,}0p} = lg \frac{T}{T - K(1{,}0p^{\frac{1}{r}} - 1)} : lg\, 1{,}0p.$$

Alle diese Gleichungen gelten nur, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, und führen auch nur in diesem Falle auf ein richtiges Resultat. Besteht aber n aus einer ganzen Zahl und einem Bruchtheil, dann wird keine dieser Gleichungen auf ein richtiges Resultat führen, und es müssen andere Mittel gewählt werden, um den Werth der Zeit zu ermitteln. Dies soll nun gezeigt werden. Wir wählen dazu die Gleichung 1, weil diese die einfachste ist, und weil die Methode, welche an ihr gezeigt werden wird, sich ohne Schwierigkeit auf die übrigen Fälle übertragen läßt, und legen der Auflösung den relativen Zinsfuß zu Grunde.

Enthält nun n außer der ganzen Zahl noch einen Bruchtheil v, so handelt es sich um die Auflösung folgender Aufgabe:

$$6)\quad K = \frac{T}{1{,}0vp \,.\, 1{,}0p} + \frac{T}{1{,}0vp \,.\, 1{,}0p^2} + \frac{T}{1{,}0vp \,.\, 1{,}0p^3} + \cdots \frac{T}{1{,}0vp \,.\, 1{,}0p^n}$$

$$= \frac{T}{1{,}0vp} \cdot \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}.$$

In dieser Gleichung kommen fünf Größen vor, wovon drei gegeben, die anderen, n und v, unbekannt sind. Die Aufgabe ist hiernach eigentlich unbestimmt. Man erhält daher aus ihr folgende zwei Darstellungen:

$$7)\quad n = \frac{lg\, T - lg(T - K \,.\, 0{,}0p \,.\, 1{,}0vp)}{lg\, 1{,}0p}.$$

$$8)\quad v = \frac{100\, T}{K \,.\, p} \cdot \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} - \frac{100}{p}.$$

Die erste Gleichung setzt v, die zweite n als bekannt voraus. Man kann die Aufgabe dennoch zu einer bestimmten machen, wenn man für n nur einen Werth annimmt, wie in §. 25 geschah. Hält man diese Bemerkung fest und vergleicht den Werth von K in 6 mit demjenigen von K, welcher aus der ersten Darstellung in §. 32 folgt, woraus die Gleichung 1 dieses §. abgeleitet wurde, so überzeugt man sich leicht, daß der in 6 erhaltene Werth kleiner sein muß, als der dort entstandene, denn sämmtliche Werthe von I sind um die Zeit v weiter rabattirt, also auch kleiner geworden. Ist aber dieser Werth kleiner, so folgt aus 1 nothwendig, daß auch der Werth von n kleiner geworden ist, als er hätte werden sollen (weil ein kleiner Werth für K eingeführt wurde), und daß man folglich eine Zahl erhält, die kleiner als die wahre ist. Fährt man nun in dieser Schlußweise folgerichtig fort, so hat man für n nicht die erhaltene ganze Zahl anzunehmen, sondern die nächst größere ganze Zahl zu wählen und in der Rechnung beizubehalten. Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich nun folgende Methode zur Auflösung der vorliegenden Aufgabe. Man suche den Werth für n nach der Gleichung 1 ohne Rücksicht auf 7. Ergiebt sich für n eine ganze Zahl, so betrachte man die Aufgabe als gelöst. Erhält man aber aus 1 eine ganze und gebrochene Zahl, so nehme man für n die nächst höhere ganze Zahl und führe diesen Werth in 8 ein und bestimme hieraus v, so werden diese Werthe der Aufgabe genügen, und es ist sofort die Rente nach $(1+v)$, $(2+v)$, $(3+v)$ . . . . $(n+v)$ Jahren zu zahlen. Man könnte nun auch für n noch andere Werthe in 8 einführen und dann v berechnen, und würde daraus andere auflösende Werthe erhalten. Sie können aber nicht wohl in Betrachtung kommen, da die Sätze in §. 28—31 später fällig werdende Renten nicht rechtfertigen. Das Gesagte soll an einem besondern Falle verdeutlicht werden. Das Kapital 4451,822.. Fl. soll durch die jähr-

lich fällige Summe von 1000 Fl. getilgt werden. Wie oft muß diese Summe bei 4procentiger Verzinsung gezahlt werden? Aus 1 ist:

$$n = \frac{lg\,1000 - lg\,(1000 - 178{,}07289\,..)}{lg\,1{,}04} = \frac{0{,}0851668}{0{,}0170333} = 5$$

Werden 1000 Fl. fünf Mal gezahlt, so ist dadurch die genannte Summe in der That getilgt, wie sich auf eine mechanische Weise nachrechnen läßt. Soll aber die Summe 4364,5316 Fl. durch jährlich fällige 1000 Fl. gezahlt werden, so wird aus 1:

$$n = \frac{lg\,1000 - lg\,(1000 - 174{,}58126\,..)}{lg\,1{,}04} = \frac{0{,}0833258}{0{,}0170333} = 4{,}89\,\ldots$$

Hier besteht n aus einer ganzen Zahl und einem Bruche. Man nehme nun die nächst höhere Zahl von n, also 5, so ist aus 8:

$$v = \frac{100\,.\,1000}{4\,.\,4364{,}53\,..}\,.\,\frac{1 - 1{,}04^{-5}}{0{,}04} - \frac{100}{4} = \frac{100\,.\,4451{,}8223\,..}{4\,.\,4364{,}531\,..} - 25 = 0{,}5.$$

Es ist also $n + v = 5\frac{1}{2}$ Jahre. Man hat 1000 Fl. fünf Mal jährlich zu zahlen und nach $1\frac{1}{2}$ Jahre mit der ersten Zahlung zu beginnen.

Man kann sich jedoch, wenn n auf eine ganze Zahl und einen Bruch führt, auch noch folgender Methode bedienen. Man behalte diejenige ganze Zahl, worauf n unmittelbar führt, bei, so wird die Schuld nicht vollkommen getilgt sein, wenn die Rente T so oft gezahlt wird, als die Zahl der Ganzen in n verlangt, und es wird noch ein Rest zur Tilgung vorhanden sein. Dieser Rest (R) läßt sich nach §. 31 leicht bestimmen, und man hat:

$$9)\quad R = K\,.\,1{,}0p^n - T\,.\,\frac{1.0p^n - 1}{0{,}0p}\,.$$

Man kann nun diesen Rest mit der $n$ten Zahlung, oder im Laufe oder am Ende des $(n+1)$ten Jahres tilgen. Dies bleibt der Willkür oder der Uebereinkunft überlassen. Man hat in diesem Falle:

$$10)\quad S = R\,.\,1{,}0vp,$$

und v kann alle Werthe von 0 bis 1 durchlaufen.

Behandelt man nach dieser Methode die obige Aufgabe und setzt $K = 4364{,}531\,..$ Fl., $T = 1000$, $p = 4$, so erhält man $n = 4$. Hiernach ist der noch zu tilgende Rest nach 9:

$$R = K\,.\,1{,}04^4 - 1000\,.\,\frac{1{,}04^4 - 1}{0{,}04} = 5105{,}8846\,.. - 4246{,}464$$
$$= 859{,}42 \text{ Fl.}$$

Hiernach hat man entweder bei der vierten Zahlung 1859,42 Fl. zu zahlen, oder wenn die Zahlung des Restes bis zu Ende des 5ten Jahres verschoben wird, nach 10, $S = 859{,}42\,.\,1{,}04 = 893{,}8$ Fl. zu zahlen.

Sollte nun auch diese Methode, die dem Sinne der Aufgabe, wornach gleiche Zahlungssummen vorausgesetzt werden, eigentlich nicht entspricht, und die bei Bestimmung des Werthes von R oft nicht mühelos ist, nicht gewählt

werden, so kann man zu einer dritten Methode seine Zuflucht nehmen, welche im folgenden §. angegeben werden wird.

Zusatz. Die vorstehende Aufgabe begreift das sogenannte Pactum antichreticum (den antichretischen Vertrag) in sich, wornach ein bestimmtes Kapital unter der Bedingung abgegeben wird, daß der Gläubiger ein Gut oder eine Sache so lange zur Nutznießung erhält, bis er für sein Kapital durch die jährlich eingehende Rente (T) bei dem Zinsfuß p vollständig entschädigt ist. Hiebei handelt es sich um die Bestimmung der Zeit der Nutznießung. Es versteht sich von selbst, daß $T > K.0{,}0p$ sein muß. Wäre $T = K.0{,}0p$, so würde das Pfand immer im Besitze des Nutznießers bleiben. Enthält die Zeit der Nutznießung (n) einen Bruchtheil, so kann nach dem Gesagten durch 9 die Größe der Entschädigung ermittelt werden, welche der Gläubiger anzusprechen hat.

Giebt Jemand auf ein Gut, dessen jährliches reines Einkommen zu 1500 Fl. angeschlagen ist, ein Kapital von 20000 Fl., so kann er bei 5procentiger jährlicher Verzinsung das Gut

$$n = \frac{lg\,1500 - lg\,(1500 - 20000\,.\,0{,}05)}{lg\,1{,}05} = \frac{4771213}{211893} = 22{,}517..$$

Jahre in Nutznießung behalten. Die Summe, welche der Nutznießer am Ende des 22sten Jahres noch zu erhalten hat, ist nach 9:

$$R = 20000\,.\,1{,}05^{22} - 1500\,.\,\frac{1{,}05^{22} - 1}{0{,}05} = 747{,}3928..\text{ Fl.}$$

Würde der Vertrag bei 4procentiger Verzinsung abgeschlossen, so dürfte die Nutznießung nur 19,432.. Jahre dauern. Die vorstehende Aufgabe kann auch nach den Gleichungen 7 und 8 gelöst werden. Dann dauert die Nutznießung 23 oder 20 Jahre, beginnt aber später.

§. 34.

Ein Kapital K soll durch die jährliche Abtragssumme T bei dem Zinsfuße p und jährlicher Verzinsung getilgt werden. Wie lange muß die Zahlung geleistet werden? Fällt der letzte Zahlungstermin nicht auf das Ende eines Jahres (enthält also n einen Bruchtheil), so soll die noch rückständige Schuld (R) durch gleiche Summen in den h letzten Jahren getilgt werden. Wie groß sind in diesem Falle die in den h letzten Jahren fälligen Tilgungssummen?

Um die vorliegende Frage zu beantworten, hat man zuerst die Zahl der Jahre (n) nach 1 §. 33 zu ermitteln. Ist n eine ganze Zahl, so ist die Aufgabe gelöst. Enthält n außer der ganzen Zahl noch einen Bruchtheil, so hat man nach 12 §. 31 die noch rückständige Schuld am Ende des $n$ten Jahres zu ermitteln. Dieser Rückstand ist dann auf die h letzten Jahre in gleichen zahlbaren Summen zu vertheilen. Dies kann nach 1 und

4 §. 31 geschehen, wenn dort die in Frage stehenden Summen einander gleichgesetzt werden. Nennt man nun die Summe, welche in den h letzten Jahren jährlich noch zu T genommen werden muß, um der Aufgabe zu genügen, M, so ist:

$$R = M.1{,}0p^{h-1} + M.1{,}0p^{h-2} + \ldots M.1{,}0p + M = M\frac{1{,}0p^{h}-1}{0{,}0p}.$$

Hieraus und aus 9 §. 33 erhält man folgende Gleichung:

$$K.1{,}0p^{n} - T.\frac{1{,}0p^{n}-1}{0{,}0p} = M.\frac{1{,}0p^{h}-1}{0{,}0p}.$$

Der Werth von M bestimmt sich sofort auf folgende Weise:

$$1)\ M = (K.1{,}0p^{n} - T\frac{1{,}0p^{n}-1}{0{,}0p})\frac{0{,}0p}{1{,}0p^{h}-1} = \frac{K.1{,}0p^{n}.0{,}0p}{1{,}0p^{h}-1} - T\frac{1{,}0p^{n}-1}{1{,}0p^{h}-1}$$

Die erste Darstellung erleichtert die Rechnung sehr, wenn man Tafeln besitzt, worin die Werthe der vorstehenden Ausdrücke angegeben sind.

Soll hiernach ein Kapital von 40000 Fl. durch die jährliche Summe von 2000 Fl. bei 4 Proc. getilgt und, im Fall n keine ganze Zahl giebt, der Rückstand auf die drei letzten Jahre gleichheitlich vertheilt werden, so ist nach 1 §. 33:

$$n = \frac{lg\,2000 - lg(2000-40000.0{,}04)}{lg\,1{,}04} = 41{,}0355\ldots$$

Jahre, und die in den drei letzten Jahren zu zahlende Summe ist:

$$M = (40000.1{,}04^{41} - 2000\frac{1{,}04^{41}-1}{0{,}04})\cdot\frac{0{,}04}{1{,}04^{3}-1} = 22{,}249..\text{ Fl.}$$

Die in diesen Jahren zu zahlende vollständige Summe ist hiernach 2022,249..Fl.

Anmerkung. Die in diesem und dem vorigen §. angegebenen Methoden über die Ermittelung des Werthes von n werden wohl allen Forderungen, welche hier gestellt werden können, einfach und sachgemäß entsprechen. Die erste in §. 33 gegebene Methode schließt sich am genauesten dem Sinne der Aufgabe an. Brune giebt in seiner Zinsrechnung, §. 33, pag. 160, eine Methode an, die in der ersten Anlage mit der zweiten hier in §. 33 angegebenen übereinkommt, aber darin von ihr abweicht, daß er den in n vorkommenden Bruchtheil maßgebend ansieht. Da er aber bei einer angestellten Prüfung findet, daß der aus der Formel sich ergebende Bruchtheil unrichtig ist, so rectificirt er ihn und giebt zu dem Ende eine weitläufige und mühevolle Rechnungsweise an. Durch die in 9 und 10 §. 33 angegebenen Formeln ist man aller dieser Mühe und Weitläufigkeit überhoben. Kästner (§. 67 u. ff.) und Koch (§. 80) sind der Ansicht, daß man den Rest der Schuld, im Falle n einen Bruch enthält, so lange unbezahlt lassen soll, bis er sammt Zinsen zur erforderlichen Summe (T) erwachsen ist. Dies steht aber weder mit der Aufgabe im Einklange, noch läßt es sich aus §. 30 als nothwendig folgern.

§. 35.

Eine Schuld K wurde durch die jährlich fällige Summe T in n Jahren getilgt. Wie groß ist der Zinsfuß, welcher der Tilgung bei jährlicher Verzinsung zu Grunde gelegt wurde?

Man hat, um diese Frage zu lösen, den Werth von p aus der Gleichung 1 §. 27:

$$1)\quad K = T.\frac{(1-1{,}0p^{-n})}{0{,}0p}$$

zu entwickeln. Hier bleiben in der Hauptsache die Bemerkungen in Kraft, welche zu 11 §. 25 gemacht wurden. Näherungsweise kann man auch diese Aufgabe lösen, wenn man $0{,}0p = q$ der Kürze wegen setzt. Entwickelt man nun das Binomium in der negativen Potenz n, so ist:

$$1-(1+q)^{-n}=nq-\frac{n(n+1)}{1.2}q^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}q^3-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}q^4\ldots$$

Wird nun durch q gemessen, so erhält man:

$$\frac{K}{T} = n - \frac{n(n+1)}{1.2}q + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}q^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}q^3.$$

Schließt man diese Reihe mit dem dritten Gliede, so ergiebt sich ein annähernder Werth für q, und man hat eine quadratische Gleichung aufzulösen. Hieraus ist:

$$2)\ q=\frac{3}{2(n+2)}+\sqrt{\left(\frac{6K}{n(n+1)(n+2)T}-\frac{6}{(n+1)(n+2)}+\frac{9}{4(n+2)^2}\right)}.$$

Wurde ein Kapital von 12610 Fl. in 3 Jahren durch die jährliche Summe von 4630,5 Fl. getilgt, so ist der Zinsfuß annähernd:

$$q = \frac{3}{10} - \sqrt{\left(\frac{12610}{46305} - 0{,}3 + 0{,}09\right)} = 0{,}3 - \sqrt{0{,}062334\ldots}$$
$$= 0{,}3 - 0{,}249666 = 0{,}05033\ldots$$

Hieraus läßt sich auf $q = 0{,}05$ schließen, was auch der richtige Zinsfuß ist. Je größer n wird, desto weniger werden die Glieder in der entwickelten Darstellung von $1{,}0p^{-n}$ convergiren. Daher wird q bei großem n einen Werth geben, der von dem wahren differirt, und größer als der wahre ist. Man kann demungeachtet die vorstehende Gleichung benutzen, denn man gewinnt durch sie den Vortheil, daß man die niederer liegenden Werthe für p kennen lernt, um sie bei der Substitution in 1 zu benutzen.

Man kann nun die Gleichungen 12 — 18 §. 31 auf die eben genannte Art behandeln und p aus ihnen darstellen. Setzt man zu dem Ende $h = n$ und $L = T.0{,}0p = q$, so ist:

$$S = K(1+q)^n - T\frac{(1+q)^n - 1}{q}.$$

Bezeichnet man ferner der Kürze wegen die Binomialcoefficienten durch

n_1, $n_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}$, $n_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, wie in §. 25 geschah, so entsteht, wenn die nöthigen Entwickelungen gemacht werden,

$$S = K(1 + n_1 q + n_2 q^2 + n_3 q^3 \ldots) - T(n_1 + n_2 q + n_3 q^2),$$

und hieraus:

$$S - K + nT = (nK - n_2 T)\ q + (n_2 K - n_3 T)\, q^2.$$

Dies führt zu folgender Darstellung:

$$3)\ q = -\frac{nK - n_2 T}{2(n_2 K - n_3 T)} = \sqrt{\left[\frac{S - K + nT}{n_2 K - n_3 T} + \left(\frac{nK - n_2 T}{2(n_2 K - n_3 T)}\right)^2\right]}$$

Diese Gleichung beantwortet näherungsweise folgende Frage: Jemand kann ein Kapital K auf Zinsen legen. Er braucht eine jährliche Rente T. Nach n Jahren will er über die Summe S verfügen. Zu welchem Zinsfuße muß er das Kapital anlegen, um seinen Zweck zu erreichen?

§. 36.

Während n Jahren wird eine Reihe von Zahlungen (T) gemacht, die jährlich um die Summe D zunehmen und von denen die erste T ist. Wie groß ist der Werth sämmtlicher Zahlungen (S) im Zeitpunkt der letzten Zahlung? Wie groß ist er im Anfange des Jahres, an welchem die erste Zahlung beginnt (K)?

Die Zahlungen selbst sind im Laufe der Jahre folgende T, $T + D$, $T + 2D$, $T + 3D$, . . . $T + (n-1)D$. Im Augenblicke der letzten Zahlung hat die erste $(n-1)$ Jahre, die zweite $(n-2)$ Jahre lang u. s. f. Zinsen getragen. Wendet man nun die Gleichung 1 §. 17 hierauf an, so ergiebt sich folgender Werth:

$$1)\ S = T.1{,}0p^{n-1} + (T+D)1{,}0p^{n-2} + \ldots(T+(n-2)D)1{,}0p + T+(n-1)D.$$

In dieser Reihe kommen die D verschiedene Male vor. Man kann sie ohne Werthänderung auf folgende Weise darstellen:

$$\begin{aligned}
S = {} & T\,1{,}0p^{n-1} + T\,1{,}0p^{n-2} + T\,1{,}0p^{n-3} + T\,1{,}0p^{n-4} + \ldots T\,1{,}0p + T \\
& + D\,1{,}0p^{n-2} + D\,1{,}0p^{n-3} + D\,1{,}0p^{n-4} + \ldots D1{,}0p + D \\
& + D\,1{,}0p^{n-3} + D\,1{,}0p^{n-4} + \ldots D1{,}0p + D \\
& + D\,1.0p^{n-4} + \ldots D1{,}0p + D \\
& \vdots \\
& D1{,}0p + D \\
& + D.
\end{aligned}$$

Zählt man nämlich die Glieder dieser Reihe in vertikaler Richtung zusammen, so erhält man wieder die Darstellung 1. Zählt man sie aber in horizontaler Richtung zusammen und wendet hiebei die Gleichung 2 §. 22 an, so ergiebt sich folgende Darstellung für 1:

$$S = T.\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} + \frac{D(1{,}0p^{n-1} - 1)}{0{,}0p} + \frac{D(1{,}0p^{n-2} - 1)}{0{,}0p} + \ldots \frac{D(1{,}0p^2 - 1)}{0{,}0p} + \frac{D(1{,}0p - 1)}{0{,}0p}$$

D erscheint in dieser Darstellung $(n-1)$ Mal als Factor und soll der Reihe nach mit den Potenzen von $1{,}0p$ und mit -1 in Verbindung treten. Nach dieser Bemerkung erhält man aus der vorstehenden Gleichung folgende:

$$S = T\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} - \frac{(n-1)D}{0{,}0p} + \frac{D}{0{,}0p}(1{,}0p + 1{,}0p^2 + \ldots . 1{,}0p^{n-1}),$$

oder wenn auch die hier vorkommende Reihe summirt wird,

$$2)\ S = T.\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} - \frac{(n-1)D}{0{,}0p} + \frac{D.1{,}0p}{0{,}0p}.\frac{1{,}0p^{n-1} - 1}{0{,}0p}.$$

Soll nun der Werth sämmtlicher Zahlungen auf den Anfang des ersten Zahlungsjahres zurückgebracht werden, so ist:

$$3)\ K = \frac{T}{1{,}0p^1} + \frac{T+D}{1{,}0p^2} + \frac{T+2D}{1{,}0p^3} + \frac{T+3D}{1{,}0p^4} + \ldots \frac{T+(n-2)D}{1{,}0p^{n-1}} + \frac{T+(n-1)D}{1{,}0p^n}$$

Diese Reihe läßt sich, wie die vorige, auf folgende Art zerlegen:

$$\begin{aligned} K = {} & \frac{T}{1{,}0p} + \frac{T}{1{,}0p^2} + \frac{T}{1{,}0p^3} + \ldots . \frac{T}{1{,}0p^{n-1}} + \frac{T}{1{,}0p^n} \\ & + \frac{D}{1{,}0p^2} + \frac{D}{1{,}0p^3} + \ldots . \frac{D}{1{,}0p^{n-1}} + \frac{D}{1{,}0p^n} \\ & + \frac{D}{1{,}0p^3} + \ldots . \frac{D}{1{,}0p^{n-1}} + \frac{D}{1{,}0p^n} \\ & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & \frac{D}{1{,}0p^{n-1}} + \frac{D}{1{,}0p^n} \\ & + \frac{D}{1{,}0p^n} \end{aligned}$$

Hieraus erhält man durch Anwendung der Formel 2 §. 22:

$$\begin{aligned} K = {} & \frac{T(1-1{,}0p^{-n})}{0{,}0p} + D\frac{1{,}0p^{-1} - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} + D\frac{1{,}0p^{-2} - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} + \ldots \\ & \ldots + D\frac{1{,}0p^{-n+2} - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} + D\frac{1{,}0p^{-n+1} - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} \\ = {} & T\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} - \frac{(n-1)D}{1{,}0p^n.0{,}0p} + \frac{D}{0{,}0p}\left(\frac{1}{1{,}0p} + \frac{1}{1{,}0p^2} + \ldots\ldots \frac{1}{1{,}0p^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Wird die eingeklammerte Reihe nach 2 §. 22 summirt, so entsteht:

$$\begin{aligned} 4)\ K &= T\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} - \frac{(n-1)D}{0{,}0p.1{,}0p^n} + D\frac{1-1{,}0p^{-n+1}}{0{,}0p^2} \\ &= T.\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p.1{,}0p^n} - \frac{(n-1)D}{0{,}0p.1{,}0p^n} + \frac{D(1{,}0p^{n-1} - 1)}{1{,}0p^{n-1}.0{,}0p^2}. \end{aligned}$$

Geschehen die Zahlungen unter den nämlichen Bedingungen in jedem $r$ten Theile des Jahres, so ist bei dem relativen Zinsfuß:

$$S = T1{,}0p_1^{rn-1} + (T+D)1{,}0p_1^{rn-2} + (T+2D)1{,}0p_1^{rn-3} \ldots\ldots (T+(rn-1)D)$$

$$K = \frac{T}{1{,}0p_1} + \frac{T+D}{1{,}5p_1^2} + \frac{T+2D}{1{,}0p_1^3} + \ldots\ldots \frac{T+(rn-1)D}{1{,}0p_1^{rn}}.$$

Hieraus wird auf die oben gezeigte Weise:

$$5)\ S = T\frac{1{,}0p_1^{rn}-1}{0{,}0p_1} - \frac{(rn-1)D}{0{,}0p_1} + D\,1{,}0p_1\,\frac{1{,}0p^{rn-1}-1}{0{,}0p_1^2}.$$

$$6)\ K = T\frac{1-1{,}0p_1^{-rn}}{0{,}0p_1} - \frac{(rn-1)D}{1{,}0p_1^{rn}\,.\,0{,}0p_1} + D\,\frac{1-1{,}0p_1^{-rn+1}}{0{,}0p_1^2}.$$

Geschehen die Kapitalanlagen jährlich und geht die Verzinsung in jedem $r$ten Theile des Jahres vor sich, so ist:

$$S = T.1{,}0p_1^{rn-r} + (T+D)1{,}0p_1^{rn-2r} + (T+2D)1{,}0p_1^{rn-3r} \ldots\ldots + T + (n-1)D$$

$$K = \frac{T}{1{,}0p_1^{r}} + \frac{T+D}{1{,}0p_1^{2r}} + \frac{T+2D}{1{,}0p_1^{3r}} + \ldots \frac{T+(n-1)D}{1{,}0p_1^{-rn}}.$$

$$\text{oder } 7)\ S = T\frac{1{,}0p_1^{rn}-1}{1{,}0p_1^{r}-1} - \frac{(n-1)D}{1{,}0p_1^{r}-1} + \frac{D(1{,}0p_1^{rn-r}-1)\,1{,}0p_1^{r}}{(1{,}0p_1^{r}-1)^2}.$$

$$8)\ K = T\frac{1-1{,}0p_1^{-rn}}{1{,}0p_1^{r}-1} - \frac{(n-1)D}{1{,}0p_1^{rn}(1{,}0p_1^{r}-1)} + \frac{D(1-1{,}0p_1^{-rn+r})}{(1{,}0p_1^{r}-1)^2}.$$

Wird der conforme Zinsfuß zu Grunde gelegt, so ergiebt sich, wenn die Verzinsung in jedem $r$ten Theile des Jahres vor sich geht,

$$9)\ S = T.\frac{1{,}0p^{n}-1}{1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1} - \frac{(rn-1)D}{1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1} + D\,1{,}0p^{\frac{1}{r}}\,\frac{1{,}0p^{n-\frac{1}{r}}-1}{(1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1)^2}.$$

$$10)\ K = T.\frac{1-1{,}0p^{-n}}{1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1} - \frac{(rn-1)D}{1{,}0p^{n}(1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1)} + D\frac{1-1{,}0p^{-n+\frac{1}{r}}-1}{(1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1)^2}.$$

Man erkennt leicht den Zusammenhang, welcher zwischen 2 und 4 stattfindet, denn 4 entsteht, wenn 2 mit $1{,}0p^n$ gemessen wird, wie sich dies aus der Bedeutung von 4 leicht folgert. Der nämliche Zusammenhang herrscht auch zwischen 5 und 6, 7 und 8 u. s. w. Vervielfacht man die Gleichung 3 oder 4 mit $1{,}0p^h$, so bringt man nach §. 31 den Werth dieser Zahlungen auf den Zeitpunkt zurück, an dem die $h$te Zahlung erfolgt, und man kann sofort durch Wiederholung der in diesem §., sowie des in dem angeführten §. beobachteten Verfahrens den Stand eines Anlehens (K) bestimmen, welches auf die oben angegebene Art durch steigende Summen getilgt wird. Hieraus erhält man folgende Gleichung:

$$11)\ S = K.1{,}0p^h - T\frac{1{,}0p^h - 1}{0{,}0p} + \frac{(h-1)D}{0{,}0p} - D.1{,}0p\frac{1{,}0p^{h-1}-1}{0{,}0p^2}$$

Hierin muß natürlich die Größe des Anlehens, die ursprüngliche Tilgungssumme T und der jährliche Zuschuß (D) bekannt sein.

Das Gesagte läßt sich leicht auf die Gleichungen 6, 8 und 10 übertragen, denen eine andere Tilgung und Verzinsung zu Grunde liegt.

Werden fünf jährliche Kapitalzahlungen gemacht, von denen die erste 1000 Fl. und jede folgende 100 Fl. mehr beträgt, so ist nach 2 ihr Werth zur Zeit der letzten Zahlung bei 4 Proc.:

$$S = 1000.\frac{1{,}04^5-1}{0{,}04} - \frac{4.100}{0{,}04} + \frac{100.1{,}04}{0{,}04}.\frac{1{,}04^4-1}{0{,}04} = 6457{,}1289 \text{ Fl.}$$

Zu Anfange des ersten Zahlungsjahres ist ihr Werth 5307,289... Fl. nach der Gleichung 4. — Wird ein Anlehen von 10 Millionen bei 4 Proc. und jährlicher Verzinsung so getilgt, daß im ersten Jahre 450000 Fl. und in jedem folgenden 10000 Fl. mehr abgetragen werden, so ist nach 11 der Stand der Schuld am Ende des 10ten Jahres:

$$S = 10000000.1{,}04^{10} - 450000.\frac{1{,}04^{10}-1}{0{,}04} + \frac{9.10000}{0{,}04} - \frac{10000.1{,}04}{0{,}04}.\frac{1{,}04^9-1}{0{,}04}$$
$$= 14802442{,}8 - 5402748{,}204 + 2250000 - 2751526{,}78$$
$$= 8898167{,}9 \text{ Fl.}$$

Beginnen aber die Abtragungen mit der Summe 500000 Fl., so ist der Stand der Schuld 8297862,5 Fl.

§. 37.

Die Tilgung eines Anlehens, namentlich eines Staatsanlehens, wird in der Regel nach einem zwischen Gläubiger und Schuldner voraus festgestellten Plane ausgeführt. Die Art und Weise, wie solche Tilgungspläne angelegt werden können, ist sehr mannigfaltig. Der Inhalt der §§. 27 — 36 zeigt, wie man im Allgemeinen hiebei zu verfahren hat und welche Bestimmungen nicht ohne Rechtsverletzung des einen oder des andern Theils außer Acht gelassen werden dürfen. Von den verschiedenen möglichen Arten, eine Schuld zu tilgen, soll noch folgende hervorgehoben werden.

Ein Anlehen K, das bei jährlicher Verzinsung zu p Proc. aufgenommen ist, soll so getilgt werden, daß am Ende des ersten Jahres q Proc. vom Kapitale abgetragen und die jährlichen Abtragssummen um w Proc. erhöht, und außerdem jährlich die laufenden Zinsen des Kapitals bezahlt werden. Wie geht die Tilgung dieser Schuld vor sich?

Behält man die in §. 28 aufgestellten Bezeichnungen bei und nennt die Abtragssummen, wie dort, der Reihe nach $A_1, A_2, A_3, \ldots$ so ist die Summe, welche am Ende des ersten Jahres abgetragen wird, $A_1 = K.0{,}0q$. Die Abtragssummen steigen jährlich um w Proc., daher wächst jede um den

$\left(\frac{w}{100}\right)$ten Theil, und der Maaßstab für diese Vergrößerung ist: $1 + \frac{w}{100}$ $= 1{,}0\,w$, da die fragliche Summe selbst dazu gerechnet werden muß. Hebt man nun die Abtragssumme des $r$ten Jahres (A_r) heraus, so ist die des $(r+1)$ten Jahres (A_{r+1}):

$$1) \quad A_{r+1} = A_r \,.\, 1{,}0\,w.$$

Hieraus ergiebt sich folgender Zusammenhang zur Ermittelung der Tilgungssummen für die verschiedenen Jahre:

$$2) \; A_2 = A_1\, 1{,}0\,w\,; \; A_3 = A_2\, 1{,}0\,w\,; \; A_4 = A_3 \,.\, 1{,}0\,w \,.\,.\,.\,.$$
$$\ldots A_{n-2} = A_{n-3}\, 1{,}0\,w, \; A_{n-1} = A_{n-2}\, 1{,}0\,w, \; A_n = A_{n-1}\, 1{,}0\,w.$$

Werden nun hierin die angezeigten Werthe für A_1, A_2, A_3... allmälig eingeführt, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

$$3) \; A_1 = K \,.\, 0{,}0\,q, \; A_2 = K \,.\, 0{,}0\,q \,.\, 1{,}0\,w, \; A_3 = K \,.\, 0{,}0\,q \,.\, 1{,}0\,w^2, \ldots.$$
$$\ldots A_{n-2} = K \,.\, 0{,}0q\; 1{,}0w^{n-3}; \; A_{n-1} = K\, 0{,}0q.1{,}0w^{n-2}, \; A_n = K.0{,}0q.1{,}0w^{n-1}$$

woraus sich folgendes Gesetz für die Größe der am Ende des $r$ten Jahres erforderlichen Abtragssumme erschließt.

$$4) \quad A_r = K\; 0{,}0\; q \;.\; 1{,}0\; w^{r-1}\;.$$

Da nun am Ende des $n$ten Jahres nach 4 §. 28 die Größe aller Abtragssummen

$$M_n = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n$$

ist, so ergiebt sich hieraus und aus 3 folgende Darstellung:

$$M_n = K \,.\, 0{,}0q + K \,.\, 0{,}0q \,.\, 1{,}0w + K\, 0{,}0q.1{,}0w^2 + \ldots K\, 0{,}0q.1{,}0w^{n-1}$$
$$= K \,.\, 0{,}0\,q\,(1 + 1{,}0\,w + 1{,}0\,w^2 + 1{,}0\,w^3 + \ldots 1{,}0\,w^{n-1}).$$

$$5) \; M_n = K \,.\, 0{,}0\,q \;.\; \frac{1{,}0\,w^n - 1}{0{,}0\;w} = \frac{K\,.\,q}{w}\,(1{,}0\;w^n - 1).$$

Zieht man nun diese Summe von dem Kapitale ab, so ergiebt sich hieraus der Stand der Schuld am Ende des $n$ten oder im Laufe des $(n+1)$ten Jahres (S_{n+1}):

$$6) \; S_{n+1} = K - M_n = K\left(1 - 0{,}0q \,.\, \frac{1{,}0\,w^n - 1}{0{,}0\;w}\right) = K\left(1 - \frac{q}{w}(1{,}0w^n - 1)\right).$$

Die Größe einer jeden Jahresleistung besteht aus der jeweiligen Abtragssumme (A_n) und den Zinsen der am Ende des verflossenen Jahres noch rückständigen Schuld 3 §. 28, ist also nach 4 und 6 dieses §.:

$$7) \; L_n = A_n + Z_n = K \,.\, 0{,}0\,q \,.\, 1{,}0\,w^{n-1} + K\left(1 - \frac{q}{w}\,(1{,}0\,w^n - 1)\right) 0{,}0\,p.$$

Geschieht die Verzinsung und Tilgung in jedem $r$ten Theile des Jahres, so ist für die eben angegebenen Werthe durch Anwendung der nämlichen Schlußweise:

$$8) \; A_{rn} = K\; 0{,}0\,q \;.\; 1{,}0\;\; {w_1}^{rn-1}; \quad 9) \; M_{rn} = K \;.\; 0{,}0\;q\; \frac{1{,}0\;{w_1}^{rn} - 1}{0{,}0\;w_1}$$

10) $S_{rn+1} = K\,(1-0{,}0q\,.\,\frac{1{,}0\,w_1^{rn}-1}{0{,}0\,w_1}) = K(1-\frac{q}{w_1}(1{,}0w_1^{rn}-1))$

11) $L_{rn} = K\,0{,}0\,q\,.\,1{,}0\,w^{rn-1} + K\,(1-\frac{q}{w_1}\,(1{,}0\,w_1^{rn}-1))\;0{,}0\,p_1$,

wenn $w_1 = \frac{w}{r}$ und $p_1 = \frac{p}{r}$ bedeutet. Geschieht die Verzinsung in jedem $r$ten Theil des Jahres, die Kapitalabtragung aber jährlich, so bleiben 4, 5 und 6 unverändert; die Größe einer Jahresleistung wird durch folgende Gleichung bestimmt:

12) $L_n = K\,0{,}0\,q\,.\,1{,}0\,w^{n-1} + K(1-0{,}0\,q\,.\,\frac{1{,}0\,w^n-1}{0{,}0\,w})\;0{,}0\,p_1$.

Die Größe einer Leistung im Laufe des $(n+1)$ten Jahres ist:

13) $L_{rn-x} = K\,(1-0{,}0\,q\,\frac{1{,}0\,w^n-1}{0{,}0\,w})\;0{,}0\,p_1$.

Diese Gleichungen gelten, wenn der relative Zinsfuß zu Grunde gelegt wird. Für den conformen gelten unter den zu 8—11 genannten Bedingungen:

14) $A_{rn} = K.0{,}0\,q.1{,}0\,w^{n-\frac{1}{r}}$; 15) $M_{rn} = K.0{,}0\,q\,.\,\frac{1{,}0\,w^n-1}{1{,}0\,w^{\frac{1}{r}}-1}$

16) $S_{rn+1} = K\,(1-0{,}0\,q\,.\,\frac{1{,}0\,w^n-1}{1{,}0\,w^{\frac{1}{r}}-1})$

17) $L_{rn} = K.0{,}0\,q\,.\,1{,}0\,w^{n-\frac{1}{r}} + K(1-0{,}0\,q\,\frac{1{,}0\,w^n-1}{1{,}0\,w^{\frac{1}{r}}-1})(1{,}0\,p^{\frac{1}{r}}-1)$

Werden an einem Anlehen von 10 Millionen im ersten Jahr 0,5 Proc. und in jedem folgenden Jahre 6 Proc. mehr getilgt, so ist nach 6 der Stand der Schuld am Ende des 10ten Jahres:

$$S_{11} = 10000000\;(1-\frac{1}{12}\;(1{,}06^{10}-1)) = 9340960{,}253\;..\;\text{Fl.}$$

§. 38.

Aus den bisher gefundenen Resultaten lassen sich noch weitere, nicht unwichtige Ableitungen machen. Soll D aus 4 §. 36 dargestellt werden, so hat man aus der zweiten Form durch eine einfache Veränderung:

$$K.1{,}0\,p^n - T\,.\,\frac{1{,}0\,p^n-1}{0{,}0\,p} = -\frac{(n\text{-}1)\,D.0{,}0p}{0{,}0\,p^2} + \frac{D(1{,}0p^{n-1}-1).1{,}0p}{0{,}0\,p^2}$$

$$= D\,\frac{1{,}0\,p^n - 1{,}0p - (n-1).0{,}0p}{0{,}0\,p^2}$$

also: 1) $D = (K\,.\,1{,}0p^n - T\,.\,\frac{1{,}0p^n-1}{0{,}0\,p})\frac{0{,}0\,p^2}{1{,}0p^n - 1{,}0p - (n\text{-}1)0{,}0p}$

Diese Gleichung bestimmt die Zunahme, wenn eine Schuld durch steigende Zahlungen in einer bestimmten Zeit (n Jahren) abgetragen werden soll. Auf gleiche Weise läßt sich D aus 6, 8 oder 10 §. 36 ableiten. Soll w aus 6 §. 37 entwickelt werden, so hat man das §. 25 angegebene Verfahren anzuwenden. Schreibt man sofort S statt S_{n+1} und v statt $0{,}0\,w$, so ist:

$$S = K\,(1 - 0{,}0\,q\,.\,\frac{(1+v)^n - 1}{v}) = K - K\,.\,0{,}0\,q\,\frac{(1+v)^n - 1}{v}$$

$$\text{oder}\,.\,\frac{K\text{-}S}{K.0{,}0q} = \frac{(1+v)^n - 1}{v} = n + n_2\,v + n_3\,v^2 + \ldots$$

wenn $n_2 = \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}$ und $n_3 = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ bedeutet. Hieraus erhält man:

$$2)\;0{,}0w = -\frac{3}{2(n\text{-}2)} + \sqrt{\left(\frac{6\,(K\text{-}S)}{0{,}0qn(n\text{-}1)(n\text{-}2)K} - \frac{6}{(n\text{-}1)(n\text{-}2)} + \frac{9}{4\,(n\text{-}2)^2}\right)}$$

Diese Gleichung giebt annähernd an, um wie viele Procente die jährliche Tilgungssumme zunehmen muß, um ein Kapital K in n Jahren bis auf die Summe S abzutragen. Soll das Kapital ganz getilgt werden, so ist $S = 0$ zu setzen und man hat aus 2:

$$3)\;0{,}0\,w = -\frac{3}{2\,(n\text{-}2)} + \sqrt{\left(\frac{600}{qn(n\text{-}1)(n\text{-}2)} - \frac{6}{(n\text{-}1)(n\text{-}2)} + \frac{9}{4\,(n\text{-}2)^2}\right)}$$

Man sieht, daß die Größe der zu tilgenden Summe in der vorliegenden Frage gleichgültig ist. Die Zahl der Jahre, worin unter den in §. 36 angegebenen Bedingungen ein Kapital K abgetragen wird, wird sich wohl am besten durch Substitution bestimmen, wobei in vorkommenden Fällen einige Versuche zum Zwecke führen werden.

Aus 6 §. 37 bestimmt sich die Zahl der Jahre, welche erforderlich ist, um eine Schuld K auf die Summe S zurückzubringen. Löſ't man die Klammer auf, so hat man aus der zweiten Form:

$$\frac{S}{K} = 1 - \frac{q}{w}\,1{,}0w^n + \frac{q}{w}\;\text{oder:}\;1{,}0\,w^n = 1 + \frac{w}{q} - \frac{w\,S}{q\,K}$$

und hieraus:

$$4)\;n = lg\left(\frac{w+q}{q} - \frac{w\,S}{q\;K}\right) : lg\;1{,}0\,w.$$

Soll die Zeit bestimmt werden, welche erforderlich ist, um die Schuld ganz zu tilgen, so ist $S = 0$ zu setzen, und man hat:

$$5)\;\;n = \frac{lg(w+q) - lg\,q}{lg\,1{,}0\,w}.$$

Führt n auf eine ganze Zahl und einen Bruch, so gelten wegen Ermittelung des Werthes von n die schon mehrfach gemachten Bemerkungen.

Es läßt sich nun auch die Frage beantworten: Wie müssen die Jahresleistun-

gen unter einander beschaffen sein, wenn die Tilgung einer Schuld durch gleiche, steigende oder fallende Summen vor sich gehen soll?

Um diese Frage ganz allgemein zu beantworten, hat man die Werthe zweier auf einander folgenden Zahlungen zu vergleichen. Hiezu dient die Darstellung 5 und 6 §. 28. Stellt man nämlich die Werthe der Gesammtleistungen des $h$ten und $(h+1)$ten Jahres zusammen, so ist:

$$L_h = A_h + (A_h + A_{h+1} + A_{h+2} \ldots A_n)\ 0{,}0\,p$$

$$L_{h+1} = A_{h+1} + (A_{h+1} + A_{h+2} + A_{h+3} \ldots A_n)\ 0{,}0\,p.$$

Die Verschiedenheit dieser Werthe kann nur in den unter sich verschiedenen Größen liegen. Es wird daher L_{h+1} größer, kleiner, oder so groß als L_h sein, je nachdem sich $A_h + A_h\ 0{,}0\,p$ zu A_{h+1}, oder was dasselbe ist, je nachdem sich A_{h+1} zu $A_h\ 1{,}0\,p$ verhält. Dies führt zur Unterscheidung folgender drei Fälle:

6) $A_{h+1} > A_h\ 1{,}0\,p$; $A_{h+1} < A_h\ 1{,}0\,p$; $A_{h+1} = A_h\ .\ 1{,}0\,p$.

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

7) Wachsen die Kapitalabtragungen eines Anlehens in größerem Verhältnisse als in dem des Zinsfußes $1 : 1{,}0\,p$ oder $100 : 100 + p$, so nehmen auch die Gesammtleistungen zu, oder die Kapitaltilgung geht in steigender Progression vor sich.

8) Wachsen die Kapitalabtragungen in geringerem Verhältnisse als $1 : 1{,}0\,p$, so geht die Tilgung des Kapitals in abnehmender Progression vor sich. Dasselbe gilt, wenn die Kapitalabtragungen gleich sind.

9) Wachsen die Kapitalabtragungen in dem Verhältnisse des Zinsfußes $1 : 1{,}0\,p$, so geht die Tilgung des Kapitals durch gleiche Summen vor sich.

Hiebei ist die Größe der ersten Kapitalabtragung (A_1) gleichgültig. Von ihr und der Art, wie die Tilgung vor sich geht, hängt die Tilgungszeit des Anlehens ab. Die eben angeführten Sätze gelten auch für andere Zeitabschnitte als Jahresfristen.

§. 39.

Ein Staat will ein Anlehen (K) zu dem Zinsfuße p machen und es in n Jahren durch die jährlich zu zahlenden Summen $L_1, L_2, L_3 \ldots L_n$ tilgen. Jemand will das Anlehen unter der Bedingung übernehmen, daß ein niederer Zinsfuß q gestattet werde. Der Staat willigt ein. Zu welchem Curse kann das Anlehen abgegeben werden? oder welche Summe muß nominell dem Staate angeschrieben werden, damit Gläubiger und Schuldner keinen Schaden haben?

Unter den Summen $L_1, L_2, L_3 \ldots$ sind solche zu verstehen, welche die Kapitalabtragungen und die jährlichen Zinszahlungen enthalten. Hiernach und nach 17 §. 28 gilt folgende Gleichung:

$$1)\quad K = \frac{L_1}{1{,}0p} + \frac{L_2}{1{,}0p^2} + \frac{L_3}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{L_n}{1{,}0p^n}.$$

Da nun durch die Festsetzung der Summen L_3, L_2, L_3 . . ., welche in dem 1sten, 2ten, 3ten Jahre u. s. w. gezahlt werden müssen, der Tilgungsplan für das aufzunehmende Anlehen gegeben ist, so sind hiemit auch die Bedingungen gegeben, welche der Staat zu erfüllen hat. Die Tilgungssummen L_1, L_2, L_3 . . . müssen nun, wie sich wohl von selbst versteht, so eingerichtet sein, daß mit Auszahlung der letzten Summe auch alle Ansprüche des Gläubigers auf Zinsen und Kapitaltilgung erloschen sind. Deswegen müssen sie auch unverändert beibehalten werden, wenn auch der ganzen Unternehmung ein anderer Zinsfuß zu Grunde gelegt wird, denn mit einer Aenderung der Theilzahlungen würde eine Aenderung des Planes und dadurch ein Vortheil oder Nachtheil für den Gläubiger oder Schuldner verbunden sein.

Um nun die vorliegende Frage zu beantworten, ist den gemachten Bemerkungen zufolge noch nöthig, sämmtliche Theilzahlungen auf den gegenwärtigen Werth bei dem veränderten Zinsfuße q zurückzubringen. Dieser Werth giebt dann die Größe des erforderlichen Kapitals an, um die Gesammtleistungen des Staates in dem Zinsfuß q auszugleichen. Dadurch ist dann die Aufgabe gelöst. Nun kann q kleiner oder größer als der ursprüngliche Zinsfuß (p) sein. Ist q kleiner als p, so wird natürlich der in dem Zinsfuße q reducirte Kapitalwerth größer als der des aufzunehmenden Kapitals K sein; ist aber q größer als p, so wird der reducirte Kapitalwerth kleiner sein, als der des aufzunehmenden Kapitals K. Nennt man nun im ersten Fall den sich ergebenden Kapitalwerth $K + x$, so erhält man denselben, wenn man die Theilzahlungen L_1, L_2, L_3 . . . L_n in dem Zinsfuße q rabattirt. Hiernach ist für $q < p$:

$$2)\quad K + x = \frac{L_1}{1{,}0q} + \frac{L_2}{1{,}0q^2} + \frac{L_3}{1{,}0q^3} + \ldots \frac{L_n}{1{,}0q^n}.$$

Ist aber q größer als p, so wird der reducirte Kapitalwerth kleiner als der des fraglichen Anlehens. Nennt man diesen $K - x$, so erhält man:

$$3)\quad K - x = \frac{L_1}{1{,}0q} + \frac{L_2}{1{,}0q^2} + \frac{L_3}{1{,}0q^3} + \ldots \frac{L_n}{1{,}0q^n}.$$

Die Vergleichung von 2 und 3 zeigt, daß man die genannten Fälle nicht besonders zu unterscheiden hat, denn man erhält aus jeder dieser Gleichungen den gesuchten Werth immer richtig. Er wird nominell größer als der des Anlehens, wenn q kleiner als p ist, und nominell kleiner sein, wenn q größer als p ist. Ist nun der gesuchte Werth ermittelt, so läßt sich auch der Werth bestimmen, zu welchem jede Obligation von 100 Fl. ausgegeben werden muß. Bezeichnet man nun den Curs durch C, so dient hiezu die Proportion:

$$K+x : K = 100 : C$$

und hieraus:

$$4)\quad C = \frac{K.\,100}{K+x} = 100.\frac{L_1 1{,}0p^{-1} + L_2 1{,}0p^{-2} + L_3 1{,}0p^{-3} + \ldots L_n.1{,}0p^{-n}}{L_1 1{,}0q^{-1} + L_2 1{,}0q^{-2} + L_3 1{,}0q^{-3} + \ldots L_n 1{,}0q^{-n}}$$

wenn aus 1 und 2 die Werthe für K und $K+x$ eingeführt werden.

Hiedurch ist die vorliegende Frage beantwortet, und der Staat hat von dem Gläubiger die Summe K zu erhalten und nominell das Kapital $(K+x)$ in Obligationen auszugeben.

Daß nun der Staat auf die angegebene Weise, wornach er nur C Fl. statt 100 bekommt, nicht Schaden leidet, läßt sich so zeigen. Damit er die gewünschte Summe K erhalte, muß er so viele Obligationen zu 100 Fl. ausstellen, als Hundert in dem nominell erforderlichen Kapitale enthalten ist. Nennt man die Anzahl der Obligationen Z, so hat man:

$$5)\quad Z = \frac{K+x}{100}.$$

Hiernach müssen im Ganzen Z Obligationen zu 100 Fl. ausgegeben werden, und er erhält also auch $Z\,C$ Fl. für diese. Die Summe, welche er hiernach bekommt, ergiebt sich, wenn der Werth für C und Z eingeführt wird. Es entsteht sofort:

$$6)\quad C.Z = Z.\frac{K.100}{K+x} = \frac{K+x}{100}.\frac{K.100}{K+x} = K.$$

Nicht immer sind die Werthe der Theilzahlungen L_1, L_2, L_3, L_4 .. direct gegeben. Es genügt, nur die Elemente zu kennen, woraus sie sich ermitteln lassen. Sind sie ermittelt, so ist der Rückgang auf das erforderliche Kapital durch 2 angegeben.

Viel einfacher wird die Beantwortung der Frage, wenn unter den angegebenen Bedingungen ein Anlehen K in n Jahren bei dem Zinsfuß p durch gleiche Abtragssummen getilgt werden soll. Die Größe dieser Summen ist zwar vorerst nicht bekannt. Sie läßt sich aber ermitteln. Nennt man sie T, so ist aus 1 §. 32:

$$7)\quad T = K.\frac{0{,}0\,p}{1-1{,}0p^{-n}} = \frac{K.1{,}0\,p^n.0{,}0\,p}{1{,}0\,p^n-1}.$$

Aus 2 ergiebt sich die Größe des nominell anzuschreibenden Kapitals, wenn $L_1 = L_2 = L_3 \ldots\ldots = L_n = T$ gesetzt wird:

$$8)\quad K+x = \frac{T}{1{,}0\,q} + \frac{T}{1{,}0q^2} + \frac{T}{1{,}0q^3} \ldots\ldots = T.\frac{1-1{,}0q^{-n}}{0{,}0\,q} = T.\frac{1{,}0\,q^n-1}{0{,}0q.10q^n}$$

Wird T aus 7 in 8 eingeführt, so entsteht:

$$9)\quad K+x = K.\frac{0{,}0\,p}{1-1{,}0p^{-n}}.\frac{1-1{,}0q^{-n}}{0{,}0\,q} = K.\frac{1{,}0\,p^n.0{,}0\,p\,(1{,}0q^n-1)}{(1{,}0p^n-1).1{,}0q^n.0{,}0q}.$$

Hiernach ist der Curs aus 4:

10) $C = 100 \cdot \frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p} \cdot \frac{0{,}0q}{1-1{,}0q^{-n}} = 100 \cdot \frac{(1{,}0p^n - 1)\,1{,}0q^n \cdot 0{,}0q}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p(1{,}0q^n - 1)}$.

Man sieht, daß die Größe des Kapitals keinen Einfluß auf die Bestimmung des Curses hat, und daß dieser nur von der Tilgungszeit und von den beiden Zinsfüßen p und q abhängt.

Die Gleichung 10 läßt sich, wie man leicht erkennt, ganz einfach aus 4 ableiten, wenn man dort alle Theilzahlungen unter sich gleich setzt. Die hier gemachten Schlüsse gelten auch dann, wenn andere Zeitabschnitte als Jahre bei der Kapitaltilgung gewählt werden. Geht die Tilgung durch gleiche Summen und jährlich, die Verzinsung aber in jedem $r$ten Theile des Jahres vor sich, so ergiebt sich für den relativen Zinsfuß, wenn die nöthigen Entwickelungen gemacht werden, folgende Gleichung:

11) $K + x = K \cdot \frac{(1{,}0p_1^{\,r} - 1)}{1-1{,}0p_1^{\,-rn}} \cdot \frac{1-1{,}0q_1^{\,-rn}}{1{,}0q_1^{\,r} - 1} = K \cdot \frac{1{,}0p_1^{\,rn}(1{,}0p_1^{\,r}-1)(1{,}0q_1^{\,rn}-1)}{(1{,}0p_1^{\,rn}-1)1{,}0q_1^{\,rn}(1{,}0q_1^{\,r}-1)}$

12) $C = 100 \cdot \frac{(1-1{,}0p_1^{\,-rn})(1{,}0q_1^{\,r}-1)}{(1{,}0p_1^{\,r}-1)\,(1-1{,}0q_1^{\,-rn})} = 100 \cdot \frac{(1{,}0p_1^{\,rn}-1)1{,}0q_1^{\,rn}\,(1{,}0q_1^{\,r}-1)}{1{,}0p_1^{\,rn}\,(1{,}0p_1^{\,r}-1)(1{,}0q_1^{\,rn}-1)}$.

Geschieht die Tilgung in jedem $r$ten Theile des Jahres, so ist für den relativen und conformen Zinsfuß:

13) $K + x = K \cdot \frac{0{,}0p_1(1-1{,}0q_1^{\,-rn})}{(1-1{,}0p_1^{\,-rn})0{,}0q_1}$; 14) $K + x = K \cdot \frac{(1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1)(1-1{,}0q^n)}{(1-1{,}0p^n)(1{,}0q^{\frac{1}{r}}-1)}$

15) $C = 100 \cdot \frac{(1-1{,}0p_1^{\,-rn})\,0{,}0q_1}{0{,}0p_1\,(1-1{,}0q_1^{\,-rn})}$; 16) $C = 100 \cdot \frac{(1-1{,}0p^{-n})\,(1{,}0q^{\frac{1}{r}}-1)}{(1{,}0p^{\frac{1}{r}}-1)\,(1-1{,}0q^{-n})}$.

Die Grenze, welcher sich n (die Tilgungszeit) immer mehr nähern kann, ohne sie jedoch zu erreichen, ist ∞. Wird nun $n = \infty$ in 10 gesetzt, so wird $\frac{1}{1{,}0p^n} = 0$ und $\frac{1}{1{,}0p^n} = 0$. Hieraus und aus 9 folgt:

17) $C = 100 \cdot \frac{q}{p}$, 18) $K + x = K \cdot \frac{p}{q}$.

Der Curs nähert sich immer mehr dem Verhältnisse von $q:p$, je größer n wird. Dies ist bei einer ewigen Rente der Fall. Will daher der Staat eine ewige fünfprocentige Rente in eine vierprocentige verwandeln, so ist der Curs, nach 17, $C = 100 \cdot \frac{4}{5} = 80$ und der Nennwerth $K + x = 100 \cdot \frac{5}{4} = 125$, und es ist in der That einerlei, ob er 125 Fl. bei 4 Proc. oder 100 Fl. bei 5 Proc. verzinst.

Die vorstehenden Bemerkungen lassen sich auch auf den Inhalt der §§. 35 und 36 anwenden, worin andere Arten von Kapitaltilgungen, als die

in diesem §. berührte, angegeben sind. Wie nun auch die Tilgungs-Pläne unter einander verschieden sein mögen, so werden doch immer die Gleichungen 1, 2 und 4 dieses §. die Grundlage für den Calcul bilden, wobei derselbe nach Beschaffenheit des Tilgungsplanes bald mehr, bald weniger zusammengesetzt sein kann. Wer mehr über diesen Gegenstand unterrichtet zu sein wünscht, der findet eine weitere Ausführung in meiner Schrift: Theorie der Lotterie-Anlehen. §. 10, 11, 15 und 16, wo eine Anwendung der hier aufgestellten Principien auf die Großherzoglich Badischen Staats-Anlehen gemacht ist.

Ein Verdeutlichung des Gesagten durch besondere Fälle ergiebt sich ohne weitere Schwierigkeit. Soll ein Staats-Anlehen, das in 50 Jahren durch jährliche, gleiche Summen getilgt werden soll, aus einem 4procentigen in ein 3,5 procentiges verwandelt werden, so ist aus 10 der Curs, zu dem es abgegeben werden kann:

$$C = 100 \cdot \frac{(1{,}04^{50} - 1)}{1{,}04^{50}.0{,}04} \cdot \frac{1{,}035^{50}.0{,}035}{1{,}035^{50} - 1} = 91{,}586 \ldots \text{Fl.}$$

Soll das Kapital in 80 Jahren unter den genannten Bedingungen getilgt werden, so stellt sich der Curs auf 89,407 . . Fl.

Zusatz: Mit den hier gegebenen Mitteln wird man im Stande sein, über den Werth der Anerbieten zu Kapitaltilgungen bei verschiedenem Zinsfuße zu urtheilen. Es wird zu dem Ende nöthig, die Nennwerthe der Kapitalien zu bestimmen und sie untereinander zu vergleichen, oder den Werth des einen Kapitals auf den Nennwerth bei einem gegebenen Zinsfuß zurückzubringen und hieraus den Curs zu vergleichen. Dies soll an folgendem Falle gezeigt werden.

Ein Anlehen von 10 Millionen, das in 50 Jahren in gleichen jährlichen Summen getilgt werden soll, will ein Unternehmer mit einem Curse von 91 Fl. bei 3,5 Proc., ein zweiter mit einem Curse von 99 Fl. bei 4 Proc. übernehmen. Welches Anerbieten ist vortheilhafter?

Um die Frage zu beantworten, wird man am einfachsten den Werth der beiden Anerbieten auf den Nennwerth zurückführen. Der Nennwerth eines Kapitals K bei einem bestimmten Curse C ergiebt sich aus der oben angeführten Proportion und ist:

$$19)\quad K + x = \frac{K.100}{C.}.$$

Hiernach hat der Staat bei dem zweiten Anerbieten eine Schuld von $\frac{10000000.100}{99} = 10101010{,}101$ . . Fl. bei 4 Procent aufzunehmen, um ein Kapital von 10 Mill. zu erhalten. Der Nennwerth dieses Kapitals ist, wenn es in ein 3,5procentiges nach 10 verwandelt wird, nach 9:

$$K+x = 10101010{,}101 \,.\, \frac{0{,}04(1-1{,}035^{-50})}{(1-1{,}04^{-50})\ 0{,}035} = 10953443{,}535\ldots \text{Fl.}$$

Der Nennwerth eines 3,5 procentigen Anlehens bei einem Curse von 91 Fl. ist nach 19:

$$K+x = \frac{10000000\,.\,100}{91} = 10989010{,}98\ \ldots \text{Fl.}$$

Hiernach ist das zweite Anerbieten vortheilhafter, als das erste. Zu dem nämlichen Resultate führt die zweite Methode. Weitere hieher gehörige Ausführungen sind in der vorhin angeführten Schrift nachzusehen.

§. 40.

Die Summen $T_1, T_2, T_3, \ldots T_n$ sollen jährlich und zwar unverzinslich gezahlt werden. Man will sämmtliche Zahlungen auf einmal machen. Wann müssen sie bei dem Zinsfuße p gemacht werden?

Nennt man den Werth aller dieser Zahlungen am Anfange des Jahres der ersten Zahlung K, so ist nach 17 §. 28:

$$1)\ K = \frac{T_1}{1{,}0p} + \frac{T_2}{1{,}0p^2} + \frac{T_3}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{T_n}{1{,}0p^n}.$$

Rechnet man nun den Zeitpunkt, in welchem sämmtliche Zahlungen gemacht werden sollen, von dem Anfange des ersten Jahres an und nennt den zwischenliegenden Zeitraum x, so kann man den Werth der vorstehenden Kapitalzahlungen auf den Zeitpunkt x zurückbringen, wenn man nach 5 §. 31 mit $1{,}0\,p^x$ die Gleichung 1 vervielfacht. Dadurch entsteht:

$$2)\ K\ 1{,}0\,p^x = \left(\frac{T_1}{1{,}0p} + \frac{T_2}{1{,}0p^2} + \frac{T_3}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{T_n}{1{,}0p^n}\right) 1{,}0\,p^x.$$

In diesem Zeitpunkte soll nun die ganze Summe gezahlt werden, daher muß der Werth von 2 dieser Summe gleich sein. Setzt man nun der Kürze wegen $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots T_n = S$, so hat man hieraus $K\,.\,1{,}0\,p^x = S$, und es stellt sich sofort x durch folgende Gleichung dar:

$$3)\ \ x = \frac{lgS - lgK}{lg\,1{,}0\,p} = \frac{lg\,(T_1+T_2+T_3+..T_n) - lg\,K}{lg\,1{,}0\,p}.$$

Führt x auf eine ganze und gebrochene Zahl (v), so ermittelt sich der Werth des Bruches durch folgende Gleichung:

$$4)\ \ v = \frac{S\,.\,100}{p\,.\,K\,1{,}0p^x} - \frac{100}{p} = \frac{100\,(T_1+T_2+T_3\ldots.T_n)}{p\,.\,K\,.\,1{,}0\,p^x} - \frac{100}{p}$$

Hiernach wird vorerst die Berechnung von K nöthig, um die Frage beantworten zu können. Einfacher wird die Ermittelung von x, wenn jährlich gleiche Summen gezahlt werden. Die Summe aller Theilzahlungen ist dann $n\,T = S$, der Werth von K ist dann nach 1 §. 27: $K =$

$T\,\frac{1-1{,}0\,p^{-n}}{0{,}0\,p}$. Es ist also auch $T\,.\,\frac{1-1{,}0\,p^{-n}}{0{,}0\,p}\,.\,1{,}0\,p^{x} = n\,T$ und somit fällt T aus dem Calcul. Hiernach ist:

$$5)\quad x = \left(lgn - lg\,\frac{1-1{,}0\,p^{-n}}{0{,}0\,p}\right) : lg\,1{,}0\,p.$$

$$6)\quad v = \frac{100\,.\,n}{p\,.\,1{,}0\,p^{x}}\,.\,\frac{0{,}0\,p}{1-1{,}0p^{-n}} - \frac{100}{p}.$$

Daß diese Schlüsse auch dann noch gelten, wenn die Zahlungen in anderen Zeitabschnitten als Jahresfristen gemacht werden, eben so daß sie für den relativen und conformen Zinsfuß gelten, ist leicht ersichtlich.

Sind 1000 Fl. in 10 nach einander folgenden Jahren unverzinslich zu zahlen und sollen sie auf einmal bei dem Zinsfuß 4 gezahlt werden, so müssen sie nach 5:

$$x = \left(lg\,10 - lg\,\frac{1-1{,}04^{-10}}{0{,}04}\right) : lg\,1{,}04 = 5{,}3378\ldots$$

Jahre nach dem Anfange des Jahres, worin die erste Zahlung erfolgt, gezahlt werden. Da x einen Bruchtheil enthält, so kann man ihn nach 6 corrigiren. In diesem Falle erhält man:

$$v = \frac{100\,.\,10}{4\,.\,1{,}04^{5}}\,.\,\frac{0{,}04}{1-1{,}04^{-10}} - 25 = 0{,}335\ldots$$

Die Differenz ist, wie man sieht, unbedeutend. Wendet man die in §. 15 aufgestellten Formeln an, so findet man $x = 5{,}5$. Die Consequenz der in diesem Kapitel aufgestellten Sätze verlangt, die hier gegebene Methode für die richtige zu halten.

§. 41.

Ein Kapital K wird zu p Proc. auf n Jahre so angelegt, daß die jährlich fallenden Zinsen zu q Proc. verzinst werden sollen. Wie groß ist der Werth S des so angelegten Kapitals mit Zinses-Zinsen am Ende des $n$ten Jahres?

Die jährlich fällig werdenden Zinsen sind $Z = K\,.\,0{,}0\,p$ nach §. 2. Betrachtet man nun jede so fällig werdende Summe für sich, so soll sie nach der Aufgabe zu q Proc. verzinst und mit Zinses-Zinsen in Rechnung gebracht werden. Dies geschieht durch Anwendung der Formel 1 §. 17. Man hat daher den eben angegebenen Werth für die verschiedenen Jahresfristen bei dem Zinsfuße q anzulegen und mit Zinses-Zinsen für die Jahre $n-1$, $n-2$, $n-3$, . . . 3, 2, 1, 0 in Calcul zu nehmen. Dies führt zu folgender Darstellung:

$$1)\quad S_1 = K.0{,}0p\,1{,}0q^{n-1} + K0{,}0p.1{,}0q^{n-2} + \ldots K.0{,}0p.1{,}0q + K.0{,}0q$$

und diese selbst wieder nach §. 22 zu folgender:

$$2)\quad S_1 = K\,.\,0{,}0\,p\,.\,\frac{1{,}0\,q^n - 1}{0{,}0\,q}.$$

Hiezu kommt nun noch das ursprüngliche Kapital K und man hat:

$$3)\quad S = K + K\,.\,0{,}0\,p\,.\,\frac{1{,}0\,q^n - 1}{0{,}0\,q} = K\left(1 + 0{,}0\,p\,\frac{1{,}0\,q^n - 1}{0{,}0\,q}\right).$$

Die Richtigkeit dieser Schlüsse und der aus ihnen abgeleiteten Gleichung ergiebt sich dadurch, daß die Gleichung 3 in 1 §. 17 übergeht, wenn $p = q$ ist, also wenn die Hauptzinsen und Zinses-Zinsen nach dem nämlichen Zinsfuß genommen werden. Man erhält alsdann $S = K\,1{,}0\,p^n$, wie dort.

Bestimmt man den Werth von K aus der Gleichung 2 und schreibt dann R statt K und K statt S, so erhält man:

$$4)\quad R = K : \left(1 + 0{,}0\,p\,\frac{1{,}0q^n - 1}{0{,}0q}\right) = \frac{0{,}0\,q\;K}{0{,}0\,q + 0{,}0\,p\,(1{,}0\,q^n - 1)}.$$

Diese Gleichung beantwortet folgende Frage: Ein Kapital K ist nach n Jahren unverzinslich fällig. Es soll sogleich bezahlt werden. Wie groß ist sein gegenwärtiger Werth, wenn die Zinsen des Kapitals (Hauptzinsen) zu p Proc. und die Zinsen von den Zinsen zu q Proc. gerechnet werden?

Die Richtigkeit der Gleichung 4 bestätigt sich, wenn $q = p$ gesetzt wird, oder wenn die Hauptzinsen und Zinses-Zinsen im nämlichen Zinsfuße genommen werden. Man erhält dann $R = \frac{K}{1{,}0\,p^n}$, die nämliche Gleichung, welche in 1 §. 26 gefunden wurde.

Werden die Zinsen in jedem $r$ten Theile des Jahres gezahlt, so ist aus den nämlichen Gründen bei dem relativen und conformen Zinsfuße:

$$5)\quad S = K\left(1 + 0{,}0\,p_1\,\frac{1{,}0\,{q_1}^{rn} - 1}{0{,}0\,q_1}\right);\quad 6)\quad S = K\left(1 + (1{,}0\,p^{\frac{1}{r}} - 1)\,\frac{1{,}0\,q^n - 1}{1{,}0\,q^{\frac{1}{r}} - 1}\right)$$

Werden die Zinsen zährlich gezahlt, geht aber ihre Verzinsung in jedem $r$ten Theile des Jahres vor sich, so ist bei dem relativen Zinsfuß:

$$7)\quad S = K\left(1 + 0{,}0\,p\,\frac{1{,}0\,{q_1}^{rn} - 1}{1{,}0\,{q_1}^{r} - 1}\right).$$

Hieraus erhält man, wenn R statt K und K statt S gesetzt wird, für den gegenwärtigen Werth eines unter den genannten Bedingungen nach n Jahren fälligen unverzinslichen Kapitals:

$$8)\quad R = K : \left(1 + 0{,}0\,p_1\,\frac{1{,}0\,{q_1}^{rn} - 1}{0{,}0\,q_1}\right) = \frac{K\,.\,0{,}0\,q_1}{0{,}0\,q_1 + 0{,}0\,p_1\,(1{,}0\,{q_1}^{rn} - 1)}$$

$$9)\quad R = K : \left(1 + 0{,}0p\,.\,\frac{1{,}0{q_1}^{rn} - 1}{1{,}0{q_1}^{r} - 1}\right) = \frac{K\,(1{,}0\,q_1 - 1)}{1{,}0{q_1}^{r} - 1 + 0{,}0p(1{,}0{q_1}^{rn} - 1)}$$

$$10)\quad R = K : \left(1 + (1{,}0\,p^{\frac{1}{r}} - 1)\,\frac{1{,}0\,q^n - 1}{1{,}0\,q^{\frac{1}{r}} - 1}\right).$$

§. 42.

Durch mehrere Jahre (n) wird jährlich ein Kapital K angelegt. Zu welcher Summe sind diese Anlagen im Augenblicke der letzten Zahlung angewachsen, wenn die Kapitalanlagen zu p Proc. verzinst, die Zinses-Zinsen aber zu q Proc. angelegt werden können?

Die vorliegende Frage beantwortet sich dadurch, daß man die Gleichung 2 §. 41 auf sämmtliche Kapitalanlagen anwendet, also allmälig die Werthe $0, 1, 2, 3 \ldots n-1$ statt n setzt und sämmtliche hiedurch erhaltenen Ausdrücke zusammenzählt. Hiernach ist:

$$S = K\left(1+0{,}0p\,\frac{1{,}0q^{n-1}-1}{0{,}0q}\right) + K\left(1+0{,}0p\,.\,\frac{1{,}0q^{n-2}-1}{0{,}0q}\right) +$$

$$K\left(1+0{,}0p\,.\,\frac{1{,}0q^{n-3}-1}{0{,}0q}\right) + \ldots\ldots + K\left(1+0{,}0p\,\frac{1{,}0\,q-1}{0{,}0q}\right) + K.$$

Werden die Glieder in der vorstehenden Reihe von den Klammern befreit, dann erscheint K in Verbindung mit der Einheit $n$mal, in Verbindung mit $(-1)\,\frac{0{,}0p}{0{,}0q}$ aber $(n-1)$mal und endlich noch $K\,.\,\frac{0{,}0p}{0{,}0q}$ in Verbindung mit einer nach den Potenzen von $1{,}0\,q$ geordneten Reihe. Hieraus erhält man:

$$S = K\left(n-(n-1)\,\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\,(1{,}0\,q + 1{,}0\,q^2 + 1{,}0\,q^3 + \ldots 1{,}0q^{n-1})\right)$$

$$= K\left(n-n\,\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\,(1 + 1{,}0\,q + 1{,}0\,q^2 + 1{,}0\,q^3 + \ldots 1{,}0q^{n-1})\right)$$

oder 1) $$S = K\left(n\,.\,\frac{q-p}{q} + \frac{p}{q}\,.\,\frac{1{,}0\,q^n - 1}{0{,}0\,q}\right).$$

Man kann nun die nämliche Schlußweise auf die in 4 und 6 §. 41 angegebenen Fälle anwenden. Es entstehen dann ähnliche Ausdrücke und Reihen, welche nach den nöthigen Reductionen zu folgenden Gleichungen führen:

$$2)\quad S = K\left(\frac{rn\,(q_1-p_1)}{q_1} + \frac{p_1}{q_1}\,.\,\frac{1{,}0\,q_1{}^{rn}-1}{0{,}0\,q_1}\right).$$

$$3)\quad S = K\left(n\,\frac{(1{,}0q_1{}^{r}-1{,}0p)}{1{,}0\,q_1{}^{r}-1} + 0{,}0p\,.\,\frac{1{,}0q_1{}^{rn}-1}{(1{,}0q_1{}^{r}-1)^2}\right).$$

Die Gleichung 2 setzt voraus, daß die Kapital-Anlagen und die Verzinsung in jedem $r$ten Theil, die Gleichung 3, daß die Kapitalanlagen jährlich geschehen, die Verzinsung in jedem $r$ten Theile des Jahres vor sich geht.

Die Gleichungen 1, 2 und 3 geben den Werth an, welchen sämmtliche Kapitalanlagen im Zeitpunkte der letzten Anlage haben. Führt man diesen Werth auf den Anfang des Jahres zurück, worin die erste Anlage gemacht wird, so hat man den Werth von S in der ersten nach 4 §. 41, den Werth von S in der zweiten nach 8 §. 42, den Werth von S in der drit-

ten Gleichung nach 8 §. 42 zu behandeln. Nennt man den hierdurch entstehenden gegenwärtigen Werth R, so ergeben sich aus dem Gesagten folgende Gleichungen:

4) $$R = K \,.\, \left(n\,\frac{q-p}{q} + \frac{p}{q}\,.\,\frac{1{,}0q^n-1}{0{,}0q}\right)\frac{0{,}0\,q}{0{,}0q+0{,}0p\,(1{,}0q^n-1)}$$

5) $$R = K\left(\frac{rn(q_1-p_1)}{q_1} + \frac{p_1(1{,}0q_1{}^{rn}-1)}{q_1\,0{,}0q_1}\right)\frac{0{,}0\,q_1}{0{,}0q_1+0{,}0p_1(1{,}0q_1{}^{rn}-1)}$$

6) $$R=K\,.\,\left(n\,\frac{(1{,}0q_1{}^{r}-1{,}0p)}{1{,}0q_1{}^{r}-1}+0{,}0p\frac{1{,}0q_1{}^{rn}-1}{(1{,}0q_1{}^{r}-1)^2}\right)\frac{1{,}0\,q_1{}^{r}-1}{1{,}0q_1{}^{r}-1+0{,}0p(1{,}0q_1{}^{rn}-1)}.$$

Diese Gleichungen geben den gegenwärtigen Werth von Kapitalanlagen unter den Bedingungen an, daß die Zinsen der Kapitalien zu p Proc., die Zinses-Zinsen zu q Proc. gerechnet werden und zwar Nr. 4, wenn Verzinsung und Anlage jährlich; Nr. 5, wenn beide in jedem $r$ten Theile des Jahres; Nr. 6, wenn die Anlage jährlich, die Verzinsung in jedem $r$ten Theile nach dem relativen Zinsfuße vor sich geht.

Die Richtigkeit der in diesem und dem vorigen §. angegebenen Gleichungen läßt sich leicht an besondern Fällen zeigen. Ist z. B. ein Kapital von 1000 Fl. so ausgeliehen, daß die Hauptzinsen zu 4, die Zinses-Zinsen zu 3 Proc. gerechnet werden, so ist das Kapital in 5 Jahren nach 3 §. 41 zu

$$S = 1000\,\left(1 + 0{,}04\,.\,\frac{1{,}03^5-1}{0{,}03}\right) = 1212{,}3654324 \text{ Fl.}$$

erwachsen. Diese Summe findet sich auch, wenn man den Werth des Kapitals dadurch sucht, daß man von einem Jahre zum andern aufsteigt. Wird die Summe 1000 Fl. unter den nämlichen Bedingungen 5mal angelegt, so erheben sich die Kapitalanlagen sammt Zinsen nach 1 in diesem §. zu der Summe

$$S = 1000\,\left(5\,.\,\frac{3-4}{3} + 0{,}04\,.\,\frac{1{,}03^5-1}{0{,}03}\right) = 5412{,}18108\,..\text{ Fl.}$$

Das nämliche Resultat findet man, wenn man sämmtliche Summen einzeln berechnet und zusammenzählt. Es ist:

$$S=1000+1040+1081{,}2+1123{,}636+1167{,}34508=5412{,}18108\text{Fl.}$$

Die nämliche Bemerkung gilt von den Gleichungen, welche sich unter den angegebenen Bedingungen auf die Rabattirung beziehen.

Sind nun mehrere Summen $K_1, K_2, \ldots K_n$ nach ganz willkührlichen Zeiträumen die erste nach m_1, die zweite nach m_2 Jahren u. s. w. fällig und soll der gegenwärtige Werth dieser Summe bei $p$procentigen Hauptzinsen und $q$procentigen Zinses-Zinsen bestimmt werden, so hat man bei jährlicher Verzinsung aus 4 §. 41 folgenden Werth:

$$7)\ R = \frac{K_1\,0{,}0q}{0{,}0q+0{,}0p(1{,}0q^{m_1}-1)} + \frac{K_2\,.\,0{,}0q}{0{,}0q+0{,}0\,p\,(1{,}0q^{m_2}-1)} + \frac{K_3\,0{,}0\,q}{0{,}0\,q+0{,}0\,p\,(1{,}0\,q^{m_3}-1)} + \ldots\ldots \frac{K_n\ \ 0{,}0\,q}{0{,}0\,q+0{,}0\,p\,(1{,}0\,q^{m_n}-1)}.$$

§. 43.

Die §§. 41 und 42 eröffnen eine neue Methode, den Werth der Kapitalien zu bestimmen. Sie finden ihre Anwendung bei Summen, deren fällige Zinsen nicht zu Kapital geschlagen werden können, oder deren Zinsen nicht so bedeutend sind, um sogleich wieder als Kapital nutzbringend angelegt zu werden, wobei sich aber die Gelegenheit bietet, auch kleine Summen zu niedern Zinsen und Zinses-Zinsen, wie bei Sparkassen, anzulegen; ferner in solchen Fällen, wo der Werth von Grundstücken oder Waldungen berechnet werden soll, die in regelmäßigen oder unregelmäßigen Zeitabschnitten Renten abwerfen, und wobei ein niederer Zinsfuß für die Bestimmung der Zinses-Zinsen angewendet werden soll. Hat man keine Gelegenheit, die Zinsen von kleinern Kapitalien sogleich wieder nutzbringend anzulegen, so kann man folgende Methode in Anwendung bringen.

Ein Kapital K ist zu p Proc. angelegt. Nach Verlauf von m Jahren werden sämmtliche, unterdessen eingegangenen Jahreszinsen wieder nutzbringend angelegt. Wie groß ist der Werth eines so angelegten Kapitals am Ende des (mn)ten Jahres?

Man bemerkt, daß sich nach Verlauf von je m Jahren der Stand des Kapitals ändert. Bezeichnet man den Stand des so angelegten Kapitals in den verschiedenen Zeitabschnitten von je m Jahren durch $K_1, K_2, K_3 \ldots K_n$, so besteht jedes Kapital am Ende eines solchen Zeitraums aus dem Kapital, welches am Ende des verflossenen Zeitraums angelegt wurde, und aus den Zinsen, welche sich während m Jahren sammelten. Bezeichnet man nun Kapital und Zinsen des $x$ten Zeitraums durch K_x und Z_x, so hat man in Rücksicht auf §. 2:

$$1)\ K_x = K_{x\text{-}1} + Z_x = K_{x\text{-}1} + K_{x\text{-}1}\,.\,m\,.\,0{,}0\,p = K_{x\text{-}1}\,(1 + m\,.\,0{,}0\,p).$$

Hieraus hat man folgende Zusammenstellung:

$$K_1 = K(1+m.0{,}0p);\ K_2 = K_1(1+m.0{,}0p);\ K_3 = K_2(1+m.0{,}0p)\ldots.$$
$$\ldots.\ K_{n\text{-}1} = K_{n\text{-}2}\,(1+m.0{,}0\,p);\ K_n = K_{n\text{-}1}\,(1+m.0{,}0p).$$

Durch allmälige Substitution der frühern Werthe in die spätern entsteht:

$$K_2 = K(1+m\,.\,0{,}0\,p)\,(1+m\,.\,0{,}0\,p) = K(1+m\,.\,0{,}0\,p)^2$$
$$K_3 = K(1+m\,.\,0{,}0\,p)^2(1+m\,.\,0{,}0\,p) = K(1+m\,.\,0{,}0\,p)^3$$

u. s. w. Hieraus ist allgemein der Werth am Ende des (mn)ten Jahres:

$$2)\quad S = K\,(1+m\,.\,0{,}0\,p)^n = K\,(1{,}0\,m\,p)^n.$$

Dieser Gleichung sind wir schon früher 1 §. 18 begegnet. Sie ist hier von einer andern Ansicht entwickelt, und allgemeiner als 1 §. 17. Setzt man nämlich $m = 1$ in 2, so entsteht die Gleichung 1 §. 17. Hiedurch bestätigt sich die Richtigkeit der in §. 17 und 18 aufgestellten Sätze. Um nun die verschiedenen hier aufgestellten Methoden zu vergleichen, nehme man an, daß ein Kapital von 500 Fl. auf 15 Jahre bei 4 Proc. zinstragend angelegt werde. Man kann nun seinen Werth bei einfachen Zinsen, oder bei 4procentigen Hauptzinsen und 3procentigen Zinses-Zinsen bestimmen, oder man kann die Zinsen von fünf zu fünf Jahren anhäufen, oder endlich, man kann 4procentige Haupt- und Zinses-Zinsen rechnen. Nach den vorliegenden Methoden erhält man folgende Resultate aus 2 §. 6:

$$S = 500 \,.\, 1{,}60 = 800.$$

Aus 3 §. 41 ist: $S = 500\,(1 + 0{,}04\,\frac{1{,}03^{15} - 1}{0{,}03}) = 871{,}978\,..\,\text{Fl.}$

Aus 2 dieses §: $S = 500\,.\,(1 + 5\,.\,0{,}04)^3 = 500\,.\,1{,}2^3 = 864\,\text{Fl.}$

Aus 1 §. 17: $S = 500\,.\,1{,}04^{15} = 900{,}472\,..\,\text{Fl.}$

Man sieht, daß die letzte Art ein Kapital zu benutzen, die vortheilhafteste, die erste aber die unvortheilhafteste ist. Zwischen diesen stehen die beiden andern Benutzungsweisen, deren Vorzug vor einander von dem Verhältniß der Zwischenzinsen zu den Hauptzinsen und dem der Zeitdauer abhängt, die erforderlich ist, um die Zinsen zu einer benutzbaren Summe anhäufen zu können.

Die in diesem §. aufgestellte Methode und die durch sie gefundene Formel 2 läßt nun alle Anwendungen zu, welche aus 1 §. 17 und 1 §. 18 in §. 22 u. ff. gezogen werden, und man hat in den hierauf bezüglichen Formeln $p_1 = mp$ und die entsprechende Zahl der Zeitabschnitte statt n, oder rn zu setzen.

Viertes Kapitel.

Ueber die Berechnung des Interusuriums.

---

§. 44.

Die Berechnung des Interusuriums war bisher häufig Gegenstand der Untersuchung und ist in der Jurisprudenz zugleich eine praktisch wichtige Frage, so daß sich die nähere Erörterung dieser Sache wohl lohnen dürfte,

zumal da in den §§. 28—31 diejenigen Sätze aufgestellt sind, welche hier maaßgebend auftreten und geeignet scheinen, Sicherheit in die sehr schwankenden Ansichten über diesen viel besprochenen Gegenstand zu bringen.

Der Begriff von Interusurium wird sich wohl dadurch am einfachsten entwickeln, daß wir von folgendem Falle ausgehen: Jemand (Schuldner) soll nach Verfluß von einiger Zeit eine Summe an einen zweiten (Gläubiger) zahlen, ohne daß er von dieser Summe Zinsen zu entrichten hat. Diese erst später fällig werdende Schuld soll, entweder aus Uebereinkunft zwischen Gläubiger und Schuldner, oder weil der Schuldner aus irgend einem Rechtsgrund dazu gezwungen werden kann, sogleich gezahlt werden. Hat nun der Schuldner dafür, daß er sogleich zahlt oder zahlen muß, eine Vergütung anzusprechen? oder muß er die später fällig werdende Schuld sogleich ganz auszahlen?

Es ist wohl leicht zu erkennen, daß eine unverzinsliche erst nach Verfluß eines Zeitraums fällig werdende Schuld nicht den nämlichen Werth hat, als die gleiche, gegenwärtig baare und verwendbare Summe, und daß der gegenwärtige Werth ersterer kleiner als die künftig fällig werdende Summe sein müsse, denn aus einer gegenwärtig freien und benutzbaren Summe können Zinsen genommen werden, die nach Verlauf der Zwischenzeit dem ursprünglichen Kapitale zugelegt, eine Summe hervorbringen, welche größer als die künftig fällige ist. Würde daher der Schuldner gezwungen, die erst später fällige und unverzinsliche Schuld ohne Abzug sogleich zu zahlen, so käme er offenbar in Schaden, und es muß ihm daher rechtlich eine Vergütung zuerkannt werden, die er sofort durch Abzug in Anrechnung zu bringen hat. Dieser Abzug heißt Interusurium, und man versteht insgemein gegenwärtig unter Interusurium diejenige Summe, um welche eine unverzinsliche, künftig fällige Schuld gegenwärtig weniger werth ist, oder der Ueberschuß einer unverzinslichen, künftig fälligen Schuld über ihren gegenwärtigen Werth.

Dieser Begriff stimmt aber keineswegs mit demjenigen überein, welcher in dem Worte selbst liegt, wie sich zeigen wird. Geht man nämlich auf den Inhalt des oben vorgelegten Falles weiter ein, so lassen sich für den Schuldner und Gläubiger bei einer erst später fällig werdenden Schuld folgende drei Beziehungen unterscheiden.

a) Wirklicher Werth des Genusses oder Vortheils, welchen der Schuldner aus einem physischen Gute während der Zeit der Nutznießung ziehen kann.

b) Gegenwärtiger Werth des Vortheils der Nutznießung.

c) Gegenwärtiger Werth einer künftig fälligen, unverzinslichen Summe oder eines physischen Gutes.

Zahlt nämlich der Schuldnrr oder Nutznießer die schuldige Summe, oder

das schuldige Gut nicht früher, als an dem festgesetzten Zeitpuncte, so kann er diese bis zur Verfallzeit benutzen und aus ihr den Vortheil der Verzinsung oder Nutznießung ziehen. Hiedurch erhält er einen Vortheil im Laufe der Zeit. Von der Größe dieses Vortheils muß natürlich die Vergütung abhängen, die er im Falle einer Vorausbezahlung anzusprechen hat, wodurch sich denn der gegenwärtige Werth des Vortheils der Nutznießung ergiebt (b). Da aus dem genannten Grunde der Gläubiger nicht sogleich in den Besitz seines Eigenthums gelangt, so kann dieses auch gegenwärtig nicht den Werth für ihn haben, welchen die nämliche sogleich verwendbare Summe hat, sondern einen geringern. Der geringere Werth wird von der Zeit abhängen, während welcher der Schuldner die Nutznießung hat und weswegen er nicht sogleich in den Besitz des ihm später zufallenden Gutes gelangt. Hieraus ergiebt sich die unter c angegebene Beziehung.

Die hier genannten drei Begriffe hängen, wie man sieht, unter sich zusammen. Der Zusammenhang zwischen a und b liegt einfach vor. Die in b und c angegebenen Begriffe stehen sich insofern gegenüber, als sie die Ansprüche des Schuldners und Gläubigers auf eine und dieselbe Sache angeben, hängen aber insoweit zusammen, daß sie sich gegenseitig ergänzen und der eine Begriff immer aus dem andern folgt.

Man kann nämlich den Werth der physischen Güter nach dem Nutzen oder dem Vortheile, den sie gewähren, ganz füglich schätzen. Ein Gut, woraus Jemand keinen Vortheil oder keinen Genuß ziehen kann, existirt für ihn so lange nicht, als ihm dies versagt ist, wenn er auch Eigenthümer desselben wäre, und es existirt für ihn erst dann, wenn er einen Vortheil oder Genuß von ihm ziehen kann. Hat nun eine Person das Recht, alle Vortheile und Genüsse, welche sich an den Besitz eines physischen Gutes knüpfen, auf eine Zeit lang zu genießen, und muß er nach Verlauf dieser Zeit dasselbe zu dem nämlichen Zwecke an eine andere Person übergeben, so tritt der oben berührte Fall mit allen den an seine Betrachtung geknüpften Bemerkungen ein, und man kann die zuerst genießende Person als Schuldner und die zweite als Gläubiger betrachten. Beide treten sofort nach einander in den Genuß des Gutes und kommen im Verlaufe der Zeit zur Befriedigung ihrer Ansprüche, deren Werth offenbar von der Zeit der Nutznießung abhängt. Soll nun der Werth der Ansprüche beider unter einander verglichen werden, so kann dies nicht in der angegebenen Weise, sondern nur dadurch geschehen, daß derselbe auf einen und denselben Zeitpunkt (am einfachsten die Gegenwart) zurückgebracht und in Zahlen angegeben wird. Dadurch verwandelt sich diese Aufgabe in eine andere und folgende: den Werth der Ansprüche auf ein Object, die nicht gleichzeitig sind, sondern in der Zeit auf einander folgen, auf den gleichzeitigen zurückzuführen, und die Ermittelung des Interusuriums fällt dann aus dem nämlichen Grunde mit

folgender Aufgabe zusammen: »Man soll ein physisches Gut, welches zwei Personen in bestimmten Zeiträumen nach einander zu benutzen haben, als eine Sache betrachten, die zwischen zwei Personen in dem Verhältniß vertheilt werden soll, welches sich aus der Dauer der Nutznießung und dem daraus fließenden Vortheil sich ergiebt, wenn der Werth des Vortheils der Nutznießung auf die Gegenwart zurückgebracht ist.«

Diese Darstellung entspricht vollkommen der Natur der vorliegenden Aufgabe und führt weder auf einen Widerspruch noch auf eine Unmöglichkeit. Die Ansprüche zweier Personen auf eine Sache, die in der Zeit nach einander fallen, können nämlich nicht direct nach der Dauer der Nutznießung bemessen werden. Denn wenn sie dem Einen zuerst auf eine bestimmte Zeit, und dem Andern nach Verlauf dieser Zeit als Eigenthum, also für alle künftige Zeit, zufiele, so müßte hier eine endliche Zahl mit dem Unendlichen verglichen werden, was unmöglich ist. Auch der Uebergang dieser Sache in die Hand einer dritten und vierten Person u. s. w. würde dies nicht ändern. Selbst in dem Falle, als ein physisches Gut untheilbar wäre, können die Ansprüche der einen Person durch irgend ein Aequivalent ausgeglichen werden. Daß die Ermittelung des Werthes der Nutznießung ausführbar ist, wird natürlich vorausgesetzt. An das Gesagte knüpft sich nun eine nicht unwichtige Folgerung.

d) Der Werth der Ansprüche beider Interessenten kann, auf die Gegenwart zurückgebracht, zusammen nicht größer sein, als der des physischen Gutes ist, sondern muß ihm gleichkommen.

Hieraus zeigt sich nun ganz deutlich der Zusammenhang, der zwischen dem gegenwärtigen Werth der Nutznießung des Schuldners und dem gegenwärtigen Werth der Forderung des Gläubigers stattfindet, und daß der eine Werth aus dem andern folgt, und daß nur einer bekannt sein muß, indem der andere sich aus demselben unmittelbar folgert.

Gegen die hier gemachten Schlüsse möchte sich wohl nichts Gegründetes einwenden lassen. Stillschweigend wurden sie auch von Allen gemacht, welche sich mit der Ermittelung des Interusuriums beschäftigten, da immer die Methode angegeben wurde, wie man den Werth des Anspruchs des einen Interessenten berechnen müsse, und dann als sich von selbst verstehend gefolgert wurde, daß dadurch auch der des andern ermittelt sei. Diese Voraussetzung ist in dem oben unter d aufgestellten Satze enthalten. Man übersah aber dabei das weitere Kriterium, welches in dem obigen Satz liegt und das zur Prüfung der angewendeten Methode selbst dient. Soll nämlich eine Methode richtig sein, so muß sie den Werth des einen wie des andern Interessenten richtig angeben. Wird also der Werth beider Ansprüche nach ihr ermittelt, so müssen auch die hiedurch erhaltenen Resultate zusammen dem zu vertheilenden Gute gleichkommen. Ist dies nicht der Fall, so

kann auch die angewendete Methode nicht richtig sein. Soll daher eine zur Berechnung des Interusuriums gegebene Methode richtig sein, so muß sie den in d ausgesprochenen Bedingungen genügen.

Nachdem nun die Grundzüge festgestellt sind, wornach Sicherheit in die zur Berechnung des Interusuriums dienende Methode gebracht werden kann, so wenden wir uns nun zu dem Gegenstande selbst und beschäftigen uns mit der Beantwortung folgender drei Fragen:

1) Welcher Begriff wird im römischen Recht unter Interusurium verstanden?
2) Welches sind die bis jetzt vorgeschlagenen Methoden zur Berechnung des Interusuriums?
3) Auf welche Weise muß das Interusurium berechnet werden?

§. 45.

In dem römischen Recht kommen die drei unter a, b und c im vorigen §. aufgestellten Begriffe vor, wie sich einfach aus den einzelnen hieher gehörigen Stellen nachweisen läßt. Der unter a angedeutete, wirkliche Werth des Vortheils oder Genusses, welchen Jemand aus der, eine bestimmte Zeit dauernden Benutzung eines Gutes ziehen kann, heißt dort commodum temporis (Ulpian. Dig. 24, 3 (d. solut. matrim.) L. 24, §. 2)[1]; medii temporis commodum (Paulus Dig. 35, 2 (ad. Leg. Falcid.) L. 45, pr.)[2]; interusurium temporis (Ulpian. Dig. 35, 2 (ad. Leg. Falc.) L. 66, pr.)[3]; interusurium medii temporis (Ulpian. Dig. 15, 1 (d. pecul.) L. 9, §. 8)[4].

---

[1]) Quoties mulieri satisdandum est de solutione dotis post certum tempus, si maritus satisdare non possit, tunc deducto *commodo temporis* condemnatio residui repraesentatur: sed si, cum maritus satisdare posset, nollet, in solidum eum condemnandum Mela ait, non habita ratione *commodi temporis*.

[2]) In Lege Falcidia non habetur pro puro, quod in diem relictum est: *medii* enim *temporis commodum* computatur.

[3]) Circa Legem Falcidiam in eo, quod sub conditione, vel in diem alicui relictum est, hoc servandum est: Si decem sub conditione alicui fuerint relicta, eaque conditio post decennium forte extiterit, non videntur decem huic legata, sed minus decem; quia intervallum temporis et *interusurium* hujus spatii minorem facit quantitatem decem.

[4]) Item deducetur de peculio, si quid dominus servi nomine obligatus est, aut praestitit obligatus; item si quid ei creditum est jussu domini, nam hoc deducendum, Julianus Lib. 12 Digestorum scribit. Sed hoc ita demum verum puto, si non in rem domini, vel patris, quod acceptum est, pervenit; alioquin secum debebit compensare. Sed et si pro servo fide jusserit, deducendum Julianus Lib. 12 Dig. scribit. Marcellus autem in utroque, si nondum quicquam domino absit, melius esse ait, praestare creditori, ut caveat (ille), refusurum se, si quid praestiterit dominus hoc nomine conventus, quam ab initio deduci, ut *medii temporis interusurium* magis creditor consequatur.

Aus diesen Stellen geht deutlich hervor, daß interusurium temporis mit commodum temporis gleichbedeutend ist und nichts Anderes darunter verstanden wird, als der Vortheil, welcher sich aus der Benutzung eines Gutes für eine bestimmte Zeit ergiebt. Die angeführten Stellen sind auch aus dem Grunde in den Anmerkungen ausführlich angegeben, damit man sich hievon überzeugen kann.

Der unter b angedeutete, gegenwärtige Werth des Vortheils der Nutznießung heißt commodum in repraesentatione (Ulpian. Dig. 42, 8 (q. in fraudem cred.) L. 10, §. 12)[5]. Der Vortheil bei der Vorauszahlung: Der unter c angedeutete gegenwärtige Werth einer später fälligen Summe wird von den Römern nicht durch einen besondern Namen bezeichnet, wird aber in den angeführten Stellen (2te und 3te Anm.) hervorgehoben. Hieraus ergiebt sich, daß die Römer unter Interusurium etwas Anderes verstanden, als was gegenwärtig von den Juristen nach den in §. 44 angegebenen Begriffen darunter verstanden wird, denn der jetzige Begriff von Interusurium fällt mit dem commodum in repraesentatione der Römer zusammen. Da sich aber der Begriff von Interusurium nun einmal in der angegebenen Weise festgestellt hat, wie man sich leicht aus den hieher gehörigen Schriften überzeugen kann[6]), so soll er auch in dieser Bedeutung hier beibehalten werden.

§. 46.

Es wäre bei Zusammenstellung der Methoden, welche für die Berechnung des Interusuriums angegeben wurden, wünschenswerth, zu wissen, auf welche Weise die Römer das Interusurium berechneten. Hierüber findet sich aber in den Quellen nirgends genügende Auskunft. Es ist wohl, wie aus den angeführten Stellen hervorgeht, angegeben, daß ein Abzug gemacht, nicht aber, wie dieser berechnet werden soll. Wäre übrigens auch eine Me-

---

[5]) Si, cum in diem (mihi) deberetur, fraudator praesens solverit: dicendum erit, (quod) in eo, quod sensi commodum in repraesentatione, in factum actioni locum fore. Nam praetor fraudem intelligit etiam in tempore fieri. Auch kann hierauf folgende Stelle noch bezogen werden: Julian. Dig. 42, 8 (q. in fraud.) L. 17, §. 2. Si vir uxori, cum creditores suos fraudare vellet, soluto matrimonio praesentem dotem reddidisset, quam statuto tempore reddere debuit; hac actione mulier tantum praestabit, *quanti creditorum intererat, dotem suo tempore reddi.* Nam Praetor fraudem etiam in tempore fieri intelligit.

[6]) So bestimmt diesen Begriff Schrader, civilistische Abhandlungen: das Interusurium, §. 3, pag. 151; Zachariä: Ueber die richtige Berechnungsart des Interusurii, Greifswald, 1831, §. 1, pag. 2; v. Wangerow, Lehrbuch der Pandecten, 3ter Bd., pag. 180, Anmerkung, wo sich eine recht zweckmäßige Zusammenstellung des hieher gehörigen Materials findet; cf. Fritz, Erläuterungen, 3tes Heft, pag. 128.

thode von ihnen aufgestellt, so würde sie, nach dem einstimmigen Urtheil der Rechtsgelehrten, auf keinen Fall maßgebend sein können, wenn ihre Unrichtigkeit nachgewiesen werden könnte. Einen Fall, worin man auf die dabei angewendete Methode schließen kann, führt Africanus (Dig. 35, 2 (ad Leg. Falc.) L. 88, §. 3)[1]) an. Er ist folgender: Jemand hinterläßt 200 und vermacht 100 gleich baar an *A*, und 100 an *B*, die an eine Bedingung geknüpft sind. Mit dem Eintritt dieser Bedingung verlangt der Erbe, der unterdessen 25 gezogen hat und dem die Quart nach dem Falc. Gesetz zusteht, noch 25 und außerdem noch die Zinsen mit 5, die ihm von der Quart gebühren. Die geforderten 30 sollen nun von beiden Legataren und nach Africanus so erhoben werden, daß sie in dem Verhältnisse von $100 : 100 - 25 = 100 : 75 = 4 : 3$ beitragen, und daß also *A* $^4/_7$, *B* aber $^3/_7$ zahlt. Es liegt deutlich vor, daß Africanus den vollen Werth der Nutznießung anrechnet und in Abzug bringt. Man sieht jedoch leicht, daß der vorliegende Fall eigentlich nicht hieher gehört, denn die Bedingung, unter welcher *B* in den Besitz seines Legats treten soll, ist schon in Erfüllung gegangen, also handelt es sich nicht mehr um den gegenwärtigen Werth einer künftig fälligen Summe, sondern um ihren wirklichen Werth, und er hätte bei diesem Stand der Sache eine andere Rechnung zu Grunde legen müssen, um die Beiträge der Legatare zu ermitteln, und hätte hiebei von dem Werthe der Legate ausgehen sollen, welchen sie bei dem Eintritt der Bedingung hatten. Da dies aber nicht geschah, so ist entweder anzunehmen, daß Africanus die Sache nicht richtig auffaßte (obgleich er sie besser als Andere auffaßte, welche den Werth beider Legate für gleich nahmen, wie aus dem Zusatze »quidam putant etc.« hervorgeht), oder daß die von ihm hier angewendete Methode diejenige war, welche bei Berechnung des Interusuriums gewöhnlich angewendet wurde und wornach der volle Werth des Genusses in Abzug kam. Letzteres ist deswegen nicht

---

[1]) Qui ducenta in bonis relinquebat, legavit mihi centum praesenti die; tibi aeque centum sub conditione: post aliquantum temporis extitit conditio, ita tamen, ut ex reditu ejus summae, quae tibi relicta est, non amplius, quam viginti quinque reciperet. Legis Falcidiae ratio ita habenda erit heredi, ut viginti quinque conferre ei debeamus, et amplius fructus quinquaginta medii temporis, qui (verbi gratia) efficient quinque. Cum igitur triginta sint conferenda, quidam putant, quina dena ab utroque nostrum conferenda esse, quod minime verum est. Licet enim eandem quantitatem acceperimus, manifestum tamen est, aliquanto uberius esse meum legatum. Quare statuendum erit, tanto minus in tuo legato esse, quantum ex fructibus ejus heres perceperit. Secundum quod in proposita specie computationem ita iniri oportet, ut ex septem partibus ego quatuor, tu tres conferamus; quoniam quidem quarta pars amplius in meo, quam in tuo tegato est.

unwahrscheinlich, weil es die Methode ist, welche zuerst und ohne weitere Prüfung zur Hand liegt, und stimmt mit dem Umstande überein, daß die mathematischen Kenntnisse der Römer sehr tief standen und man daher von ihnen in dieser Beziehung nichts als das Gewöhnliche erwarten darf. Man kann sich kaum über diese Unsicherheit wundern, da man sich noch bis auf die neueste Zeit, ungeachtet aller Fortschritte in der Mathematik, über die richtige Berechnungsart des Interusuriums nicht hat vereinigen können.

Eine andere Stelle, welche hieher bezogen wird, findet sich Dig. 35, 2 (ad. Leg. Falc.) L. 3, §. 2 [2]). Dort kommt eine beständige Rente in Frage, welche bei 4 Proc., also mit dem 25fachen Betrage, kapitalisirt werden soll. Geht man auf die Grundzüge zurück, welche der Werthberechnung von Zeitrenten und beständigen Renten zur Basis dienen, so kommt der Inhalt der §§. 27—32 in Betrachtung, und man hat überall Zinses-Zinsen in Calcul zu bringen. Man leitet daher die Formel für Kapitalisirung einer beständigen Rente aus 1 §. 27 ab, wenn man $n = \infty$ setzt, woraus man

$$R = \frac{K}{0{,}0p} = \frac{K.100}{p}$$

erhält, wenn K die jährliche Rente, p den Zinsfuß bedeutet. Wollte man nun, weil die eben entwickelte Formel auch bei den Römern benutzt wurde, schließen, daß sie Kenntniß von der Rechnung mit Zinses-Zinsen (ein Ergebniß der neueren Mathematik) gehabt hätten, so wäre dies sehr gewagt. Die Entwickelung der eben mitgetheilten Formel ergiebt sich auf so einfachem Wege (§. 3), daß es überflüssig sein möchte, zu solchen Annahmen zu flüchten, besonders wenn man bedenkt, daß der Anatocismus bei den Römern aufs strengste verboten war (Cod. 4, 32. L. 28). Daher sind diese Bemerkungen nicht geeignet, die Behauptung zu entkräften, daß bei den Römern das Interusurium wahrscheinlich nach dem vollen Betrag des zu erwartenden Genusses berechnet und in Abzug gebracht wurde. Die Inconsequenzen, worauf diese Methode führen kann, scheinen nicht aufgedeckt worden, und Fälle, welche hierauf und namentlich auf starke Inconsequenzen direct führen konnten, scheinen nicht vorgekommen zu sein, wie sie gerade in dieser Eigenschaft selten vorkommen möchten.

§. 47.

Die Methoden, welche in der neueren Zeit zur Berechnung des Interusuriums aufgestellt wurden, sind folgende drei:

a) Die Pinckard'sche oder Carpzov'sche. Sie schließt sich an die

---

[2]) Item si reipublicae in annos singulos legatum fit, dum de Lege Falcidia quaeratur, Marcellus putat, tantum videri tegatum, quantum sufficiat sorti ad usuras trientes (d. i. 4 Proc.) ejus summae, quae legata est, colligendas.

von Afrikanus (§. 46) angedeutete Berechnungsweise an und bringt den Werth des Nutzens, welcher während der Zeit der Nutznießung aus einem Gute gewonnen wird, im vollen Betrage in Anrechnung und in Abrechnung, jedoch mit der Beschränkung, daß keine Zinses-Zinsen gerechnet werden dürfen. Stellt man der Einfachheit wegen ein physisches Gut durch ein Kapital K vor, so läßt sich der Vortheil der Nutznießung durch die, aus ihm sich ergebenden, jährlichen Zinsen bestimmen. Aus 1 §. 2 erhält man die jährlichen Zinsen. Dauert nun die Nutznießung n Jahre und bezeichnet man das Interusurium durch I, so bestimmt sich die Größe des letztern durch

$$1)\quad I = \frac{nK \,.\, p}{100}.$$

Der gegenwärtige Werth R des nach n Jahren fälligen Kapitals aber ist hiernach, oder der Antheil, welchen der Gläubiger anzusprechen hat:

$$2)\quad R = K - \frac{Knp}{100} = K\left(1 - \frac{np}{100}\right).$$

Wäre hiernach ein Kapital von 200 Fl. nach 10 Jahren unverzinslich fällig, so wäre sein gegenwärtiger Werth bei 5 Proc.:

$$R = 200 - \frac{200 \,.\, 10 \,.\, 5}{100} = 200 - 100 = 100 \text{ Fl.}$$

Diese Methode findet sich in Carpzov's Werke: Decision. illustr. Saxonic. Lips. 1704, Pars III. Decis. 275. Pag. 497 et sqq., entwickelt; eben so von Horn in seinem Werke: Consultationum, responsorum ac sententiarum Lib. Class. XIII., Resp. IV., pag. 964. Das Unrichtige dieser Methode fällt sogleich in die Augen und ist schon in der Anmerkung zu §. 10 nachgewiesen worden. Der Gläubiger oder Eigenthümer ist hiebei im Schaden, der Schuldner oder Nutznießer im Vortheil. Diese Unrichtigkeit tritt aber dann ganz auffallend hervor, wenn die Zahlung eines unverzinslichen Kapitals in sehr späte Zeiten fällt, wo der Fall eintreten kann, daß der Gläubiger oder Eigenthümer entweder gar nichts bekäme, oder gar noch dem Schuldner oder Nutznießer herauszahlen müßte, was offenbar eine Absurdität ist. Aus diesem Grunde möchte sich wohl gegenwärtig kein Vertheidiger dieser Methode mehr finden.

b) Die Hoffmann'sche Methode. Um die angeführte Unrichtigkeit zu entfernen, geht diese Methode von der Ansicht aus, daß man die Größe eines später fälligen Kapitals so bestimmen müsse, daß es mit einfachen Zinsen zu der Höhe im Zeitpunkte des Fälligwerdens anwachse, welche dem auszuzahlenden Kapitale gleichkommt. Es kommt daher die in 2 §. 10 angegebene Formel:

$$3)\quad R = \frac{K \,.\, 100}{100 + np}$$

in Anwendung. Diesen Werth hat der Gläubiger oder Eigenthümer anzusprechen. Hieraus ergiebt sich dann der für den Schuldner nach den in § 44 gemachten Bemerkungen durch:

$$4)\quad I = K - \frac{K\,100}{100+np} = \frac{K\,np}{100+np}.$$

Nach dem in a angegebenen Beispiele hat der Gläubiger:

$R = \frac{100\,.\,200}{150} = 133{,}33\ldots$ Fl., und der Schuldner $\frac{200\,.\,50}{150} = 66{,}66\ldots$ Fl.

anzusprechen. Diese Rechnung geht von den Ansprüchen des Gläubigers aus und bestimmt hieraus die des Schuldners, während die Carpzov'sche von denen des Schuldners ausgeht und aus ihnen die des Gläubigers ableitet.

Diese Methode findet sich entwickelt in dem Werke Hoffmann's: »die Klugheit, Haus zu halten, oder prudentia oeconomica.« Dresden und Leipzig, 1731, mit einem Anhang vom Interusurium. Ihr tritt Polack bei in seiner Mathesis forensis. Leipzig 1756, dann Unger in seinen Beiträgen zur Math. for. Göttingen, 1746, Zachariä in der §. 45, Anm. 6 angeführten Schrift u. A. Offenbar geht diese Methode von richtigeren Grundsätzen aus, als die Carpzov'sche. Man wendet jedoch gegen sie, und nicht mit Unrecht, ein, daß ein Kapital auf die genannte Art nicht sorgfältig genug benutzt werde, denn es können bei sorgfältiger Benutzung neben den einfachen Zinsen auch noch Zinsen von den Zinsen gewonnen werden. Die Folge hievon muß eine Beeinträchtigung des Schuldners sein.

c) Die Leibnitz'sche Methode. Sie geht von ähnlichen Grundsätzen, wie die Hoffmann'sche, aus und verlangt, daß der Werth eines Kapitals ermittelt werde, das mit Zinsen und Zinses-Zinsen zu der Summe erwächst, die nach Verfluß der festgesetzten Zeit unverzinslich ausgezahlt werden muß. Dieser Werth ist:

$$5)\quad R = \frac{K\,.\,100^n}{(100+p)^n} = \frac{K}{1{,}0p^n}.$$

Hieraus ergiebt sich der Werth für die Ansprüche des Schuldners:

$$6)\quad I = K - \frac{K\,100}{(100+p)^n} = K\left(1 - \frac{1}{1{,}0p^n}\right).$$

Nach dem in a angegebenen Beispiele hat der Gläubiger zu fordern:

$$R = \frac{200}{1{,}05^{10}} = 107{,}071\ldots \text{ Fl.},$$

der Schuldner aber 93,928 Fl. Leibnitz hat diese Methode in den Acta Eruditorum anno 1683, Lips. 1683, pag. 425 et sqq. in einer Abhandlung Meditatio juridico mathematica de interusurio simplice entwickelt. Bilfinger vertheidigt diese Methode in einem Anhange zu Polack's Math. for., 3te Ausg., Leipzig 1756, pag. 116 ff. Florencourt,

Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst, Altenburg, 1781, pag. 10 ff. Thibaut in seinem System des Pandecten-Rechts, 1ster Bd., §. 202. Man wendet gegen diese Methode ein, daß die sorgfältige Benutzung, welche sie verlangt, nicht immer ausführbar ist, denn es wird dabei nöthig, daß die Zinsen zur richtigen Zeit gezahlt und sogleich wieder zinstragend angelegt werden. Ersteres wird nicht immer geschehen, und Letzteres wird oft schwer und bei kleinen Kapitalien kaum ausführbar. Alle Vertheidiger der Hoffmann'schen Methode sind Gegner der Leibnitz'schen und machen hauptsächlich dieser Methode den Vorwurf, daß sie den Anatocismus verlange, der gesetzlich nicht in Anwendung kommen dürfe. Merkwürdig ist, daß Hoffmann in dem oben angeführten Werke den Leibnitz'schen Calcul ganz unrichtig auffaßte, indem er behauptet, daß nach der Leibnitz'schen Methode der 21ste Theil des Kapitals abgezogen werde, wornach das am Ende des 21sten Jahres fällige Kapital aufgezehrt sei.

In den nämlichen Irrthum fällt Polack nach der 1sten Ausgabe seiner Math. for., §. 33 u. ff., widerruft aber diesen Irrthum in der 3ten Ausgabe, durch die Bilfinger'sche Abhandlung belehrt.

Die Gründe, welche man für und gegen die Richtigkeit und Anwendbarkeit der Hoffmann'schen und Leibnitz'schen Methode vorgebracht hat, haben Manche veranlaßt, die beiden Methoden nach der Eigenthümlichkeit der Fälle und Verhältnisse mit einander zu verbinden.

§. 48.

Aus dem, was bisher über die verschiedenen Methoden, das Interusurium zu berechnen, berichtet wurde, kann man den gegenwärtigen Stand dieser Frage beurtheilen. Es wurde nur der wesentliche Inhalt der Ansichten angegeben, da eine weitere Erörterung derselben die Grenzen dieser Schrift überschreiten würde. Nach diesen Mittheilungen handelt es sich darum, ob die Hoffmann'sche oder Leibnitz'sche Methode die richtige sei, da die Carpzov'sche aus der Concurrenz fällt. Die Ausstellungen, welche nach unserer Ansicht an der bisherigen Behandlungsweise der vorliegenden Frage gemacht werden dürften, sind folgende:

1) Die Gründe, welche bisher für und gegen die Hoffmann'sche und Leibnitz'sche Frage vorgebracht wurden, sind äußere und zum Theil zufällige, denn sie hängen von der Größe oder Bedeutung der Zinsen, von der hieraus sich ergebenden Möglichkeit und der nöthigen Gelegenheit, sie nutzbringend wieder anzulegen, ab u. dergl. Es ist wohl nicht in Abrede zu stellen, daß dies nur äußere Gründe sind, und man kann dann mit vollem Rechte fragen, warum das größere oder kleinere Kapital einen Unterschied in der Behandlungsweise bedinge, und wann dieser Unterschied gemacht

werden müsse, wenn er zulässig ist? Selbst die Beantwortung dieser Fragen beruht auf äußeren Umständen und Verhältnissen, und wenn man nun auch zugiebt, daß äußeren Gründen eine billige Rücksicht geschenkt werden muß, so kann diese doch nur so lange zugegeben werden, als eine Frage nicht aus inneren Gründen entschieden werden kann. Diesen Fehler hat man hier begangen. Man hat gar nicht nach inneren Gründen wegen Entscheidung dieser Frage geforscht und hat sich beschränkt, die äußeren zu untersuchen und gegen einander abzuwägen. Das Resultat war, daß man sich nicht einigen konnte, weil das Zusammentragen äußerer Gründe immer der strenge bindenden Kraft innerer Gründe entbehrt. Wenn wir nun hauptsächlich innere Gründe für die Entscheidung der vorliegenden Frage verlangen, so ist damit nicht gesagt, daß die äußeren gar nicht beachtet werden dürfen. Sie können aber höchstens eine secundäre Stelle einnehmen und dann erst in Betrachtung kommen, wann den, sich aus der innern Beweisführung ergebenden Resultaten, Widersprüche oder Unmöglichkeiten bei der Ausführung entgegentreten sollten, wobei jedoch nicht die Eigenthümlichkeit des einzelnen Falles maßgebend sein kann.

2) Die Anwendung der beiden vorstehenden Methoden wurde bisher nur einseitig behandelt und erstreckte sich immer nur auf die Ermittelung des Werthes der Ansprüche des Gläubigers oder Eigenthümers. Von ihm wurde auf den Werth der Ansprüche des Schuldners oder Nutznießers geschlossen. Man hat bisher die Forderung des Letztern niemals direct ermittelt, sondern immer nur abgeleitet. Da man aber kein Kriterium hatte, um über die Richtigkeit der angewendeten Methoden zu entscheiden, so mußte die vorliegende Frage unentschieden bleiben. Wir vermissen daher

3) die Anwendung des unter d §. 44 aufgestellten Satzes, der ganz in der Sache gegründet ist und wornach der Werth der Ansprüche zweier Personen auf einen und denselben Gegenstand gerade so groß als der des Gegenstandes selbst sein muß. Wird nun eine Methode zu Ermittelung des Werthes der Ansprüche des Einen aufgestellt, so muß diese folgerichtig auch auf die Ermittelung des Werthes der Ansprüche des Andern angewendet werden können und ihre Richtigkeit gerade dadurch erproben, daß die durch sie erhaltenen Werthe für die Ansprüche beider dem Werthe des Gegenstandes gleichkommen. Diese Bemerkung giebt ein negatives Kriterium für die Richtigkeit einer Methode ab, denn letztere ist so lange nicht zulässig, als sie die angegebene Forderung nicht erfüllt.

Es fehlt daher bis jetzt noch ein aus inneren Gründen geschöpfter strenger Beweis für die Richtigkeit der einen oder der andern in §. 48 angegebenen Methoden. Diese Behauptung rechtfertigt sich aus den in 1, 2, 3 aufgeführten Bemerkungen, welche zugleich noch ferner die Winke enthalten, wie man die Richtigkeit des Beweises selbst prüfen kann.

Der hier geforderte Beweis ist in den §§. 28—31 niedergelegt. Dort wurde gezeigt, wie der gegenwärtige Werth künftig fälliger Summen berechnet werden muß und daß nur die Rechnung mit Zinses-Zinsen dabei in Anwendung kommen kann, die mit einfachen aber ausgeschlossen bleibt. Hiernach kann nur die Leibnitz'sche Methode als die richtige zugelassen werden.

Man kann nun den Einwurf machen, daß es sich häufig um die Auszahlung von nur einer künftig fälligen Summe handelt und daß in diesem Falle die Frage nach 11 und 12 §. 30 unentschieden ist. Dieser Einwurf fällt jedoch dadurch weg, daß es sich immer um die Ermittelung des Werthes der Ansprüche zweier Personen, des Schuldners oder Nutznießers und des Gläubigers oder Eigenthümers handelt, daß der Schuldner oder Nutznießer die in die Nutznießung fallenden Zinsen, also in der Regel eine Reihe von Zahlungen, anzusprechen hat, und daß in diesem Falle immer die in den §§. 28—31 bewiesenen Sätze in Geltung bleiben. Ist die fragliche Summe nach Verfluß von einem Jahre fällig, so giebt es keinen Unterschied zwischen der Hoffmann'schen und Leibnitz'schen Methode.

Obgleich durch das Gesagte der Beweis für die Richtigkeit dieser Methode vollständig gegeben ist, so soll sie doch auch durch Erörterung besonderer Fälle belegt werden. Zu dem Ende stellen wir den Werth der Ansprüche des Eigenthümers A und Nutznießers B nach der Hoffmann'schen und Leibnitz'schen Methode durch allgemeine Ausdrücke dar, wenn das Kapital K nach n Jahren an den Eigenthümer ausgeliefert werden soll, und der Nutznießer es bei dem Zinsfuß p unterdessen zu benutzen hat. Der gegenwärtige Werth der Ansprüche des Eigenthümers oder Gläubigers ist:

$$4)\quad R_1 = \frac{K}{1{,}0p^n}.$$

Benutzt es B durch n Jahre und nennt man den Werth der jährlich fälligen Zinsen Z, so ist der gegenwärtige Werth seiner Ansprüche:

$$R_2 = \frac{Z}{1{,}0p} + \frac{Z}{1{,}0p^2} + \frac{Z}{1{,}0p^3} + \cdots \frac{Z}{1{,}0p^n} = Z\,\frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}.$$

Die jährlich fälligen Zinsen sind $Z = K.0{,}0p$ nach 1 §. 2. Wird dieser Werth eingeführt, so geht der Werth der Ansprüche für B über in

$$5)\quad R_2 = K\left(1-\frac{1}{1{,}0p^n}\right) = K - \frac{K}{1{,}0p^n}.$$

Vergleicht man den Werth von 4 und 5 unter einander, so ist:

$$6)\quad R_1 + R_2 = \frac{K}{1{,}0p^n} + K\left(1-\frac{1}{1{,}0p^n}\right) = K$$

Hiernach ist der Satz 3 und d §. 44 durch die Gleichung 6 befriedigt und zugleich die Richtigkeit der Leibnitz'schen Methode nachgewiesen, denn die Ansprüche der beiden Personen kommen dem Objecte vollkommen gleich.

Wendet man die Hoffmann'sche Methode auf das Gesagte an, so ist der gegenwärtige Werth der Ansprüche von A:

$$7)\ R_1 = \frac{K100}{100 + np}.$$

Der Werth der Ansprüche von B ist:

$$R_2 = \frac{Z.100}{100+p} + \frac{Z.100}{100+2p} + \frac{Z.100}{100+3p} + \ldots \frac{Z.100}{100+np}$$

und hieraus, wenn $Z = K.0{,}0p$ gesetzt wird,

$$8)\ R_2 = Kp.\left(\frac{1}{100+p} + \frac{1}{100+2p} + \frac{1}{100+3p} \ldots\ldots \frac{1}{100+np}\right).$$

Aus 7 und 8 und aus dem in §. 28 Gesagten zeigt sich ganz deutlich, daß die Ansprüche des Schuldners und Gläubigers auf die fragliche Summe dieser Summe nicht gleichkommen, sondern größer als dieselbe sind, und daß das erhaltene Resultat also auf einen Widerspruch führt.

Dies wird sich an folgendem Zahlenbeispiele verdeutlichen. Es muß A eine Summe von 2000 Fl., die zu 5 Proc. ausgeliehen werden kann, auf 10 Jahre an B zur Nutznießung überlassen. A wünscht, was ihm gehört, sogleich zu erhalten. B willigt ein. Wie viel hat Jeder anzusprechen? Nach 4 hat A zu fordern:

$$R_1 = \frac{2000}{1{,}05^{10}} = 2000.0{,}6139133 = 1227{,}8266 \text{ Fl.}$$

Nach 5 hat B zu fordern:

$$R_2 = \frac{100}{0{,}05}\left(1 - \frac{1}{1{,}05^{10}}\right) = 100.7{,}721734 = 772{,}1734,$$

und in der That ist $R_1 + R_2 = 2000$. Wird die Hoffmann'sche Methode angewendet, so ist der Werth der Ansprüche von A:

$$R_1 = \frac{2000.100}{150} = 1333{,}333\ldots. \text{ Fl.}$$

Der Werth der Ansprüche von B ist:

$$R_2 = \frac{100}{1{,}05} + \frac{100}{1{,}10} + \frac{100}{1{,}15} + \frac{100}{1{,}20} + \frac{1}{1{,}25} + \ldots \frac{1}{1{,}45} + \frac{1}{1{,}50}$$
$$= 794{,}49580.. \text{ Fl.},$$

wie man sich überzeugt, wenn man die angezeigten Werthe berechnet und zusammenzählt. Die Summe beider Ansprüche ist $R_1 + R_2 = 2127{,}8291..$ Fl. Beide zusammen verlangen also mehr, als vorhanden ist, was offenbar eine Absurdität ist.

Behandelt man nun den vorliegenden Fall demungeachtet nach der Hoffmann'schen Methode und ertheilt dem A 1333,333 Fl., so erhält B 666,66.. Fl. Dadurch erhält Ersterer zu viel und Letzterer zu wenig. Geht man aber von der Forderung des B als Basis aus, so erhält B 794,495.. Fl. und A 1205,505 Fl., und in diesem Falle erhält B zu viel und A zu

wenig. In beiden Fällen wird durch Anwendung der Hoffmann'schen Methode eine Ungerechtigkeit begangen. Das Gesagte läßt sich an dem vorliegenden Beispiel in Zahlen nachweisen und tritt ganz besonders bei der Forderung des Schuldners deutlich hervor. Verfolgt man nämlich den Stand der Forderung des Letztern von Jahr zu Jahr, so giebt das nachstehende Schema Auskunft über denselben.

	Leibnitz'sche Methode.	Hoffmann'sche Methode. 1ste Rechnung.	Hoffmann'sche Methode. 2te Rechnung.
Forderung von B	772,1734	666,6666	794,4958
Zins hinzu	38,6087	33,3333	39,7247
Stand am Ende des 1sten Jahres	810,7821	700	834,2206
1ste Forderung ab	100	100	100
	710,7821	600	734,2206
Zins hinzu	35,5391	30	36,7110
Stand am Ende des 2ten Jahres	746,3212	630	770,9316
2te Forderung ab	100	100	100
	646,3212	530	670,9316
Zins hinzu	32,3161	26,5	33,5465
Stand am Ende des 3ten Jahres	678,6373	556,5	704,4781
3te Forderung ab	100	100	100
	578,6373	456,5	604,4781
Zins hinzu	28,9319	22,825	30,2239
Stand am Ende des 4ten Jahres	607,5692	479,325	634,7020
4te Forderung ab	100	100	100
	507,5692	379,325	534,7020
Zins hinzu	25,3785	18,96625	26,7351
Stand am Ende des 5ten Jahres	532,9477	398,29125	561,4371
5te Forderung ab	100	100	100
	432,9477	298,29125	461,4371
Zins hinzu	21,6474	14,91456	23,0718
Stand am Ende des 6ten Jahres	454,5951	313,20581	484,5089
6te Forderung ab	100	100	100
	354,5951	213,20581	384,5089
Zins hinzu	17,7297	10,66029	19,2255
Stand am Ende des 7ten Jahres	372,3248	223,86610	403,7344
7te Forderung ab	100	100	100
	272,3248	123,8661	303,7344
Zins hinzu	13,6162	6,1933	15,1867
Stand am Ende des 8ten Jahres	285,9410	130,0594	318,9211

	Leibnitz'sche Methode.	Hoffmann'sche Methode. 1ste Rechnung.	Hoffmann'sche Methode. 2te Rechnung.
Stand am Ende des 8ten Jahres	285,9410	130,0594	318,9211
8te Forderung ab	100	100	100
	185,9410	30,0594	218,9211
Zins hinzu	9,2971	1,5029	10,9460
Stand am Ende des 9ten Jahres	195,2381	31,5623	229,8671
9te Forderung ab	100	100	100
	95,2381	— 68,4377	129,8671
Zins hinzu	4,7619	3,4218	6,4933
Stand am Ende des 10ten Jahres	100,0000	— 71,8595	136,3604
10te Forderung ab	100	100	100
Stand am Ende des Jahres . . .	00	—171,8595	36,3604

Aus diesem Schema ergiebt sich, daß nur die Leibnitz'sche Methode auf ein richtiges Resultat führt, dagegen die Hoffmann'sche Methode den Schuldner nach der ersten Rechnung in Schaden bringt, nach der zweiten aber in Vortheil und dann dem Gläubiger schadet. Genau das nämliche Resultat, worauf die Rechnung nach dem vorliegenden Schema führt, ergiebt sich aus den Sätzen von §. 30 und 31. Bestimmt man nach ihnen den Werth der Forderung für A, so ist dieselbe in den zwei genannten Fällen:

$$S = 1333,\ 333 . 1{,}05^{10} = 2171{,}8595 .. \text{ Fl.}$$

$$S = 1205{,}5042 . 1{,}05^{10} = 1963{,}6394 \text{ Fl.}$$

Das erste Resultat giebt den Werth der Forderung des A am Ende des 10ten Jahres um so viel zu hoch an, als das Schema die des B zu niedrig, und das zweite giebt die Forderung des A um so viel zu niedrig, als die des A nach dem Schema zu groß, und es zeigt sich hieraus eine vollkommene Harmonie im Calcul.

Wem das Gesagte nun noch nicht genügen sollte, um die Hoffmann'sche Methode als unrichtig und deswegen unzulässig darzustellen, der mag sich hievon durch die Bemerkung überzeugen, daß diese Methode zu der nämlichen Absurdität führt, wegen welcher die Carpzov'sche allgemein verworfen wurde. Ist nämlich die Summe nach einer sehr großen Reihe von Jahren fällig, so tritt auch der Fall ein, daß der Gläubiger entweder gar nichts bekäme, oder dem Schuldner noch herauszahlen müßte, wenn die Gleichung 8 der Rechnung zu Grunde gelegt wird. Hiebei ist allerdings eine lange Reihe von Jahren nöthig. Dies thut aber nichts zur Sache, da sich hieraus die Unrichtigkeit der Methode auf das Auffallendste zeigt. Wäre nämlich in dem oben angegebenen Falle die Schuld erst nach 100 Jahren fällig, so wäre die Forderung des B nach 8 und §. 13:

$$R_1 = 2000.5\left(\frac{1}{105}+\frac{1}{110}+\frac{1}{115}+\ldots\frac{1}{600}\right)$$

$$= 10000\left[\frac{lg\,600}{5}+\frac{1}{2.600}-\frac{5}{12.600^2}+\frac{5^3}{120.600^4}\ldots\right.$$

$$\left.-\frac{lg\,105}{5}+\frac{1}{2.105}+\frac{5}{12.105^2}-\frac{5^3}{120.105^4}\ldots\right]$$

$$= 3617{,}2676\ldots\ \text{Fl.}$$

Dieser Fall mag nun allerdings zu den unwahrscheinlichen gehören, aber er zeigt, was er zeigen soll, daß die vorliegende Methode unrichtig ist.

§. 49.

Es würde zu weit führen, alle Einwürfe, die bereits gemacht wurden und die möglicherweise gemacht werden können, zu berühren und zu erörtern. Es genügt, zu bemerken, daß der Calcul die Leibnitz'sche Methode als die einzig richtige bezeichnet, wie aus dem Inhalt der §§. 28—31 und 48 hervorgehen dürfte. Daß aber allein der Calcul hierin entscheiden kann, wird wohl kaum bezweifelt werden. Hat nun der Calcul seine Nachweisungen gegeben, so hat er seine Pflicht erfüllt und es ist die Sache der Gesetzgebung, seine Resultate aufzunehmen und practisch zu machen, insoweit sie dies für geeignet halten mag. Der Einwurf, daß bei kleinen Summen das Gewinnen der Zinsen von Zinsen nicht immer möglich ist, kann wohl nicht von Erheblichkeit sein, denn es wird die gleiche Anmuthung an Schuldner und Gläubiger gemacht. Keiner kann sich daher beklagen, und es wird, wie sich gezeigt hat, die Sache durch den Calcul ganz objectiv behandelt und weder dem Einen noch dem Andern Unrecht gethan, und Jedem wird der wahre Werth seiner Forderung zugemessen.

Annähernd, aber nicht im ganzen Umfange, wurde diese Ansicht in das Landrecht des Großherzogthums Baden aufgenommen. In §. 835 der Proceßordnung heißt es: »Schuldigkeiten des Gemeinschuldners, die noch nicht verfallen sind, werden mit Eröffnung der Gant fällig. Es empfängt aber der Gläubiger, dessen Zahlungszieler unverzinslich sind, nur so viel vom Kapital, daß solches sammt den zu berechnenden Zinsen und Zwischenzinsen bis zum Verfalltage die Summe der ganzen noch nicht verfallenen Schuldigkeit ausmacht. — Zwischenzinsen werden jedoch nur mit berechnet, wenn der Zins von dem jetzt vorauszuzahlenden Kapitale 50 Fl. oder darüber beträgt und nur erst nach einem halben Jahre vom Verfalltage des Zinses, und bei kleineren Summen erst nach einem halben Jahre von der Zeit an, da die jetzt vorauszuzahlende Summe mit den einzelnen dazuzurechnenden künftigen Jahreszinsen bis zu einem Kapitalbetrage angewachsen ist, dessen Zins wenigstens 50 Fl. beträgt.« Die frühere Bestimmung des

Landrechts (1188, a) wurde hiedurch aufgehoben. Sie hieß: »Doch kann der Schuldner, dessen Zahlungszieler unverzinslich waren, so viel an der Vorauszahlung abziehen, als die Schuldigkeit bis zur Verfallzeit nach dem gesetzlichen Fuß Zins getragen haben würde.« Dies war die Carpzov'sche Methode. Das neue Gesetz verbindet theilweise die Leibnitz'sche mit der Hoffmann'schen Methode und mischt somit Wahres und Falsches durcheinander. Hiezu kommt, daß die Anwendung dieses Gesetzes in manchen Fällen die Auflösung von Problemen verlangt, welche a priori gar nicht, sondern nur durch Tentiren und nicht ohne viele Mühe und Weitläufigkeiten gelöst werden können. Es würde jedoch zu weit führen, dies hier nachzuweisen. Ein Zurückgehen auf die richtige Methode würde diesem vorbeugen.

Nachdem nun in diesem Kapitel diejenigen Sätze aufgestellt wurden, welche dem Calcul Sicherheit und Festigkeit zu geben im Stande sind, so theilen wir schließlich einige geschichtliche Bemerkungen mit, woraus zur Genüge hervorgehen wird, wie unbestimmt und schwankend die Ansichten bisher über das Verhältniß der Rechnung mit einfachen Zinsen und der mit Zinses-Zinsen waren. Dies hat offenbar seinen Grund darin, daß man sich die Sache nicht klar zu machen suchte und gerade die Frage, um deren Erörterung man sich abmühte, nicht richtig auffaßte, die sich auf so einfache und natürliche Weise zur Entscheidung führen läßt, wie die in diesem Kapitel aufgestellten Grundsätze zeigen. Leibnitz stellte in der oben erwähnten Abhandlung die Methode, bei Werthberechnung der Kapitalien Zinses-Zinsen anzuwenden, auf, ohne jedoch zugleich den Beweis für die Richtigkeit dieser Methode zu geben. Ob schon Jemand vor ihm diese Methode entwickelt hat, ist mir unbekannt. Gerade weil der Beweis für die Richtigkeit dieser Methode fehlte, konnte Hoffmann auf die Zulässigkeit einer andern Methode für diese Werthberechnung kommen, denn wäre ein Beweis für ihre Richtigkeit aufgestellt gewesen, so hätte er zuerst diesen entkräften müssen, um eine andere Methode an die Stelle setzen zu können. An die Stelle innerer Gründe für die Richtigkeit der einen oder der andern Methode traten äußere, und so kam eine Unsicherheit und ein Schwanken in dieses Gebiet der Mathematik, was um so mehr überraschen muß, da man in dieser Wissenschaft nur Bestimmtheit und Sicherheit zu finden gewohnt ist.

Das Gesagte wird sich am besten dadurch bestätigen, daß wir außer den bisher schon mitgetheilten Ansichten auch die hieher gehörigen Aeußerungen derjenigen anführen, welche über diesen Gegenstand schrieben.

Von Clausberg theilt in seiner demonstrativen Rechenkunst, Leipzig 1748. 2te Aufl. pag. 1229. §. 1274 u. ff. ein Beispiel mit, worauf er zuerst die Rechnung mit einfachen und dann die mit Zinses-Zinsen anwendet, und äußert sich über ihre Anwendung §. 1278 pag. 1233 so: »Nun

dürfte Jemand fragen, welcher von den fürgestellten zweierlei Arten man bei gerichtlichen Subhastationibus sich bedienen solle? Allein hierauf dient zur Antwort, daß die Erörterung dieser Frage nicht den Arithmeticis, sondern den Rechtsgelehrten obliege. Denn jene haben sich beflissen, die Richtigkeit beiderlei Rechnungsarten zu zeigen, und wird man wenig rechtschaffene Rechenbücher finden, in welchen solche zwei Arten zu Berechnung des Rabatts oder Interusurii von etlichen oder vielen Jahren nicht sollten angewiesen worden sein. Diese hingegen müssen aus den Rechten die Ursachen untersuchen, warum eigentlich Interesse auf Interesse zu nehmen verboten wird, auch wie weit solches Verbot zu extendiren, oder ob es ohne Exception sei, und aus solchen Gründen deduciren, welche Art zu erwählen.« In §. 1279 spricht er seine Ansicht, ohne sie durch Gründe zu unterstützen, dahin aus, daß er die zweite Art (Zins-Zinsrechnung) der ersten vorziehe. Der von Clausberg §. 1278 ausgesprochenen Ansicht steht die hier aufgestellte im Principe entgegen, indem der Mathematik mit Recht zugewiesen werden muß, was v. Clausberg den Rechtsgelehrten zuweisen will. v. Clausberg wurde hiedurch in einen Streit mit Hoffmann verwickelt, worüber man das Nähere in einem von letzterem geschriebenen Anhange zu Polack's Math. for. 3te Aufl. pag. 129 u. ff. nachlesen kann.

Michelsen behandelt den hierher gehörigen Gegenstand in dem 1sten Theile in seiner Anleitung zur juristischen, politischen und ökonomischen Rechenkunst §. 134 pag. 152 u. ff. und will nach §. 139 die Beantwortung der Frage, ob den Rabattrechnungen einfache oder Zinses-Zinsen zu Grunde gelegt werden müssen, von Umständen und Verhältnissen abhängig gemacht sehen und daher nach §. 198 u. ff. bald die eine, bald die andere Berechnungsweise angewendet wissen.

Florencourt entwickelt in seiner Anleitung zur juristischen und politischen Rechenkunst pag. 10 u. ff. nur die Rechnung mit Zinses-Zinsen, kommt aber nicht auf die hier mitgetheilten Resultate.

Brune spricht sich in seiner Vorrede zur Darstellung der einfachen und zusammengesetzten Zinsrechnung Lemgo 1813 so über die Anwendung der Rechnung mit einfachen und Zinses-Zinsen aus: »Es ist nicht die Sache des Calculators, sondern der interessirten Parteien oder des Gesetzes, zu entscheiden, ob nach dieser oder jener Art gerechnet werden soll, und daher habe ich mich auch aller Untersuchungen darüber, welche von beiden in jedem vorgegebenen Falle eigentlich angewendet werden muß, enthalten.« Auch diese Ansicht steht der hier entwickelten entgegen.

Fünftes Kapitel.

Von der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

§. 50.

Die Ausdrücke »möglich, wahrscheinlich und unwahrscheinlich« beziehen sich auf das Eintreffen von Ereignissen oder Erscheinungen, und das erste Wort deutet an, daß dem Eintreffen eines Ereignisses oder dem Vorhandensein einer Erscheinung keine inneren Gründe entgegenstehen. Das zweite Wort deutet gewöhnlich an, daß für das Eintreffen eines Ereignisses oder Vorhandensein einer Erscheinung mehr Gründe oder Ursachen als dagegen, und das dritte, daß umgekehrt mehr dagegen als dafür sprechen. Kennt man nun alle Ursachen, welche auf das Eintreffen eines Ereignisses oder das Vorhandensein einer Erscheinung und ihr Gegentheil einwirken können, so kann man alle günstig oder ungünstig wirkenden Ursachen zählen und unter einander vergleichen und somit den Begriff des Wahrscheinlichen der Rechnung unterwerfen. Man versteht daher unter mathematischer Wahrscheinlichkeit das Verhältniß derjenigen Anzahl von Ursachen oder Fällen, welche dem Eintreffen eines Ereignisses oder Vorhandensein einer Erscheinung günstig sind, zu der Anzahl aller möglichen Ursachen oder Fälle, welche auf das Eintreffen oder Vorhandensein und dessen Gegentheil einwirken können. Je mehr Fälle daher dem Eintreffen eines Ereignisses günstig sind, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit für dasselbe, je weniger ihm günstig sind, desto kleiner ist sie. Sind alle Fälle oder Ursachen dem Eintreffen günstig, so ist das Eintreffen gewiß und die Wahrscheinlichkeit wird zur Gewißheit. Ist keiner günstig, so ist auch keine Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen vorhanden, oder das Eintreffen ist eine Unmöglichkeit. Hieraus folgt nun, daß die Wahrscheinlichkeit (die im Folgenden durch w bezeichnet werden soll) immer durch einen echten Bruch, die Gewißheit (die durch g bezeichnet werden soll) durch die Einheit, und die Unmöglichkeit (die durch u bezeichnet werden soll) als Gegensatz der Gewißheit durch 0 ausgedrückt wird. Deutet man nun die Zahl der günstigen Fälle durch m, die der ungünstigen durch n, die aller möglichen durch $m + n = q$ an, so hat man hieraus:

$$1) \quad w = \frac{m}{m+n} = \frac{m}{q}$$

$$2)\quad g = \frac{m+n}{m+n} = \frac{q}{q} = 1$$

$$3)\quad u = \frac{0}{m+n} = 0.$$

Der Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß eintreffen werde, steht diejenige, daß es nicht eintreffen werde, gegenüber. Man nennt sie die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit. Hiernach ist, wenn man sie durch w_1 bezeichnet:

$$4)\quad w_1 = 1 - w = 1 - \frac{m}{m+n} = \frac{n}{m+n} = 1 - \frac{m}{q} = \frac{n}{q}.$$

Man unterscheidet zwischen einfacher und zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit und versteht unter ersterer die bisher betrachtete. Schließt aber die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses die mehrerer einfachen Wahrscheinlichkeiten in sich, so heißt sie zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. Diese wird entweder durch die Summe oder das Product der einfachen Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt. Das erstere tritt ein, wenn das Eintreffen der einzelnen Ereignisse sich gegenseitig ausschließt, und unter mehreren fraglichen Ereignissen nur eines eintreffen kann. Das zweite tritt ein, wenn zwei oder mehrere Ereignisse in Verbindung mit einander, entweder gleichzeitig oder nacheinander eintreffen sollen. Im letzten Falle hängt das Eintreffen der zusammengehörigen Ereignisse so von einander ab, daß alle ohne Unterschied eintreffen müssen, wenn nicht das Eintreffen des fraglichen Ereignisses aufgehoben werden soll. Die Wahrscheinlichkeit der ersten Art soll relative Wahrscheinlichkeit, die der zweiten Art bedingte oder abhängige heißen. Die eben unterschiedenen Begriffe werden hiernach auf folgende Art zu bezeichnen sein, wenn w_1, w_2, w_3, . . . w_n die Wahrscheinlichkeiten bezeichnen, welche das Eintreffen der einzelnen Fälle bestimmen; m_1, m_2, m_3 . . . . m_n die Zahl der für sie günstigen Fälle; q_1, q_2, q_3, . . . q_n die Zahl der Fälle, welche überhaupt auf das Eintreffen oder Nichteintreffen der fraglichen Ereignisse einwirken.

$$5)\quad w = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots . w_n = \frac{m_1}{q_1} + \frac{m_2}{q_2} + \frac{m_3}{q_3} + \ldots \frac{m_n}{q_n}$$

$$6)\quad w = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \ldots . . w_n = \frac{m_1}{q_1} \cdot \frac{m_2}{p_2} \cdot \frac{m_3}{q_3} \ldots . . \frac{m_n}{q_n}.$$

Das Gesagte läßt sich auf folgende Weise verdeutlichen. In einer Urne sind 12 weiße, 18 rothe und 24 schwarze Kugeln enthalten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

a) Daß eine rothe Kugel erscheinen werde, wenn einmal gezogen wird?

b) daß eine weiße oder rothe Kugel erscheinen werde, wenn einmal gezogen wird?

c) daß zuerst eine weiße und dann eine rothe Kugel erscheinen werde,

wenn zweimal gezogen und die gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne geworfen wird?

Um die Wahrscheinlichkeit für a zu finden, hat man die Zahl der günstigen Fälle zu bestimmen und sie mit der Zahl aller möglichen zu vergleichen. Hiedurch bestimmt sich nach 1 das fragliche Verhältniß:

$$w = \frac{18}{54} = \frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots .$$

Hier handelt es sich um Bestimmung der einfachen Wahrscheinlichkeit. In der unter b. aufgeführten Frage kommen zwei Fälle in Betrachtung, denn das Erscheinen einer weißen oder einer rothen Kugel genügt der Aufgabe, obwohl nur ein Fall von beiden eintreffen kann. Die Wahrscheinlichkeit des einen Falles, die so eben bestimmt wurde, wird um die des zweiten gesteigert, daher muß sich der Werth der Wahrscheinlichkeit des ersten Falles um den des zweiten nach 5 steigern. Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ist $w = \frac{12}{54} = \frac{2}{9} = 0{,}222, \ldots .$ Die Wahrscheinlichkeit des fraglichen Ereignisses ergiebt sich durch die Summe der beiden einfachen Wahrscheinlichkeiten, und ist sofort nach 5:

$$w = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9} = 0{,}5555 \ldots .$$

Die Wahrscheinlichkeit für c bestimmt sich dadurch, daß die beiden einfachen Wahrscheinlichkeiten sich mit einander verbinden, denn das Erscheinen einer rothen Kugel in der zweiten Ziehung, deren Wahrscheinlichkeit 0,333... ist, kann erst zu dem Gelingen des Unternehmens beitragen, wenn eine weiße Kugel in der ersten Ziehung bereits erschienen ist. Letzteres aber ist nicht gewiß, sondern kommt unter 9 Fällen nur 2mal vor. Hiernach hat man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = \frac{12}{54} \cdot \frac{18}{54} = \frac{2}{27} = 0{,}074074 \ldots .$$

Es kann auch Fälle geben, worin die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit die relative und bedingte in sich begreift. Würde die unter c. gestellte Frage dahin abgeändert, daß man fragt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß unter den dort angegebenen Bedingungen überhaupt eine weiße und eine rothe Kugel in zwei Ziehungen erscheinen werde, so kann entweder zuerst eine weiße und dann eine rothe und umgekehrt zuerst eine rothe und dann eine weiße Kugel erscheinen. Indem man daher die Gleichungen 5 und 6 gleichzeitig anwendet, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$w = \frac{12}{54} \cdot \frac{18}{54} + \frac{18}{54} \cdot \frac{12}{54} = 2 \cdot \frac{2}{27} = 0{,}148148 \ldots .$$

Da die einzelnen Glieder, wodurch die Summe in 5 hervorgebracht wird, und die Factoren des Productes in 6 in jeder beliebigen Ordnung

genommen werden können, ohne daß dadurch der Werth in 5 und 6 geändert wird, so folgt hieraus der Satz:

7) Die Ordnung, worin bei der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit die einzelnen Fälle genannt werden oder auf einander folgen, ist gleichgültig, und es kann irgend eine bestimmte Ordnung, worin die einzelnen Ereignisse auf einander folgen, durch jede andere Ordnung in diesen Ereignissen ersetzt werden, ohne daß sich dadurch der Werth der Wahrscheinlichkeit in den verschiedenen Fällen ändert.

Aus den Erörterungen dieses §. ergiebt sich, daß die Zahl der auf das Eintreffen eines Ereignisses günstig wirkenden Fälle dem Begriffe der das Eintreffen herbeiführenden Ursachen entspricht. Bezeichnet man nun letztere durch u_1, u_2 und die durch sie hervorgebrachten Wahrscheinlichkeiten w_1, w_2, so hat man folgende Vergleichung:

$$8)\quad u_1 : u_2 = w_1 : w_2 = \frac{m_1}{m_1+n_1} : \frac{m_2}{m_2+n_2}$$

oder: die Wahrscheinlichkeiten, welche dem Eintreffen der Ereignisse zugehören, stehen zu einander in demselben Verhältnisse, wie die, jene bedingenden Ursachen, und umgekehrt: die das Eintreffen verschiedener Ereignisse bedingenden Ursachen verhalten sich zu einander, wie die ihnen zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Die in diesem §. aufgestellten Sätze bilden die Grundlage, worauf die ganze Wahrscheinlichkeits-Rechnung beruht, denn das ganze Gebäude dieser Wissenschaft ist nichts als eine Anwendung dieser Sätze. Laplace hat zwar in seinem Werke Théorie analyt. d. probab. noch andere Sätze, als hieher gehörig, angeführt, die nach ihm von Poisson in seinem Werke Recherches sur la probab. noch vermehrt wurden. Eine nähere Betrachtung der von beiden aufgestellten Sätze zeigt, daß dies nicht richtig ist, und daß sie selbst specielle Sätze dieser Wissenschaft sind, worüber sich das Nähere in meinen Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeits-Rechnung §. 3 (Crelle's Journal 26ster Bd.) vorfindet.

So einfach die Principien dieser interessanten Wissenschaft sind, so schwierig wird oft die Ermittlung des Werthes der Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Falles, sie mag einfach oder zusammengesetzt sein, und die Beantwortung der Fragen, welche diese Wissenschaft vorlegt, führt oft zu den subtilsten Untersuchungen, wie man sich leicht aus den hieher gehörigen Werken überzeugen kann.

§. 51.

Es kann sich nicht darum handeln, hier eine nur einigermaßen vollständige Theorie dieser ziemlich ausgedehnten Wissenschaft zu geben. Wir müssen uns darauf beschränken, die hauptsächlichsten hieher gehörigen Fragen zu

betrachten, um durch sie dann weitere Anwendungen machen zu können. Sehr viele dieser Fragen lassen sich auf sehr einfachem Wege aus den Combinationen beantworten. Wir theilen deswegen auch einige Sätze aus der Combinations-Lehre mit.

Bei den Combinationen kommt einerseits die Darstellung der Gruppen, welche irgend einer Classe zugehören, andererseits die Zahl der hiedurch entstandenen Gruppen in Betracht. Die Combinationen scheiden sich ihrer Natur nach am einfachsten in zwei Arten: Versetzungen und Verbindungen. Jede von diesen scheidet sich wieder in die ohne und die mit Wiederholungen, und letztere in die mit beschränkten und die mit unbeschränkten Wiederholungen. Es giebt keine Art von Combinationen, die sich nicht dem eben angegebenen einfachen Schema unterordnen ließe, wie in meiner Combinations-Lehre gezeigt ist. Dennoch zersplittert man die Combinationen in noch andere Arten und vervielfältigt sie, anstatt sie zu vereinfachen. Die Versetzungen unterscheiden sich von den Verbindungen dadurch, daß die einzelnen Gruppen einer Classe bei ihnen nicht nur durch die in ihnen vorkommenden Elemente unter einander verschieden sind, sondern auch dadurch, daß die einzelnen in einer Gruppe vorkommenden Elemente so oft ihre Stellung oder Ordnung unter einander wechseln, als dies möglich ist, während bei den Gruppen der Verbindungen einer Classe die Ordnung oder veränderte Stellung, welche die Elemente unter einander eingehen können, ausgeschlossen bleibt und die Gruppen der Verbindungen zu einer Classe durch die in ihnen vorkommenden Elemente von einander verschieden sind. Nach diesen Bemerkungen wenden wir uns zur Darstellung der Gruppen der Versetzungen und Verbindungen und zur Bestimmung der hieraus sich ergebenden Anzahl.

Um die Art, wie die Gruppen der Versetzungen ohne Wiederholungen gebildet werden und ihre Anzahl gefunden wird, zu zeigen, sollen die Versetzungen aus den vier Elementen a_1, a_2, a_3, a_4 zu den verschiedenen Classen gebildet werden. Die Versetzungen aus diesen Elementen zur 1sten Classe sind die einzelnen Elemente selbst. Ihre Anzahl kommt der Zahl der Elemente gleich. Die Versetzungen zur zweiten Classe werden entstehen, wenn man jedes Element hervorhebt und es mit den übrigen (eigentlich den Gruppen zur ersten Classe aus den übrigen Elementen) in Verbindung bringt. Hiernach ist:

$$1)\quad P(a_1, a_2, a_3, a_4)^2 = \begin{matrix} a_1a_2 & a_2a_1 & a_3a_1 & a_4a_1 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3a_2 & a_4a_2 \\ a_1a_4 & a_2a_4 & a_3a_4 & a_4a_3 \end{matrix}$$

Die hieraus sich ergebende Gruppenzahl findet sich leicht. Es tritt nämlich jedes Element (im Ganzen also vier) mit den übrigen (also drei, denn eines wurde herausgenommen) in Verbindung. Hiernach ist die Gruppen-Anzahl:

$$2)\quad P[a_1, a_2, a_3, a_4]^2 = 4 \times 3 = 4^{2|-1}.$$

Die Versetzungen zur dritten Classe ergeben sich, wenn man jedes Element hervorhebt und es mit den Gruppen in Verbindung bringt, welche entstehen, wenn die Versetzungen aus den übrigen Elementen (hier jedesmal drei) zur zweiten Classe in Verbindung bringt. Man erhält:

3) $P(a_1, a_2, a_3, a_4)^3 = a_1a_2a_3 + a_2a_1a_3 + a_3a_1a_2 + a_4a_1a_2$

$a_1a_3a_2$	$a_2a_3a_1$	$a_3a_2a_1$	$a_4a_2a_1$
$a_1a_2a_4$	$a_2a_1a_4$	$a_3a_1a_4$	$a_4a_1a_3$
$a_1a_4a_2$	$a_2a_4a_1$	$a_3a_4a_1$	$a_4a_3a_1$
$a_1a_3a_4$	$a_2a_3a_4$	$a_3a_2a_4$	$a_4a_2a_3$
$a_1a_4a_3$	$a_2a_4a_3$	$a_3a_4a_2$	$a_4a_3a_2$

Da jedes der vier Elemente mit den übrigen die nämlichen Verbindungen eingeht, so ergiebt sich hieraus die gesuchte Gruppenanzahl:

4) $P[a_1, a_2, a_3, a_4]^3 = 4 \times 3.2 = 4^{3|-1}$.

Das Gesagte bleibt noch immer in Kraft, wenn auch mehr Elemente, woraus die Versetzungen gebildet werden sollen, in Frage kommen. Man kann daher die Gruppen der Versetzungen aus irgend einer Elementen-Anzahl (n) zu irgend einer Classe (r) auf die aus der nächst niedern Elementen-Anzahl ($n-1$) zur nächst niedern Classe ($r-1$) zurückführen. Hieraus gewinnt man folgende Darstellung für die Bildungsweise und Gruppen-Anzahl:

5) $P(a_1, a_2 \ldots a_n)^r = a_1 P(a_2, a_3, .. a_n)^{r-1} + a_2 P(a_1, a_3, a_4 .. a_n)^{r-1} \ldots$
$\ldots + a_3 P(a_1, a_2, a_4 .. a_n)^{r-1} \ldots + a_{n-1} P(a_1, a_2 .. a_{n-2}, a_n)^{r-1} + a_n P(a_1, a_2 .. a_{n-1})^{r-1}$.

6) $P[a_1, a_2, .. a_n]^r = n^{r|-1} = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots (n-r+1)$.

Ist $r = n$, so wird:

7) $P[a_1, a_2 \ldots a_n]^n = n^{n|-1} = n\,(n-1)\,(n-2) \ldots . 3.2.1$.

Die in 1, 3 und 5 gegebenen Darstellungen enthalten ein und dasselbe Bildungsgesetz. Alle Elemente werden allmälig herausgehoben und nehmen, wie sich zeigt, die erste Stelle ein. Diese Beschränkung ist jedoch nicht wesentlich. Man erhält die nämlichen Darstellungen, wenn man die herausgehobenen Elemente die zweite, dritte Stelle u. s. w. einnehmen läßt, und die allgemeine Darstellung in 5 bleibt noch immer in Kraft. Hieraus folgt, daß es gleichgültig ist, auf welcher Stelle man die herausgehobenen einzelnen Elemente einschaltet. Es wird immer die nämliche Darstellung und die gleiche Gruppen-Anzahl gewonnen werden. Hieraus rechtfertigt sich:

8) Werden die Gruppen der Versetzungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zu der $r$ten Classe gebildet, so erscheint ein Element auf einer bestimmten Stelle eben so oft als jedes andere und $(n-1)^{r-1|-1} = (n-1)(n-2) \ldots . (n-r+1)$mal.

9) Werden die Gruppen der Versetzungen ohne Wiederholungen aus n Elementen zu der $r$ten Classe gebildet, so erscheint ein bestimmtes Element auf allen Stellen gleich oft und $(n-1)^{r-1|-1} = (n-1)(n-2) \ldots . (n-r+1)$mal.

Beide Sätze fallen eigentlich zusammen und sind verschiedene Darstellungen derselben Sache.

Die Versetzungen mit beschränkten Wiederholungen sind solche, in deren sämmtlichen Gruppen ein, oder mehrere Elemente mehreremal und zwar gleich vielmal wiederholt vorkommen. Die entwickelte Darstellung der Gruppen selbst so wie ihre Anzahl leitet sich aus den Versetzungen ohne Wiederholungen ab, wenn man in diesen ein Element, oder mehrere gleichsetzt. Dadurch entstehen so viele unter sich gleiche Gruppen, als die Elemente Versetzungen hätten hervorbringen können, welche verschieden gewesen wären. Man hat statt aller dieser nur eine zu setzen, und die gesammte Gruppen-Anzahl geht auf den so vielten Theil zurück, als die eben berührte Versetzungszahl angiebt. Deutet man die Zahl, wie oft ein Element wiederholt erscheinen soll, durch einen Exponenten an, so erhält man folgende Darstellung für die Gruppen-Anzahl der Versetzungen zur $n$ten Classe, worin ein Element $p$mal wiederholt erscheinen soll:

$$10)\quad P[a_1, a_2^{p}, a_3, a_4 \ldots]^{n} = \frac{n^{n\,|\,-1}}{1^{p\,|\,1}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{1.2.3\ldots p.}$$

Das Gesagte läßt sich leicht auf Fälle ausdehnen, worin zwei und mehrere Elemente wiederholt erscheinen sollen, und man hat:

$$11)\quad P(a_1^{p}, a_2^{q}, a_3^{r} \ldots]^{n} = \frac{n^{n\,|\,-1}}{1^{p\,|\,1}.1^{q\,|\,1}.1^{r\,|\,1}\ldots} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1}{1.2\ldots.p.1.2\ldots q.1.2\ldots r\ldots.}$$

Hiebei ist eine nothwendige Bedingung, daß der Classenexponent (n) so groß sein muß als die Summe aller Wiederholungs-Exponenten, wobei zu bemerken ist, daß bei einem Elemente, welches keinen Wiederholungs-Exponenten hat, die Einheit als solcher zu nehmen ist. Man hat daher zu 11 folgende Bedingungs-Gleichung:

$$12)\quad n = p + q + r + s + \ldots\ldots$$

worin p, q, r u. s. w. auch die Einheit bezeichnen können.

Die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen und ihre Anzahl ergeben sich auf eine ähnliche Methode, woraus die Gleichungen 5, 6 und 7 abgeleitet wurden. Man geht von denen der ersten Classe zu denen der zweiten, von diesen zu denen der dritten über u. s. w. Die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen zur ersten Classe sind die Elemente selbst. Die Gruppen-Zahl ist also auch der Elementen-Zahl gleich, und man hat:

$$P[a_1, a_2, \ldots a_n]^{1} = n^{1}.$$

Die Gruppen der zweiten Classe werden gebildet, indem man der Reihe nach jedes Element heraushebt und es mit sämmtlichen Gruppen in Verbindung bringt, welche entstehen, wenn die Versetzungen mit Wiederholungen zur ersten Classe gebildet werden. Hiernach ist:

$$P'\ (a_1, a_2 \ldots a_n)^2 = a_1 a_1 + a_2 a_1 + a_3 a_1 + \ldots a_n a_1$$
$$a_1 a_2 \quad a_2 a_2 \quad a_3 a_2 \quad a_n a_2$$
$$a_1 a_3 \quad a_2 a_3 \quad a_3 a_3 \quad a_n a_3$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_1 a_n \quad a_2 a_n \quad a_3 a_n \quad a_n a_n.$$

Ihre Gruppenanzahl ist, da jedes von n Elementen mit n Gruppen in Verbindung gebracht wird:

$$P'\ [a_1, a_2 \ldots a_n]^2 = n.n = n^2.$$

Setzt man diese Schlußweise weiter fort, so kann man auf die Gruppen der dritten, vierten Classe u. s. w. übergehen, und man hat:

$$13)\ P'\ [a_1, a_2, \ldots a_n]^r = n^r.$$

Auch von diesen Gebilden gelten, wie man leicht erkennt, die Sätze 8 und 9. Es ist hier zu bemerken, daß die Zeichen für die Combinationen und ihre Gruppenzahl beibehalten werden, wie sie in meiner Combinations-Lehre aufgestellt sind.

§. 52.

Die Verbindungen bestehen nach der oben gegebenen Definition aus solchen Gruppen, welche durch die, in ihnen vorkommenden Elemente von einander verschieden sind. Um die Gruppen selbst zu bilden, wird es zweckmäßig sein, die Elemente in frühere und spätere abzutheilen, und unter spätern solche zu verstehen, welche höhere Stellenzahlen, den frühern gegenüber, führen. Man geht bei Darstellung der Gruppen der Verbindungen von denen zur ersten Classe aus, und zu denen der zweiten, von diesen zu denen der dritten über u. s. w. Ihre Bildungsweise wird sich am deutlichsten aus der Betrachtung besonderer Fälle, wie §. 51, ergeben. Wir wählen dazu die aus vier Elementen (a_1, a_2, a_3, a_4) zu den verschiedenen Classen. Die zur ersten Classe sind die Elemente in ihrer Einzelnheit selbst. Die Gruppen der Verbindungen zur zweiten Classe entstehen, wenn jedes Element hervorgehoben wird und nur mit den Verbindungen zur ersten Classe in Verbindung tritt, welche aus den entsprechenden spätern Elementen gebildet werden können. Hiernach ist:

$$C\ (a_1, a_2, a_3, a_4)^2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4$$
$$a_1 a_3 \quad a_2 a_4$$
$$a_1 a_4$$

Würde jedes Element auch mit Gruppen, die durch Zuziehung früherer Elemente gebildet werden können, in Verbindung treten, so würden Versetzungen nach 1 §. 51 entstehen, die aber nach dem angegebenen Begriff ausgeschlossen sind. Benutzt man diese Bemerkung, so leitet sich die Gruppenanzahl der Verbindungen zur zweiten Classe aus denen der Versetzungen zu derselben Classe ab, wenn man die Versetzungen aus jeder Gruppe ausschließt, also durch 1.2 theilt. Hiernach ist die fragliche Gruppenanzahl:

$$C\,[a_1, a_2, a_3, a_4]^2 = \frac{4\,.\,3}{1\,.\,2} = \frac{4^{2\,|\,-1}}{1^{2\,|\,1}} = (4)_2$$

Bringt man nun jedes Element mit den Gruppen in Verbindung, welche aus den entsprechenden spätern Elementen zur zweiten Classe gebildet werden können, so entsteht:

$$C\,(a_1, a_2, a_3, a_4)^3 = a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4$$
$$a_1 a_2 a_4$$
$$a_1 a_3 a_4$$

Die Gruppenanzahl leitet sich auch für diese Classe dadurch von der Gruppenanzahl der Versetzungen aus den nämlichen Elementen und zur nämlichen Classe 3 §. 51 ab, daß man die Versetzungen aus jeder Gruppe ausscheidet, also durch 1.2.3. theilt. Hiernach ist:

$$C\,[a_1, a_2 \ldots a_n]^3 = \frac{4\,.\,3\,.\,2}{1\,.\,2\,.\,3} = \frac{4^{3\,|\,-1}}{1^{3\,|\,1}} = (4)_3$$

Diese Schlüsse lassen sich weiter fortsetzen und auf jede Elementenzahl und Classe ausdehnen. Man hat daher allgemein folgende Gleichungen:

1) $C(a_1, a_2, \ldots a_n)^r = a_1 C(a_2, a_3 \ldots a_n)^{r-1} + a_2 C(a_3, a_4, .. a_n)^{r-1} + a_3 C(a_4, a_5, .. a_n)^{r-1} ..$
$\ldots\ldots a_{n-r+1} \cdot C(a_{n-r+2}, a_{n-r+3}, \ldots a_n).$

2) $C\,[a_1, a_2, .. a_n]^r = \frac{P\,[a_1, a_2, \ldots . a_n]^r}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots . r}.$

3) $C\,[a_1, a_2 \ldots a_n]^r = \frac{n^{r\,|\,-1}}{1^{r\,|\,1}} = (n)_r = \frac{n\,(n-1)\,(n-2) \ldots . (n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots . . r}.$

Bei den Verbindungen mit Wiederholungen tritt jedes Element nicht nur mit spätern, sondern auch mit sich selbst in Verbindung. Die Gruppen selbst werden in Folge dieser Bemerkung ganz auf die eben angegebene Methode durch Uebergang von den frühern Classen zu den spätern gewonnen. Wendet man das Gesagte auf die eben betrachteten besondern Fälle an, so ist:

$$C'\,(a_1, a_2, a_3, a_4)^2 = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + a_4 a_4$$
$$a_1 a_2 \quad a_2 a_3 \quad a_3 a_4$$
$$a_1 a_3 \quad a_2 a_4$$
$$a_1 a_4$$

$$C'\,(a_1, a_2, a_3, a_4)^3 = a_1 a_1 a_1 + a_2 a_2 a_2 + a_3 a_3 a_3 + a_4 a_4 a_4$$
$$a_1 a_1 a_2 \quad a_2 a_2 a_3 \quad a_3 a_3 a_4$$
$$a_1 a_1 a_3 \quad a_2 a_2 a_4 \quad a_3 a_4 a_4$$
$$a_1 a_1 a_4 \quad a_2 a_3 a_3$$
$$a_1 a_2 a_2 \quad a_2 a_3 a_4$$
$$a_1 a_2 a_3 \quad a_2 a_4 a_4$$
$$a_1 a_2 a_4$$
$$a_1 a_3 a_3$$
$$a_1 a_3 a_4$$
$$a_1 a_4 a_4$$

u. s. w. Dies führt zu folgender allgemeinen Gleichung:

4) $C'(a_1, a_2, .. a_n)^r = a_1 C'(a_1, a_2 ... a_n)^{r-1} + a_2 C'(a_2, a_3, .. a_n)^{r-1} + a_3 C'(a_3, a_4, .. a_n)^{r-1} .... a_{n-1} C'(a_{n-1}, a_n)^{r-1} + a_n C'(a_n)^{r-1}$.

Die Gruppenanzahlen dieser Verbindungen zu irgend einer Classe lassen sich dadurch bestimmen, daß man die Stellenzahlen der Elemente in der entwickelten Darstellung dieser Gruppen erhöht, und zwar die Stellenzahlen der Elemente in der zweiten Vertikalreihe um die Einheit, die in der dritten um zwei Einheiten u. s. f., die in der $r$ten Vertikalreihe um $(r-1)$ Einheiten. Dadurch wird nicht die Gruppenanzahl, sondern nur die Stellenzahl der Elemente verändert. Die Gruppen der Verbindungen mit Wiederholungen werden auf die ohne Wiederholungen zurückgeführt, und es entsteht folgendes Gesetz, das sich leicht an besondern Fällen veranschaulichen läßt:

5) $C'[a_1, a_2, a_3, ... a_n]^r = C[a_1, a_2, a_3 .... a_n, a_{n+1}, a_{n+2} .... a_{n+r-1}]^r$.

Die Gruppenanzahl für diese Darstellung ergiebt sich, indem man $(n+r-1)$ statt n in 3 setzt, und es ist:

6) $C'[a_1, a_2, ... a_n]^r = \frac{(n+r-1)^{r|-1}}{1^{r|1}} = \frac{(n+r-1)(n+r-2)...n}{1 . 2 .... r} = \frac{n^{r|1}}{1^{r|1}} = [n]_r$*).

Häufig findet die Vertheilung der Elemente in Fächer Anwendung in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung. Wird nämlich irgend eine Anzahl von Elementen so in zwei oder mehrere Fächer vertheilt, daß in jedem Fache eine bestimmte Anzahl Elemente vorkommt, und wird diese Vertheilung so oft vorgenommen, als verschiedene Gruppen hervorgebracht werden können, so sollen die hiedurch entstandenen Zusammenstellungen oder Gruppen „Vertheilung der Elemente in Fächer“ genannt werden. Das Gesagte verdeutlicht sich am besten durch Vorführung eines besondern Falles, wozu die Vertheilung von fünf Elementen in zwei Fächer gewählt werden soll, so daß im ersten drei, im zweiten zwei Elemente vorkommen. Es ist sofort:

$$V(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)^{3,2} = \begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 & a_4 a_5 \\ a_1 a_2 a_4 & a_3 a_5 \\ a_1 a_2 a_5 & a_3 a_4 \\ a_1 a_3 a_4 & a_2 a_5 \\ a_1 a_3 a_5 & a_2 a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 a_4 a_5 & a_2 a_3 \\ a_2 a_3 a_4 & a_1 a_5 \\ a_2 a_3 a_5 & a_1 a_4 \\ a_2 a_4 a_5 & a_1 a_3 \\ a_3 a_4 a_5 & a_1 a_2 \end{vmatrix}$$

Es entstehen zehn Gesammtgruppen. Jede Gesammtgruppe enthält alle Elemente und zwei Fachgruppen in sich. Die Gesammtgruppen unterscheiden sich dadurch von einander, daß sich nie die nämlichen Elemente in den einzelnen Fachgruppen zeigen, und die Gruppen desselben Faches dadurch, daß

*) Im Folgenden wird der Kürze wegen auch $(n)_r$ statt $\frac{n^{r|-1}}{1^{r|1}}$ und $[n]_r$ statt $\frac{n^{r|1}}{1^{r|1}}$ geschrieben werden.

sie nicht dieselben, sondern verschiedene Elemente führen. Die Versetzungen sind daher bei dieser Art von Combinationen ausgeschlossen. Hiernach bestimmt sich die Gruppenanzahl in dem vorliegenden Falle durch:

$$V[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^{3,2} = \frac{5.4.3}{1.2.3} \cdot \frac{2.1}{1.2} = (5)_3 \cdot (2)_2 = \frac{5^{5|-1}}{1^{3|1} \cdot 1^{2|1}}.$$

Der Uebergang aus dem vorliegenden Falle ins Allgemeine ist nicht schwer. Sollen daher n Elemente in zwei Fächer so vertheilt werden, daß in dem ersten Fache p und im zweiten die übrigen, also $(n—p)$ Elemente vorkommen, so ist die hiedurch entstehende Gruppenanzahl:

$$7)\quad V[a_1, a_2, \ldots a_n]^{p,n-p} = \frac{n^{n|-1}}{1^{p|1} \cdot 1^{n-p|1}} = (n)_p\,(n-p)_{n-p} = \frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}}.$$

Sollen nun n Elemente in drei Fächer so vertheilt werden, daß in dem ersten p, im zweiten q und im dritten die übrigen enthalten sind, so läßt sich die eben gefundene Gleichung zu Auffindung der gesuchten Gruppenanzahl benutzen. Denkt man sich die Elemente vorerst in zwei Fächer abgeschieden, so ist ihre Gruppenanzahl $(n)_p$. Es bleiben nun noch $(n—p)$ Elemente übrig, die sofort in zwei Fächer so zu vertheilen sind, daß in dem ersten q und in dem zweiten die übrigen, also $(n—p—q)$ enthalten sind. Die Gruppenzahl für diesen Fall ist $(n—p)_q \cdot (n—p—q)_{n-p-q}$ nach 7. Die Gruppenanzahl des einen Falls wird durch die des andern gesteigert Daher ist die gesuchte Gruppenanzahl:

$$8)\quad V[a_1, a_2, \ldots a_n]^{p,q,n-p-q} = (n)_p\,(n-p)_q\,(n-p-q)_{n-p-q} = \frac{n^{n|-1}}{1^{p|1} \cdot 1^{q|1} \cdot 1^{n-p-q|1}}$$

Dieses Gesetz läßt sich leicht auf jede beliebige Zahl von Fächern ausdehnen, und man hat:

$$9)\quad V[a_1, a_2, \ldots a_n]^{p,q,r,s\ldots} = \frac{n^{n|-1}}{1^{p|1} \cdot 1^{q|1} \cdot 1^{r|1} \cdot 1^{s|1} \ldots 1^{n-p-q-\ldots|1}}$$

wobei die Bedingungsgleichung gilt:

$$10)\quad n = p + q + r + s + \ldots\ldots$$

Sollen nun Elemente verschiedener Art in zwei oder mehrere Fächer so vertheilt werden, daß in dem ersten eine bestimmte Zahl von den Elementen der ersten, zweiten, dritten Art u. s. w., eben so in dem zweiten, eben so in dem dritten Fache u. s. w., so lassen sich die bisher gegebenen Resultate in 7, 8 und 9 dazu benutzen, um die fragliche Gruppenanzahl zu bestimmen. Für sich betrachtet, ist die Anzahl der Elemente einer jeden Art nach einer der vorstehenden Gleichungen zu behandeln. Geschieht dies, und werden die hieraus sich ergebenden partiellen Gruppenanzahlen unter sich verbunden, so ergiebt sich hieraus die gesuchte gesammte Gruppenanzahl. Sollen daher die Elemente von zwei verschiedenen Arten in zwei Fächer so vertheilt werden, daß in dem ersten Fache p Elemente der ersten und q Elemente der

zweiten Art und die übrigen Elemente beider Arten in dem zweiten Fache enthalten sind, so ist die gesuchte Gruppenanzahl:

11) $V[a_1, a_2, .. a_n; b_1, b_2, .. b_m]^{p, n-p; q, m-q} = \frac{n^{n|-1}}{1^{p|1} 1^{n-p|1}} \cdot \frac{m^{m|-1}}{1^{q|1} . 1^{m-q|1}}$

Bei zwei Elementenreihen und drei Fächern ist:

12) $V[a_1, a_2 .... a_n; b_1, b_2, .b_m]^{p,q,n-p-q; r,s,m-r-s} = \frac{n^{n|-1}}{1^{p|1} . 1^{q|1} . 1^{n-p-q|1}} \cdot \frac{m^{m|-1}}{1^{r|1} . 1^{s|1} . 1^{m-r-s|1}}$

u. s. w. Hiedurch ist die Methode angegeben, wie jeder andere hierher gehörige Fall zu behandeln ist. Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes findet sich in meiner Comb.-Lehre §. 38 u. ff. Man bemerkt leicht, daß die Gruppenanzahl in den Gleichungen 7 — 12 ungeändert bleibt, wenn auch eine andere Ordnung in den Fakultäten der Nenner gewählt wird. Da nun diese Fakultäten von der Anzahl der Elemente, welche in den bezüglichen Fächern vorkommen, abhängen, so folgt hieraus:

13) Die Ordnung, in welcher die Fächer für die zu vertheilenden Elemente bestimmt werden, ist ganz gleichgültig, wenn nur die jedem Fache zugetheilte Elementenanzahl beibehalten wird.

Von den hier gegebenen Sätzen lassen sich leicht Anwendungen auf besondere Fälle machen, worüber einige hier stehen sollen. Wie oft lassen sich die 24 Buchstaben des Alphabetes versetzen? 620448401733239439360000 mal nach 7 §. 51. Wie oft lassen sich die 32 Blätter einer Piquet-Karte versetzen? 263130836933693530167218012160000000mal. Das sogenannte Kartenschlagen giebt hiernach ein unversiegbares Feld der Combination. Wie oft lassen sich die 40 Blätter des l'Hombre-Spiels so unter die drei Spieler ausgeben, daß jeder 9 Karten bekommt und 13 zum Kaufen oder Austauschen zurückgelegt werden? $\frac{40 . 39 ..... 3 . 2 . 1}{(1.2.3...9)^3 . 1 . 2 . 3 ... 13} =$ 2742051789669912720000mal nach 9. Wollten drei Personen, die täglich 200 Spiele machen, so lange spielen, bis sie alle möglichen Spiele gesehen hätten, so müßten sie 37562353283149489 Jahre leben, um ihren Zweck zu erreichen, wobei zu bemerken ist, daß sie kein Spiel wiederholen dürften und daß sie wenigstens $3\frac{1}{2}$ Stunde täglich spielen müßten, da wohl kein Spiel, auch bei sehr schnellen Spielern, in weniger als einer Minute geendet sein wird. Wie oft können die 32 Blätter eines Piquet-Spieles unter zwei Spieler so vertheilt werden, daß jeder 12 Karten bekommt und je 5 und 3 zum Kaufen zurückbehalten werden? $\frac{32.31.30 ..... 3.2.1}{(1.2.3...12)^2.1.2.3.4.5.1.2.3} =$ 1592814947068800mal nach 9. Wie oft können die 52 Karten des Whist-Spiels unter vier Spieler so vertheilt werden, daß jeder 13 Karten bekommt? $\frac{52 . 51 ..... 3 . 2 . 1}{(1 . 2 . 3 ..... 13)^4} =$

536447377654887928392374400000mal nach 9. Brunacci giebt in seinem Werke (Corso di matem. subl. T. I. pag. 46. Firenze 1804) folgende Zahl an: 8565126197851151797861440000, die aber wohl falsch sein dürfte, wie wiederholt angestellte Prüfung zeigte.

Die in den §§. 51 und 52 aufgestellten Sätze finden ihre Anwendung nicht nur in den bisher angeführten Fällen, also wenn es sich um Anordnung und Gruppirung von Elementen handelt, sondern auch dann, wenn eine Anzahl von Kugeln oder Nummern in einer Urne enthalten ist, und dieselben einzeln oder partienweise gezogen werden sollen, ferner bei den verschiedenen Karten-Spielen, bei dem Lotto-, dem Würfel-Spiele u. s. w., wie sich sofort zeigen wird.

§. 53.

In einer Urne sind m Kugeln einer Art und n Kugeln einer zweiten Art enthalten. Man zieht $r$mal, nimmt bei jeder Ziehung eine Kugel heraus und wirft sie nach der Ziehung in die Urne zurück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß h Kugeln der ersten Art in den h ersten Ziehungen und $(r—h)$ Kugeln der zweiten Art in den folgenden Ziehungen erscheinen werden?

Da die gezogene Kugel nach jeder Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird, so ist die Anzahl der Kugeln in der Urne bei jeder neuen Ziehung vollständig. Es sind daher bei jeder Ziehung m Fälle vorhanden, worin eine Kugel der ersten Art erscheinen wird. Da dies $h$mal hintereinander geschehen soll, so fällt die hiedurch bedingte Zahl der günstigen Fälle mit den Versetzungen mit Wiederholungen aus m Elementen zur $h$ten Classe zusammen, und ist m^h nach 13 §. 51. Es sind ferner in der Urne n Kugeln der zweiten Art enthalten, und die Kugeln der $(r—h)$ letzten Ziehungen sollen dieser Art angehören. Hier sind bei jeder Ziehung n Fälle möglich. Es entstehen daher die Versetzungen aus n Elementen zur $(r—h)$ten Classe. Die Zahl der hiedurch bedingten günstigen Fälle ist hiernach n^{r-h}. Die Zahl aller möglichen günstigen Fälle ergiebt sich durch Verbindung beider Anzahlen und ist $A = m^h . n^{r-h}$. Betrachtet man die in der Urne befindlichen Kugeln ohne Rücksicht auf die beiden unter sich verschiedenen Arten, so ist ihre Zahl $(m+n)$. Da das Erscheinen jeder Kugel bei jeder Ziehung gleich möglich und die Zahl der Kugeln bei jeder Ziehung vollständig ist, da ferner r Ziehungen gemacht werden, so fällt die Zahl aller möglichen Fälle mit der Gruppenanzahl der Versetzungen mit Wiederholungen aus $(m + n)$ Elementen zur $r$ten Classe zusammen. Diese Gruppenanzahl ergiebt sich aus 13 §. 51, wenn dort $m+n$ statt n gesetzt wird, und ist $A_1 = (m+n)^r$. Hiernach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$1) \quad w = \frac{m^h . n^{r-h}}{(m+n)^r}.$$

Sind drei Arten von Kugeln in einer Urne enthalten und man fragt nach der Wahrscheinlichkeit, daß unter den angegebenen Bedingungen nur Kugeln der ersten Art in den h ersten Ziehungen, nur Kugeln der zweiten Art in den k folgenden, und in den übrigen $(r—h—k)$ Ziehungen nur Kugeln der dritten Art erscheinen werden, so ergiebt sich die Zahl der günstigen Fälle ganz auf die eben gezeigte Methode. In h Ziehungen können m^h Kugelgruppen der ersten Art, in k Ziehungen n^k Gruppen der zweiten, in $(r—h—k)$ Ziehungen p^{r-h-k} Gruppen der dritten Art erscheinen, wenn p Kugeln der dritten Art in der Urne enthalten sind. Die Zahl der günstigen Fälle ist daher $A = m^h . n^k . p^{r-h-k}$, die aller möglichen ist $(m+n+p)^r$, da $(m+n+p)$ Kugeln in der Urne enthalten sind. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhält man sofort:

$$2) \quad w = \frac{m^h . n^k . p^{r-h-k}}{(m+n+p)^r} .$$

Die nämlichen Schlüsse gelten, wenn vier und mehrere Arten von Kugeln in der Urne enthalten sind. Man hat sofort:

$$3) \quad w = \frac{m^h . n^k . p^l + \ldots}{(m+n+p+\ldots)^{h+k+l\ldots}} = \frac{m^h . n^k . p^l \ldots}{(m+n+n+..)^{r\,\cdot\cdot}}$$

wobei also $r = h+k+l\ldots$ ist. In den vorhergehenden Fällen ist eine bestimmte Ordnung in dem Erscheinen der Kugeln vorgeschrieben. Wird diese Beschränkung aufgehoben und gestattet, daß die Kugeln der verschiedenen Arten in jeder beliebigen Ordnung erscheinen können, so steigert sich die Anzahl der günstigen Fälle und zwar so oft, als sich die Kugeln der verschiedenen Arten unter einander versetzen lassen. Diese Zahl ergiebt sich aus 11 §. 51. Die Kugeln einer und derselben Art lassen sich als unter sich gleiche Elemente betrachten. Die Exponenten p, q, $r\ldots$ fallen also mit dem wiederholten Erscheinen der Kugeln von einerlei Art zusammen. Man hat also in den vorliegenden Fällen h statt p, k statt q, l statt r u. s. w. und r statt n zu setzen und dann die hiedurch entstehenden Resultate mit der Anzahl der günstigen Fälle zu verbinden. Hiernach erhält man bei zwei Kugelarten die Zahl der günstigen Gruppen:

$$4) \quad A_1 = \frac{r^{rl-1}}{1^{hll} . 1^{r-hll}} m^h . n^{r-h} = \frac{r\,(r—1)\ldots.3.2.1}{1.2\ldots r.1.2\ldots(r—h)} m^h . n^{r-h},$$

bei drei Kugelarten:

$$5) \quad A_1 = \frac{r^{rl-1} . m^h . n^k\, p^{r-h-k}}{1^{hll} . 1^{kll} . 1^{r-h-kll}} = \frac{r(r—1)\ldots.3.2.1\; m^h . n^k . p^{r-h-k}}{1.2\ldots r.1.2\ldots k.1.2\ldots.(r—h—k)}$$

u. s. w. Die Wahrscheinlichkeit nun, daß aus einer Urne, worin zwei verschiedene Kugelarten enthalten sind, überhaupt h Kugeln der ersten, $(r—h)$ Kugeln der andern Art erscheinen werden, wenn die gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen wird, ist:

$$6)\quad w = \frac{r\,(r-1)\,(r-2)\ldots.3\,.\,2\,.\,1}{1.2\ldots.h\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots(r-h)}\,.\,\frac{m^{h}\,.\,n^{r-h}}{(m+n)^{r}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß von drei verschiedenen Kugelarten, die in einer Urne enthalten sind, h der ersten, k der zweiten und $(r-h-k)$ der dritten Art erscheinen werden, ist hiernach:

$$7)\quad w = \frac{r\,(r-1)\,(r-2)\ldots.3\,.\,2\,.\,1}{1.2\ldots.h.1.2\ldots k.1.2\ldots(r\text{-}h\text{-}k)}\,.\,\frac{m^{h}.\,n^{k}.\,p^{r-h-k}}{(m+n+p)^{r}}.$$

Diese Bemerkungen lassen sich leicht auf vier und mehr Kugelarten, die in einer Urne enthalten sind, ausdehnen.

In einer Urne sind m Kugeln einer und n Kugeln einer andern Art enthalten. Man zieht $r$mal, nimmt jedesmal eine Kugel aus der Urne, und wirft sie nach der Ziehung nicht in die Urne zurück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in den ersten h Ziehungen nur Kugeln der ersten und in den übrigen $(r-h)$ Ziehungen nur Kugeln der andern Art erscheinen werden.

Die Kugelanzahl bleibt in dem vorliegenden Falle nicht vollständig, sondern vermindert sich bei jeder Ziehung um eine. Es sind daher bei der ersten Ziehung m, bei der zweiten $(m-1)$, bei der dritten $(m-2)$ u. s. w., bei der $h$ten Ziehung noch $(m-h+1)$ Kugeln in der Urne vorhanden. In der ersten Ziehung sind daher m, in der zweiten $(m-1)$, in der dritten $(m-2)$ günstige Fälle vorhanden u. s. w. Hieraus ergeben sich also für die erste Kugel-Art:

$$8)\quad A_1 = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots.\,(m-h+1) = m^{h\text{l-1}}$$

günstige Fälle. Auf gleiche Weise ergiebt sich die Zahl der günstigen Fälle, welche durch die zweite Kugelart bedingt ist, und in $(r-h)$ Ziehungen eintreffen kann:

$$9)\quad A_2 = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots.(n-(r-h)+1) = n^{\,r\text{-}h\text{l-1}}.$$

Die in 8 und 9 angegebenen Kugelgruppen fallen, wie man leicht erkennt, mit den Gruppenanzahlen der Versetzungen ohne Wiederholungen 6 §. 51 zusammen. In der Urne sind $(m+n)$ Kugeln im Ganzen enthalten. Die Zahl aller möglichen Fälle kommt nach den eben gemachten Bemerkungen mit der Zahl der Gruppen überein, welche entstehen, wenn die Versetzungen ohne Wiederholungen aus $(m+n)$ Elementen zur $r$ten Classe gebildet werden. Wird $m+n$ statt n in 6 §. 51 gesetzt, so ist hiernach:

$$10)\quad A = (n+m)\,(m+n-1)\ldots.(m+n-r+1) = (m+n)^{r\text{l-1}}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher:

$$11)\quad w = \frac{m(m\text{-}1)\ldots.(m\text{-}h\text{+}1)\,n(n\text{-}1)(n\text{-}2)\ldots.(n\text{-}r\text{+}h\text{+}1)}{(m+n)\,(m+n\text{-}1)\,(m+n\text{-}2)\ldots.(m+n\text{-}r\text{+}1)} = \frac{m^{h\text{l-1}}\,n^{r\text{-}h\text{l-1}}}{(m+n)^{r\text{l-1}}}.$$

In einer Urne sind drei Kugelarten, m von der 1sten, n von der 2ten, p von der dritten Art. r Ziehungen werden unter den nämlichen Bedingungen wie oben gemacht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in den

h ersten Ziehungen nur Kugeln der ersten, in den k folgenden nur Kugeln der zweiten und in den $(r—h—k)$ übrigen Ziehungen nur $(r—h—k)$ Kugeln der dritten Art erscheinen werden?

Macht man nun die Schlüsse, welche zu den Gleichungen 8, 9 und 10 führten, so erhält man für die Zahl aller günstigen Gruppen:

12) $A_1 = m(m-1)\ldots(m-h+1)\,n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\,p(p-1)(p-2)\ldots$
$(p-(r-h-k)+1) = m^{hl-1}\,.\,n^{kl-1}\,.\,p^{r-h-kl-1}$.

Da in der Urne im Ganzen $(m+n+p)$ Kugeln enthalten sind, so ist nach 6 §. 51 die Zahl aller möglichen Kugelgruppen, wenn r Ziehungen gemacht werden:

13) $A = (m+n+p)(m+n+p-1)\ldots(m+n+p-r+1) = (m+n+n)^{rl-1}$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist sofort:

$$14)\quad w = \frac{m^{hl-1}\,.\,n^{kl-1}\,.\,p^{r-h-kl-1}}{(m+n+p)^{rl-1}}.$$

Die Schlüsse bleiben unverändert, wenn auch vier und mehr unter sich verschiedene Kugel-Arten in einer Urne enthalten sind. Wird unter den oben angegebenen Bedingungen gezogen und verlangt, daß in den h ersten Ziehungen nur Kugeln der ersten, in den k folgenden nur Kugeln der zweiten und in den l folgenden nur Kugeln der dritten Art erscheinen sollen u. s. w., so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$15)\quad w = \frac{m^{hl-1}\,.\,n^{kl-1}\,.\,p^{l|-1}\ldots.}{(m+n+p+q\ldots)^{h+k+\ldots 1-1}} = \frac{m^{hl-1}\,.\,n^{kl-1}\,.\,p^{l|-1}\ldots.}{(m+n+p+\ldots)^{rl-1}}$$

worin $r = h+k+l+\ldots$ sein muß.

Ist in den vorstehenden Fällen die Ordnung, in welcher die Kugeln erscheinen sollen, gleichgültig und wird verlangt, daß überhaupt h Kugeln der ersten, k Kugeln der zweiten, l Kugeln der dritten Art u. s. w. erscheinen sollen, so steigert sich auch hier die Zahl der günstigen Fälle auf die zu 4 und 5 angegebene Weise, und es treten mit der Zahl der günstigen Gruppen noch Coefficienten in Verbindung, welche angeben, wie oft sich die Kugeln der verschiedenen Arten, um deren Erscheinen es sich handelt, unter einander nach 10 oder 11 §. 51 versetzen lassen. Verbindet man nun die entsprechenden Coefficienten mit den in 11, 14 und 15 angegebenen Gleichungen, so ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für folgende Fälle:

In einer Urne sind m Kugeln einer Art und n Kugeln einer zweiten enthalten. Es wird $r$mal gezogen und bei jeder Ziehung eine Kugel herausgenommen, welche nicht in die Urne zurückgeworfen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt h Kugeln der ersten und $(r—h)$ Kugeln der zweiten Art erscheinen werden? Sie ist:

$$16)\quad w = \frac{r(r-1)(r-2)..3.2.1}{1.2...h.1.2...(r-h)}\,\frac{m(m-1)..(m-h+1)n(n-1)..(n-r+h+1)}{(m+n)(m+n-1)\ldots.(m+n-r+1)} = \frac{r^{rl-1}\,m^{hl-1}\,n^{r-hl-1}}{1^{hl1}.1^{r-hl1}(m+n)^{rl-1}}$$

Sind drei Kugel-Arten in der Urne enthalten, so ist die Wahrscheinlich-

keit, daß überhaupt h Kugeln der ersten, k der zweiten und die übrigen $(r—h—k)$ Kugeln der dritten Art erscheinen werden, wenn r Kugeln einzeln gezogen werden und p Kugeln der dritten Art in der Urne enthalten sind:

$$17)\ w = \frac{r(r-1)....3.2.1\ m(m-1)....(m-h+1)n(n-1)...(n-k+1)p(p-1)...(p-r+h+k+1)}{1.2..h.1.2..k1.2...(r-h-k)\quad (m+n+p)(m+n+p-1).....(m+n+p-r+1)}$$

$$= \frac{r^{rl-1}}{1^{hl1}.1^{kl1}.1^{r-k-hl1}} \cdot \frac{m^{hl-1}.n^{kl-1}.p^{r-h-kl-1}}{(m+n+p)^{rl-1}}.$$

Bei vier und mehr Kugel-Arten ist die Wahrscheinlichkeit:

$$18)\quad w = \frac{r^{rl-1}}{1^{hl1}.1^{kl1}.1^{l|1}....} \cdot \frac{m^{hl-1}.n^{kl-1}.p^{l|-1}....}{(m+n+p+...)^{h+k+l....|-1}}.$$

In einer Urne sind zweierlei Kugel-Arten, m Kugeln der einen und n der andern Art enthalten. Man nimmt r Kugeln auf einmal heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß h Kugeln der ersten und $(r—h)$ Kugeln der zweiten Art erscheinen werden?

Die Zahl der günstigen Fälle ergiebt sich leicht, wenn man bemerkt, daß nach der Aufgabe die in der Urne befindlichen Kugeln so in zwei Abtheilungen oder Fächer gebracht werden sollen, daß in der einen h Kugeln der einen und $(r—h)$ der andern und die übrigen Kugeln sich in der andern befinden. Sie fällt daher mit der Vertheilung der Elemente zweier Arten in Fächer zusammen, und ergiebt sich aus 11 §. 52, wenn $p = h$ und $q = r — h$, m statt n und n statt m gesetzt wird. Sie ist:

$$19)\quad A_1 = \frac{m^{ml-1}}{1^{hl1}.1^{m-hl1}} \cdot \frac{n^{nl-1}}{1^{r-hl1}.1^{n-r+hl1}} = \frac{m^{hl-1}}{1^{hl1}} \cdot \frac{n^{r-hl1}}{1^{r-hl1}}.$$

Um die Zahl aller möglichen Kugel-Gruppen zu finden, hat man die in der Urne enthaltenen, verschiedenartigen $(m+n)$ Kugeln als Kugeln von nicht verschiedener Art zu betrachten, und sie so in zwei Fächer zu vertheilen, daß in dem ersten r und in dem andern die übrigen enthalten sind. Die hiedurch bedingte Gruppenzahl ergiebt sich nach 7 §. 52, wenn $m+n$ statt n und r statt p gesetzt wird. Sie ist:

$$20)\ A = \frac{(m+n)^{m+nl-1}}{1^{rl1}\ 1^{m+n-rl-1}} = \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)...3.2.1}{1.2.3....r.1.2....(m+n-r+1)} = \frac{(m+n)^{rl-1}}{1^{rl1}}$$

Durch den Quotienten von A_1 und A ergiebt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Sie ist:

$$21)\quad w = \frac{m^{ml-1}.n^{nl-1}.1^{rl-1}.1^{m+n-rl1}}{1^{hl1}.1^{m-hl1}.1^{r-hl1}.1^{m-r+hl1}(m+n)^{m+nl-1}} = \frac{r^{rl-1}}{1^{hl1}.1^{r-hl1}} \cdot \frac{m^{hl-1}.n^{r-hl-1}}{(m+n)^{rl-1}}$$

Sind in einer Urne drei Arten von Kugeln (m, n, p) enthalten, und soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß überhaupt h Kugeln der ersten, k Kugeln der zweiten und l Kugeln der dritten Art erscheinen, wenn $h+k+l = r$ Kugeln auf einmal herausgenommen werden, so fällt die Zahl der günstigen Fälle mit der Anzahl der Gruppen zusammen, welche

entstehen, wenn die Elemente dreier Reihen in zwei Fächer vertheilt werden, und ist, wie sich aus 11 §. 52 leicht erschließt:

$$22)\quad A_1 = \frac{m^{h|-1}}{1^{h|1}} \cdot \frac{n^{k|-1}}{1^{k|1}} \cdot \frac{p^{l|1}}{1^{l|1}}.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle ist nach 7 §. 52, da $(m+n+p)$ Kugeln in der Urne enthalten sind und diese in zwei Abtheilungen gebracht werden sollen, wovon die erste $h+k+l=r$ Kugeln enthält:

$$23)\quad A = \frac{(m+n+p)^{h+k+l|-1}}{1^{h+k+l|1}}$$

wenn $m+n+p$ statt n und $h+k+l$ statt p gesetzt wird. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist hiernach:

$$24)\, w = \frac{1^{h+k+l|1}}{1^{h|1}.1^{k|1}.1^{l|1}} \frac{m^{h|-1}.n^{k|-1}.p^{l|-1}}{(m+n+p)^{h+k+l|-1}} = \frac{1^{r|1}\, m^{h|-1}.n^{k|-1}.p^{r-h-k|-1}}{1^{h|1}.1^{k|1}.1^{r-h-r|1}(m+n+p)^{r|-1}}.$$

Diese Schlüsse lassen sich nun weiter fortsetzen und auf jede Zahl von Kugel-Arten anwenden. In einer Urne sind m Kugeln einer Art, n Kugeln einer zweiten Art enthalten. Man nimmt $c+d$ Kugeln auf einmal heraus und bringt sie zusammen in eine Abtheilung, dann nimmt man $(f+g)$ Kugeln auf einmal heraus und bringt sie in eine zweite. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der ersten Abtheilung c Kugeln der ersten und d Kugeln der zweiten Art, in der zweiten Abtheilung f Kugeln der ersten und g Kugeln der zweiten Art enthalten sind?

Die Bestimmung der Zahl der günstigen, so wie die aller möglichen Fälle beruht auf der Vertheilung der Elemente zweier Reihen in drei Abtheilungen, und es ist hier die Gleichung 8 §. 52 wiederholt anzuwenden. Die Zahl der günstigen Kugel-Gruppen beruht auf der Verbindung der zwei folgenden Ausdrücke:

$$A_1 = \frac{m^{c|-1}}{1^{c|1}} \cdot \frac{n^{d|-1}}{1^{d|1}}; \qquad A_2 = \frac{(m-c)^{f|-1}}{1^{f|1}} \cdot \frac{(n-d)^{g|-1}}{1^{g|1}}.$$

Die Zahl aller möglichen Gruppen ergiebt sich gleichfalls aus 8 und ist:

$$A = \frac{(m+n)^{(c+d)+(f+g)|-1}}{1^{c+d|1}.1^{f+g|1}}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist sofort:

$$25)\quad w = \frac{1^{c+d|1}.1^{f+g|1}}{1^{c|1}.1^{d|1}.1^{f|1}.1^{g|1}} \cdot \frac{m^{c+f|-1}.n^{d+g|-1}}{(m+n)^{c+d+f+g|-1}}.$$

Diese Schlüsse lassen sich leicht weiter fortsetzen und auf drei und mehr Kugel-Arten und drei und mehr Fächer ausdehnen. Weitere hierhergehörige Betrachtungen finden sich in Crelle's Journal, 26ster Bd. (Untersuchungen über Wahrscheinlichkeit §. 4 u. ff.). Aus den in diesem §. gewonnenen Sätzen lassen sich leicht weitere Resultate ziehen. Sie sind folgende:

26) Werden Kugeln einzeln aus einer Urne gezogen und wird die gezogene Kugel nach der Ziehung in die Urne zurückgeworfen, so kommen die

Gruppenzahlen der Versetzungen mit Wiederholungen in Anwendung; wird aber die gezogene Kugel nicht in die Urne zurückgeworfen, so kommen die Gruppenanzahlen der Versetzungen ohne Wiederholungen; werden die Kugeln in Masse gezogen, so kommen die Gruppenanzahlen der Vertheilung der Elemente in Fächer in Anwendung.

Vergleicht man die Gleichungen 16 und 17 mit 21 und 25, so erkennt man, daß je zwei sich gleich sind und daß es also in den vorliegenden Fällen einerlei ist, ob r Kugeln einzeln oder in Masse aus der Urne genommen werden. Das nämliche Resultat würde man erhalten, wenn mehr Kugelarten und mehr Fächer vorhanden wären, worein die herauszunehmenden Kugeln vertheilt werden sollten. Dies führt zu folgendem Satze:

27) Wird aus einer Urne, worin eine oder mehrere Kugelarten enthalten sind, eine beliebige Anzahl Kugeln herausgenommen und verlangt, daß sie auf eine bestimmte Weise in Abtheilungen gebracht werden sollen, so ist es hinsichtlich des Resultates einerlei, ob die Kugeln einzeln oder auf einmal, oder theilweise in Masse aus der Urne genommen und in Abtheilungen gebracht werden.

Beachtet man endlich die Ordnung, worin die Factoren des Zählers in der Gleichung 25 erscheinen, so bleibt das Resultat ungeändert, in welcher Weise sich auch die Ordnung der Factoren ändert. Hieraus und in Rücksicht auf 27 rechtfertigt sich folgender Satz:

28) Wird aus einer Urne, worin mehrere Kugelarten enthalten sind, eine Anzahl Kugeln herausgenommen und in mehrere Abtheilungen so vertheilt, daß in der ersten r, in der zweiten s, in der dritten t Kugeln u. s. w. enthalten sein sollen, so ist die Ordnung, in welcher die Kugeln in die verschiedenen Abtheilungen gebracht werden, ganz gleichgültig.

§. 54.

Die Sätze des vorigen §. finden ihre Anwendung bei den Lotterien und Spielen, wie bei dem Lotto und den Kartenspielen aller Art. Die Gleichungen 11, 14 und 15 kommen in den Fällen in Betrachtung, wenn es sich um eine bestimmte Ordnung in dem Erscheinen der einzelnen Kugeln handelt; die Gleichungen 16, 17 u. ff., wenn die Ordnung, in welcher die Kugeln erscheinen, gleichgültig ist. Ersteres ist der Fall, wenn es sich um das Erscheinen eines bestimmten Auszugs oder einer bestimmten Ambe bei dem Lotto handelt, Letzteres bei allen Kartenspielen. Hiebei finden namentlich auch die Sätze 27 und 28 §. 53 Anwendung, und es ist bei hinreichender Mischung ganz einerlei, ob die Karten einzeln, oder partienweise, oder auf einmal, und in welcher Ordnung sie ausgegeben werden. Gewöhnlich hält man eine bestimmte Ordnung bei dem Austheilen der Karten fest, obwohl es ganz außerwesentlich und an sich ganz gleichgültig ist, welcher Spieler

die Karten zuerst erhält. Bei manchen Spielen, wie bei dem l'Hombre, Piquet ꝛc., wird eine bestimmte Zahl Karten zum Kaufe oder Austauschen zurückgelegt, und es ist hiebei gleichgültig, ob dies vor oder nach dem Vertheilen der Karten unter die Spieler geschieht. Bei manchen Spielen, wie bei dem Whist, ist es Zweck, daß die Karten gut unter die Spieler vertheilt werden; daher giebt man die Blätter einzeln aus, und es kann durch Vertheilen der Karten in einzelnen Blättern oder kleinen Partien der Nachlässigkeit im Mischen vorgebeugt werden. Obwohl sich manche nicht uninteressante Anwendungen der im vorigen §. gefundenen Gleichungen auf die Kartenspiele machen lassen, so verfolgen wir doch diesen Gegenstand nicht weiter, sondern benutzen dieselben, um einige Fragen über das Lotto, das in manchen Staaten nicht nur gestattet, sondern auch von dem Staate selbst betrieben wurde und noch wird, zu beantworten.

Das Lotto ist ein Spiel, das aus 90 Zahlen besteht. Es steht Jedem frei, eine oder mehrere Zahlen mit irgend einer Summe zu besetzen. Erscheint die besetzte Nummer, oder erscheinen mehrere besetzte Nummern in der vom Spieler bezeichneten Weise, so hat der Spieler gewonnen. In bestimmten Zeiträumen wird gespielt, und dann werden jedesmal fünf Nummern von 90 gezogen, und das Gewinnen hängt daher davon ab, ob eine oder mehrere von den besetzten Nummern sich unter den gezogenen befinden. Es kann nun Jemand eine, zwei, drei, vier oder fünf Zahlen als solche besetzen. Es entsteht daher die Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Auszug (eine besetzte Zahl), Ambe (zwei besetzte Zahlen gleichzeitig oder zusammen), Terne (drei besetzte Zahlen gleichzeitig), Quaterne (vier besetzte Zahlen), Quine (fünf besetzte Zahlen gleichzeitig) erscheinen und gewinnen werden?

Die Zahl der dem Unternehmen günstigen Fälle ergiebt sich, wenn man die besetzten Nummern als Kugeln einer Art und die übrigen als die der zweiten Art bezeichnet und nun bestimmt, inwiefern das Erscheinen der Zahlen in der angegebenen Verbindung möglich ist. Damit ein Auszug erscheine, muß die besetzte Nummer (als einer besondern Art zugehörig gedacht) mit vier von der zweiten Art in Verbindungen treten; damit eine Ambe erscheine, müssen die zwei besetzten Nummern (als einer besondern Art zugehörig gedacht) mit drei von der zweiten Art in Verbindung treten u. s. w. Man findet die gesuchte Wahrscheinlichkeit, wenn man die Gleichung 16 oder 21 §. 53 anwendet und $r = 5$, statt m die Werthe 1, 2, 3, 4, 5, und gleichzeitig statt n die Werthe 89, 88, 87, 86, ferner gleichzeitig mit m statt h die Werthe 1, 2, 3, 4, 5 einführt. Hiernach erhält man der Reihe nach die Wahrscheinlichkeiten für das Erscheinen

1) eines Auszugs $w_1 = \frac{5.4.3.2.1}{1.1.2.3.4} \cdot \frac{1.89.88.87.86}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{18} = 0{,}055\ldots.$

2) einer Ambe $w_2 = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.1.2.3} \cdot \frac{2.1.88.87.86}{90.89.88.87.86} = \frac{2}{801} = 0{,}00249687..$

3) einer Terne $w_3 = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.1.2} \cdot \frac{3.2.1.87.86}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{11748}$

$= 0{,}0000851208...$

4) einer Quaterne $w_4 = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.1} \cdot \frac{4.3.2.1.86}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{511038}$

$= 0{,}000000195680$

5) einer Quine $w_5 = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{5.4.3.2.1}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{43949268}$.

Versteht man unter einem bestimmten Auszug einen solchen, der in einem bestimmten Zuge, und unter einer bestimmten Ambe eine solche, wenn zwei Zahlen in einer bestimmten Ordnung und in zwei bestimmten Zügen erscheinen, so ist, wie sich leicht rechtfertigt, die Wahrscheinlichkeit für das Erscheinen

des bestimmten Auszugs: 6) $w_1 = \frac{1.89.88.87.86}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{90} = 0{,}01111...$

der bestimmten Ambe: 7) $w_2 = \frac{1.1.88.87.86}{90.89.88.87.86} = \frac{1}{8010} = 0{,}000124843..$

Besetzt Jemand zwei oder drei Nummern, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Auszug erscheinen werde nach der Gleichung 16 oder 21 §. 53:

8) $w = \frac{5.4.3.2.1}{1.1.2.3.4} \cdot \frac{2.88.87.86.85}{90.89.88.87.86} = \frac{85}{801} = 0{,}106117...$

9) $w = \frac{5.4.3.2.1}{1.1.2.3.4} \cdot \frac{3.87.86.85.84}{90.89.88.87.86} = \frac{595}{3916} = 0{,}15194...$

§. 55.

Kann mit dem Eintreffen eines Ereignisses der Besitz eines physischen Gutes oder ein Gewinn erworben werden, so erhält dasselbe einen Werth. Dieser Werth soll Werth der Erwartung oder Hoffnung heißen. Trifft das Ereigniß gewiß ein, so wird auch der Gewinn mit Gewißheit erworben, und der zu erwartende Gewinn behält seinen vollen Werth. Sind aber unter den Ursachen, wovon das Eintreffen eines Ereignisses abhängt, m günstige und n ungünstige, so wird das Ereigniß nicht mit Gewißheit, sondern nur in m Fällen unter $(m+n)$ möglichen eintreffen. Der zu erwartende Gewinn wird daher auch nicht mit dem vollen Werth in Aussicht gestellt werden können, sondern nur mit dem so vielten Theil, als die

Hoffnung, ihn zu erhalten, angiebt. Nennt man den Werth der Erwartung E, den zu erwartenden Gewinn G, so ist:

$$1)\ E = \frac{m}{m+n} G = w G.$$

Hiernach wird der Werth der Erwartung durch das Product des Gewinnes in die Wahrscheinlichkeit, den Gewinn zu erhalten, bestimmt. Es ist nicht zu verkennen, daß der Werth eines Gutes, das man entweder ganz oder gar nicht erhält, in dieser Eigenschaft nicht ermittelt werden kann. Dies widerspricht der Gleichung 1 nicht, denn in ihr liegt eigentlich nur die Bedeutung des Werthes, zu welchem es in richtiger Würdigung der Umstände angeschlagen werden kann, wenn ihm ein solcher beigelegt werden soll. Hat Jemand mehrere Gewinne bei den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$ zu erwarten, so besteht der Werth seiner Erwartung aus der Summe der einzelnen Erwartungswerthe, und ist:

$$2)\ E = w_1 G_1 + w_2 G_2 + w_3 G_3 + \ldots w_n G_n$$

Ist statt der Wahrscheinlichkeiten die Zahl der günstigen Fälle $p_1, p_2 \ldots p_n$ gegeben, unter welchen Jemand die entsprechenden Gewinne $G_1, G_2, G_3 \ldots G_n$ zu erwarten hat, so ist die erste Form der Gleichung 1 wiederholt anzuwenden, und es ergiebt sich sofort:

$$3)\ E = \frac{p_1 G_1 + p_2 G_2 + p_3 G_3 + \ldots p_n G_n}{p_1 + p_2 + p_3 \ldots\ldots p_n}.$$

Die Werthe von $w_1, w_2 \ldots w_n$ in 2; $p_1, p_2 \ldots p_n$ in 3 können auch unter sich gleich sein. Dasselbe gilt von den Werthen $G_1, G_2, G_3 \ldots G_n$, von denen sogar einzelne 0 sein können. Die Anwendung des Gesagten ist leicht. Besitzt Jemand ein Loos einer, aus 1000 Loosen bestehenden Lotterie, worin ein Gewinn von 10000, einer von 5000, vier von 1000, vier von 500, und 600 von 50 Fl. enthalten sind, so ist der Werth der Erwartung nach 2 oder 3:

$$4)\ E = \frac{1.10000+1.5000+4.1000+4.500+600.50+390\times 0}{1000} = 51 \text{Fl.}$$

§. 56.

Das Vertheilen der Gewinne durch das Loos setzt Beiträge (B) der Theilnehmer voraus, aus denen jene geschöpft werden können. Soll nun der Werth der Einlage dem zu erwartenden Gewinne gegenüber auf richtiger Grundlage beruhen, so muß der Theilnehmer den nämlichen Werth nach 1 §. 55 zu erwarten haben, welchen er einsetzt. Dies führt zu folgendem Grundsatze:

1) Die Einlage muß dem Werthe der Erwartung gleichkommen, und umgekehrt. Es muß daher sein: $B = E$.

Dieser Satz und die Gleichung 1 §. 55 läßt eine Vergleichung zwischen der Einlage und dem zu erwartenden Gewinne zu, wenn man den dort angegebenen Werth für E einführt. Es ist:

$$2)\ B = w\,.\,G = \frac{m}{m+n}\,G$$

Da diese Gleichung die Einlage und den zu erwartenden Gewinn mit einander vergleicht, so kann man letztern bestimmen:

$$3)\ G = \frac{B}{w} = \frac{(m+n)\,B}{m}.$$

Bei Lotterien, Spielen, Spielbanken ꝛc. wird eine bestimmte Summe (B) eingesetzt und dafür im glücklichen Falle eine bestimmte Summe (S) ausgezahlt. Vergleicht man letztere mit derjenigen, die man nach 3 erhalten sollte, und nennt das hiedurch sich ergebende Resultat D, so hat man:

$$4)\ D = \frac{B}{w} - S = \frac{(m+n)}{m}\,B - S$$

Es ergiebt sich ein Verlust für den Einleger, wenn S kleiner; ein Vortheil, wenn S größer; kein Vortheil und kein Nachtheil, wenn S so groß als $\frac{B}{w}$ ist. Soll nun die Größe des Verlustes oder Gewinnes (V) bestimmt werden, so hat man das Verhältniß zwischen D und dem nach 3 zu erhaltenden Gewinne anzugeben, oder, was dasselbe ist, 4 durch 3 zu messen. Man erhält:

$$5)\ V = 1 - \frac{wS}{B} = 1 - \frac{m\,.\,S}{(m+n)\,B}$$

Nimmt man, was am einfachsten ist, die Einheit als die Einlage an und setzt $B = 1$, so ist:

$$6)\ V = 1 - wS = 1 - \frac{m}{m+n}S$$

Vervielfacht man 6 mit 100, so erhält man den Verlust in Proc.:

$$7)\ V = 100\,(1 - wS)$$

Versuchen sich zwei Personen (A_1, A_2) im Spiele, so hat jede von ihnen vor demselben eine Einlage zu machen. Die gewinnende erhält nach dem Spiele die von beiden ausgesetzte Summe, oder es hat, wenn dies nicht geschieht, die verlierende eine bestimmte Summe an die gewinnende nach der Beendigung des Spieles auszuzahlen. Um die Größe der beiderseitigen Einlagen zu ermitteln, ist zu bemerken, daß der Werth der Erwartung beider Personen vor dem Spiele nach dem Gesetze der Billigkeit gleich sein muß. Man hat daher aus 1 §. 55:

$$8)\ w_1 G_1 = w_2 G_2 \quad \text{oder:} \quad 9)\ G_1 : G_2 = w_2 : w_1$$

wenn w_1 und G_1 für A_1, und w_2 und G_2 für A_2 gilt. Hieraus ergiebt sich, daß die zu erwartenden Gewinne sich zu einander umgekehrt, wie die

zugehörigen Wahrscheinlichkeiten verhalten. Man bemerkt nun leicht, daß G_1 der Gewinn ist, welchen A_1 nach dem Spiele von A_2, und G_2 der Gewinn ist, den A_2 von A_1 zu erhalten hat, oder daß G_1 die Einlage ist, welche A_2 vor dem Spiele, und G_2 die Einlage ist, die A_1 zu machen hat. Nennt man nun erstere B_2 und letztere B_1, so hat man aus 8 und 9:

$$10)\ w_1 B_2 = w_2 B_1 \quad \text{oder} \quad 11)\ B_1 : B_2 = w_1 : w_2$$

d. h. die zu machenden Einlagen verhalten sich zu einander direct, wie die den Spielern günstigen Wahrscheinlichkeiten. Bemerkt man, daß nach dem Gesagten der Gewinn, welchen die eine Person von der andern zu erhalten hat, mit der Summe, welche die andere zu zahlen hat, zusammenfällt, so kann man die Größen in den Darstellungen 8—11 auf eine und dieselbe Person beziehen und sie als Einlage B und Gewinn G, bei der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen w_1, und der zu verlieren w_2 darstellen, und dann ergiebt sich:

$$12)\quad G = \frac{w_2}{w_1} B = \frac{n}{m} B.$$

Diese Gleichung harmonirt vollkommen mit 3, denn sie giebt den zu erwartenden Gewinn ohne Rücksicht auf die Einlage an, und man erhält 3 aus 12, wenn man auf der rechten Seite die Einlage B zuzählt.

Anwendungen ergeben sich leicht. A_1 spielt gegen A_2 mit einem Würfel und gewinnt, wenn die Zahl 6 fällt. Wie viel gewinnt er, oder wie viel hat A_2 nach dem Spiel zu zahlen, wenn A_2 verliert? A_1 gewinnt in 6 Fällen einmal, A_2 aber fünfmal. A_1 hat also von A_2 zu erhalten: $G = 5\,B$. Das nämliche Resultat ergiebt sich aus 3. Denn A_1 hat die Einlage B einmal auszusetzen und erhält sie mit dem Gewinne von A_2 wieder zurück. Die Gleichungen 3—7 geben den Vortheil an, welcher von dem Spieler an Banken, in Lotterien ꝛc. genommen wird, wie sich an folgenden Fällen zeigen wird. Nach dem Königl. Baierschen Lottokalender vom Jahre 1839 wird der unbestimmte Auszug mit dem 15fachen, der bestimmte mit dem 75fachen, die unbestimmte Ambe mit dem 270fachen, die bestimmte mit dem 5100fachen, die Terne mit dem 5400fachen, die Quaterne mit dem 60000fachen Satze bezahlt. Nach den Gleichungen 6 und 7 ist der Vortheil der Bank von dem

unbestimmten Auszug: $1 - \frac{15}{18} = 0{,}1666\ldots = 16{,}66..$ Proc.

bestimmten Auszug: $1 - \frac{75}{90} = 0{,}1666\ldots = 16{,}66..$ Proc.

unbestimmten Ambe: $1 - \frac{2.270}{801} = 0{,}32584.. = 32{,}584..$ Proc.

bestimmten Ambe: $1 - \frac{5100}{8010} = 0{,}36329.. = 36{,}329..$ Proc.

unbestimmten Terne: $1 - \frac{5400}{11748} = 0{,}54034.. = 54{,}034..$ Proc.

unbestimmten Quaterne: $1 - \frac{60000}{511038} = 0{,}88259.. = 88{,}259...$ Proc.

Nach Lacroix (Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, §. 66) wird in der Lot. de France der unbestimmte Auszug mit dem 15fachen, der bestimmte Auszug mit dem 70fachen, die unbestimmte Ambe mit dem 270fachen, die bestimmte mit dem 5100fachen, die Terne mit dem 5500fachen, die Quaterne mit dem 75000fachen, die Quine mit dem 1000000fachen Einsatze bezahlt. In dieser Lotterie wird der unbestimmte Auszug, die unbestimmte und bestimmte Ambe mit dem nämlichen Gewinn bezahlt, wie in der Königl. Baierschen Lotterie, die übrigen aber nicht. Die Besetzung einer Quine ist in der Baierschen Lotterie nicht gestattet. Hiernach stellt sich der Vortheil in jener Lotterie so: Von dem

unbestimmten Auszug: $1 - \frac{15}{18} = 0{,}1666... = 16{,}66...$ Proc.

bestimmten Auszug: $1 - \frac{70}{90} = 0{,}2222... = 22{,}22...$ Proc.

unbestimmten Ambe: $1 - \frac{2.270}{801} = 0{,}32584... = 32{,}584...$ Proc.

bestimmten Ambe: $1 - \frac{5100}{8010} = 0{,}36329.. = 36{,}329...$ Proc.

Terne: $1 - \frac{5500}{11748} = 0{,}53183.. = 53{,}183...$ Proc.

Quaterne: $1 - \frac{75000}{511038} = 0{,}85323.. = 85{,}323...$ Proc.

Quine: $1 - \frac{1000000}{43949268} = 0{,}97724.. = 97{,}724...$ Proc.

Würden bei diesen Lotterien die Gewinne nach 3 §. 56 in ein richtiges Verhältniß mit der Einlage gebracht, so müßte als Gewinn gezahlt werden für den

unbestimmten Auszug	die 18	fache Einlage.	(1 §. 54.)
bestimmten Auszug	die 90	» »	(6 §. 54.)
unbestimmte Ambe	die 400,5	» »	(2 §. 54.)
bestimmte Ambe	die 8010	» »	(7 §. 54.)
Terne	die 11748	» »	(3 §. 54.)
Quaterne	die 511038	» »	(4 §. 54.)
Quine	die 43949268	» »	(5 §. 54.)

Man sieht, wie groß die Vortheile sind, welche der Bank aus dieser Lotterie erwachsen. Keine andere Lotterie nimmt so hohe Procente von den Spielern. Die Verwaltungskosten sind allerdings zu rechnen. Sie können

jedoch nicht so bedeutend sein, daß sie so ungewöhnlich starke Abzüge zu rechtfertigen vermöchten. Von der Ambe an steigern sich die Abzüge in einem unverhältnißmäßigen Grade. Wenn nun auch die Gefahr bei dem Eintreffen einer Terne oder Quaterne, die gerade mehrere Mal besetzt wird, groß ist, und die Bank deswegen für ihre Existenz im unglücklichen Falle fürchten könnte, so wäre derselben auf anderem Wege, als durch Abzug ganz ungemein hoher Procente, die an das Ungerechte streifen, etwa durch vorübergehendes Sperren oder durch Ausstoßen der die Existenz gefährdenden Wechselfälle vorzubeugen. Aus diesen so ungewöhnlich hohen Abzügen läßt sich auch die bedeutende Einnahme erklären, welche einem Staate aus dieser Lotterie zufließt. Gewöhnlich kehrt dieses Spiel wenigstens alle Monate, sogar noch früher, wieder. Nimmt man die Wiederholung nur monatlich an, so steigern sich die vorhin angeführten Procente um das Zwölffache, wenn sie auf eine Jahresfrist zurückgebracht werden, und es ergiebt sich hiernach folgender Vortheil für den Staat in jährlichen Procenten. Von dem

unbestimmten Auszug: $\frac{1200}{6} = 200$ Proc.

bestimmten Auszug: $\frac{15.100.12}{90} = 200$ Proc.

unbestimmten Ambe: $\frac{261.1200}{801} = 391{,}011..$ Proc.

bestimmten Ambe: $\frac{291.1200}{801} = 435{,}95..$ Proc.

Terne: $\frac{6348.1200}{11748} = 648{,}41..$ Proc.

Quaterne: $\frac{451038.1200}{511038} = 1059{,}14...$ Proc.

Bedenkt man nun, daß diese ergiebige Quelle daraus fließt, daß der Staat die sehr verderbliche Leidenschaft des Spiels nährt, so trifft dieser Vorwurf um so schwerer, da demselben die unverbrüchliche Pflicht aufliegt, die Moralität des Volkes nach allen Kräften zu heben und alle sie gefährdenden Veranlassungen zu entfernen, während er hier im directen Gegensatze die Leidenschaft zur Ausbeute eines pecuniären Vortheils benutzt.

Setzt man nach 8 §. 50 das Vorkommen eines Auszugs, einer Ambe, Terne ꝛc. ihren Wahrscheinlichkeiten proportional, so ergiebt sich hieraus für das Erscheinen des unbestimmten und bestimmten Auszugs, der unbestimmten und bestimmten Ambe, der Terne, der Quaterne und der Quine folgende Zusammenstellung:

12208130 : 2441626 : 548680 : 27434 : 18705 : 430 : 5.

Es wird daher unter 15245010 möglichen Fällen 12208130 Mal ein

unbestimmter, 2441626 Mal ein bestimmter Auszug, 548680 Mal eine unbestimmte, 27434 Mal eine bestimmte Ambe, 18705 Mal eine Terne, 430 Mal eine Quaterne und 5 Mal eine Quine vorkommen. Der unbestimmte Auszug wird daher 5 Mal so oft, als der bestimmte, 22 Mal so oft, als die unbestimmte, und 445 Mal so oft, als die bestimmte Ambe ꝛc. vorkommen, und das Vorkommen des unbestimmten Auszuges wird ungefähr $\frac{4}{5}$ des ganzen Ertrags, der bestimmte ungefähr 0,16... desselben ausmachen u. s. w., und dies um so sicherer, je größere Theilnahme dieses lockende Spiel findet und je mehr gesetzt wird. Man erkennt hieraus, wie unbedeutend die Gefahr für das Bestehen der Bank und ungewöhnlich hoch die Einnahmen steigen, was sich auch durch die Erfahrung bestätigt.

§. 57.

In vielen Fällen werden die Gewinne durch Loose, welche aus einer Urne gezogen werden, vertheilt. Die Theilnehmer werden dann in irgend einer Ordnung zum Loosen gelangen müssen. Es entsteht daher die Frage: Welchen Einfluß hat die Ordnung, worin die Theilnehmer zum Loosen gelangen, auf den Werth der Erwartung?

Um die vorliegende Frage leichter zu beantworten, gehen wir von folgendem besondern Falle aus.

In einer Urne sind n Kugeln, eine weiße und $(n-1)$ schwarze enthalten. Von den Personen A_1, A_2, A_3 . . . . A_n nimmt jede in der genannten Ordnung eine Kugel heraus, ohne vorher in die Urne sehen zu können. Diejenige Person erhält den Gewinn G, welche die weiße Kugel zieht. Wie groß ist der Werth der Erwartung für A_r (die Person, welche den $r$ten Zug hat)?

Es ist klar, daß die weiße Kugel bei jeder Ziehung erscheinen kann. Damit A_r zum Loosen gelange, darf die weiße Kugel in keinen der vorhergegangenen Ziehungen erschienen sein. Die Wahrscheinlichkeit, daß A_r zum Ziehen gelange, beruht daher darauf, daß in den $(r-1)$ vorhergegangenen Ziehungen nur schwarze Kugeln erschienen sein werden. Die Zahl der hiefür günstigen Fälle ist nach 6 §. 51:

$$1)\quad A_1 = (n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = (n-1)^{r-1|1}.$$

Die Zahl aller möglichen Fälle aber ist, da in der Urne überhaupt n Kugeln enthalten sind, nach der nämlichen Gleichung:

$$2)\quad A = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+2) = n^{r-1|-1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit nun, zum Ziehen zu gelangen, ist für A_r:

$$3)\quad w_1 = \frac{(n-1)^{r-1|-1}}{n^{r-1|-1}} = \frac{(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)}{n(n-1)+\ldots..(n-r+2)} = \frac{n-r+1}{n}.$$

Kommt nun A_r zum Loosen, so sind noch $(n-r+1)$ Kugeln in der

Urne und darunter die weiße. Die Wahrscheinlichkeit, in diesem Falle die weiße Kugel zu erhalten, ist $w_2 = \frac{1}{n-r+1}$. Werden nun beide Wahrscheinlichkeiten mit einander und mit dem zu erwartenden Gewinne nach 1 §. 55 verbunden, so ist der Werth der Erwartung, gerade im $r$ten Zuge den ausgesetzten Gewinn zu erhalten.

$$4)\quad E_r = \frac{(n-1)^{r-1\,|\,-1}}{n^{r-1\,|\,-1}} \cdot \frac{G}{n-r+1} = \frac{n-r+1}{n} \cdot \frac{1}{n-r+1} G = \frac{G}{n}.$$

Da nun diese Gleichung den Werth der Erwartung ganz allgemein für A_r bestimmt, so kann man hieraus den für jeden einzelnen Theilnehmer ableiten, indem man der Reihe nach 1, 2, 3 . . . n statt r setzt. Hieraus ist:

$$5)\quad E_1 = E_2 = E_3 = \ldots E_n = \frac{G}{n}.$$

Dies rechtfertigt folgende Behauptung:

6) Der Werth der Erwartung ist in dem vorliegenden Falle für alle Theilnehmer vor der Verloosung gleich, und die Ordnung, in welcher letztere zum Loosen gelangen, gleichgültig.

Man bemerkt leicht, daß bei dieser Verloosungsweise die Wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen Theilnehmer, wenn er zum Loosen gelangt, nicht gleich ist, da mit jedem Zuge sich die Zahl der Kugeln um eine vermindert, bis die weiße erschienen ist. Die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich, wenn man der Reihe nach 1, 2, 3 . . . . n statt r in w_2 setzt. Man erhält hiedurch folgende Zusammenstellung:

$$7)\quad \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \ldots \frac{1}{n-r+1}, \ldots\ldots \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1.$$

Mit Rücksicht auf 5 und 7 läßt sich daher 6 auch so ausdrücken:

8) Ist ein Gewinn unter n Theilnehmer so zu verloosen, daß sich die für sie günstigen Wahrscheinlichkeiten im Augenblicke des Verloosens der Reihe nach wie Brüche verhalten, deren Zähler die Einheit ist und deren Nenner von n bis zur Einheit (nach 7) fallen, so haben alle Theilnehmer vor dem Anfange der Verloosung gleiche Erwartungswerthe, und die Reihenfolge, in welcher sie zum Loosen gelangen, ist gleichgültig.

Sind nun zwei Gewinne durch das Loos unter den oben genannten Bedingungen so unter n Theilnehmer zu vertheilen, daß jeder aus einer Urne, worin $(n-2)$ schwarze und zwei weiße Kugeln enthalten sind, eine Kugel zieht, und diejenigen die Gewinne erhalten, welche die weißen Kugeln ziehen, und fragt man nach dem Werthe der Erwartung, welchen jeder Theilnehmer hat, so beantwortet sich diese Frage dadurch, daß man die vorstehenden Schlüsse wiederholt anwendet.

Um die Aufgabe noch mehr zu fixiren, sollen die Gewinne verschieden (G_1 und G_2), die zwei weißen Kugeln mit den Zahlen 1 und 2 bezeichnet

und ferner bestimmt sein, daß derjenige Theilnehmer den Gewinn G_1 erhalte, welcher die mit 1 bezeichnete Kugel zieht, und derjenige den Gewinn G_2, welcher die mit 2 bezeichnete zieht. Unter diesen Voraussetzungen ist der Werth der Erwartung für A_r zu bestimmen. Es ist nun klar, daß entweder die mit 1 oder die mit 2 bezeichnete Kugel in der $r$ten Ziehung erscheinen und daß sofort A_r nur einen von den beiden Gewinnen erhalten kann. Es beruht daher seine Hoffnung darauf, daß eine von den beiden bezeichneten Kugeln gerade in der $r$ten Ziehung erscheine. Hält man nun vorerst den Fall fest, daß gerade die mit 1 bezeichnete Kugel in der $r$ten Ziehung erscheinen werde, so ist es hinsichtlich des Erfolges ganz einerlei, wann die mit 2 bezeichnete Kugel, ob vorher oder nachher, erscheinen werde. Es verliert also die mit 2 bezeichnete Kugel bei dieser Betrachtungsweise ganz die Eigenschaft des Gewinnes und ist daher den nicht gewinnenden schwarzen Kugeln beizuzählen. Der Werth der Erwartung bestimmt sich also für A_r in Beziehung auf den Gewinn G_1 ganz auf die in 4 angegebene Weise und ist, wenn derselbe E_1 genannt wird,

$$9)\quad E_1 = \frac{(n-1)^{r-1|-1}}{n^{r-1|-1}} \cdot \frac{G_1}{n-r+1} = \frac{G_1}{n}.$$

Hält man nun den Fall fest, daß gerade die mit 2 bezeichnete Kugel in der $r$ten Ziehung erscheinen werde, so ist genau dasselbe von der mit 1 bezeichneten Kugel zu wiederholen, was eben in Beziehung auf die mit 2 bezeichnete gesagt wurde. Der Werth der Erwartung bestimmt sich also für A_r in Beziehung auf den Gewinn G_2 und ist sofort, wenn derselbe E_2 genannt wird,

$$10)\quad E_2 = \frac{(n-1)^{r-1|-1}}{n^{r-1|-1}} \cdot \frac{G_2}{n-r+1} = \frac{G_2}{n}.$$

Aus 9 und 10 ist hiernach der Werth der Erwartung für A_r in dem vorliegenden Falle:

$$11)\quad E_r = \frac{G_1 + G_2}{n}.$$

Setzt man nun auch hier für r allmälig die Werthe 1, 2, 3 . . . n, so erhält man die Erwartungswerthe für alle Theilnehmer, und man hat:

$$12)\quad E_1 = E_2 = E_3 = \ldots E_n = \frac{G_1 + G_2}{n}$$

Es ergiebt sich auch hier, daß die Erwartungswerthe für alle Theilnehmer einander gleich sind, und die Ordnung, worin sie zum Loosen gelangen, gleichgültig ist. Die gemachten Schlüsse lassen sich nun in der angegebenen Weise leicht weiter fortführen und auf die Vertheilung von drei und mehr Gewinnen durch das Loos ausdehnen. Man gelangt hiedurch zu folgendem allgemeinen Satze:

13) Werden m Gewinne $G_1, G_2, \ldots G_m$ auf die oben bezeichnete

Weise durch das Loos unter n Theilnehmer vertheilt, so ist der Erwartungswerth für alle Theilnehmer vor der Verloosung einander gleich, und die Ordnung, worin die Theilnehmer zum Spielen gelangen, ist gleichgültig.

Das Nämliche gilt, wenn die Wahrscheinlichkeiten, welche der Reihe nach bei dem Verloosen für die Theilnehmer günstig sind, die Werthe $\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots$ $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ haben. Der Werth der Erwartung ist in beiden Fällen für jeden Theilnehmer:

$$14) \quad E = \frac{G_1 + G_2 + G_3 + .. G_m}{n}.$$

Daß hiebei einzelne oder auch alle Gewinne einander gleich sein können, ist einleuchtend. Sind schon k Ziehungen gemacht, ohne daß ein Gewinn erschien, so ändert sich der Erwartungswerth und ist:

$$15) \quad E = \frac{G_1 + G_2 + G_3 \ldots G_m}{n-k}.$$

Hat sich Jemand von den Theilnehmern das Recht erworben, mehrere Mal zu loosen, so ist einleuchtend, daß sich der Werth seiner Erwartung so oft vervielfacht, als er zum Loosen gelangt.

§. 58.

Es sind verschiedene Methoden gedenkbar, wornach Gewinne durch das Loos vertheilt werden sollen. Folgende sollen hier hervorgehoben werden.

1) In eine Urne, auch Glückshafen genannt, werden so viele verschiedene Nummern geworfen, als Theilnehmer vorhanden sind; in eine zweite so viele Blättchen oder Zettel, als Gewinne vertheilt werden sollen. Jeder einzelne Gewinn ist auf einem Blättchen bezeichnet. Ist die Zahl der Gewinne kleiner, als die Zahl der Theilnehmer, so werden so viele nicht oder mit 0 bezeichnete Blättchen (Nieten genannt) zugeworfen, bis die Zahl der Theilnehmer ergänzt ist, so daß in den Urnen gleich viele Nummern und Blättchen vorhanden sind. Nummern und Blättchen werden in beiden Urnen wohl gemischt. Zur Vorsicht können die Blättchen verschlossen in die Urne geworfen werden. Darauf wird aus beiden Urnen gleichzeitig eine Nummer und ein Blättchen gezogen, die erstere und der zugehörige Gewinn oder Niete gelesen, und auf diese Art fortgefahren, bis alle Blättchen aus beiden Urnen gezogen sind. Hiedurch wird allmälig das Loos aller Theilnehmer entschieden.

2) Man zeichnet auf verschiedene Blättchen der Reihe nach die zu vertheilenden Gewinne, wirft sie verschlossen in eine Urne und bringt dann so viele Nieten zu, bis die Zahl der Theilnehmer ergänzt ist. Hierauf werden sie wohl gemischt. Die Theilnehmer werden durch Nummern vertreten,

und dann die Nummern in irgend einer beliebigen Ordnung ausgerufen. Bei oder vor jedem Rufen wird ein Blättchen aus der Urne genommen und nach dem Ausrufen der Zahl geöffnet und der zugehörige Gewinn oder die Niete gelesen. Auf diese Weise wird allmälig das Loos aller Theilnehmer entschieden, indem so lange fortgefahren wird, bis alle Nummern gerufen und alle Blättchen gezogen sind.

3) Alle Nummern, welche die Theilnehmer vertreten, werden in eine Urne gebracht, und in eine zweite so viele Blättchen, als Gewinne vertheilt werden sollen, worauf letztere geschrieben sind. Aus beiden Urnen wird gleichzeitig eine Nummer und ein Blättchen herausgenommen, Nummer und zugehöriger Gewinn abgelesen, und auf diese Weise fortgefahren, bis alle Treffer gezogen sind.

4) Alle Nummern, welche die Theilnehmer vertreten, werden verschlossen in eine Urne gebracht und wohl gemischt. Nun werden in einer bestimmten oder in jeder beliebigen Ordnung die sämmtlichen Gewinne ausgerufen und gleichzeitig oder vor dem Ausrufen eines jeden Gewinnes eine Nummer aus der Urne gezogen und nach dem Ausrufen geöffnet, wodurch das Loos eines Theilnehmers entschieden wird. Auf diese Weise wird fortgefahren, bis alle Gewinne ausgerufen sind, worauf die Verloosung vollendet ist.

Bei diesen Verloosungsweisen wird vorausgesetzt, daß die in den Urnen enthaltenen Nummern und Blättchen wohl gemischt werden, was der Vorsicht wegen nach jeder einzelnen Ziehung sogar wiederholt werden kann, daß ferner allenthalben rechtlich verfahren werde. Alle diese Verloosungsweisen sind, wenn dabei gewissenhaft verfahren wird, richtig und wahren das Interesse eines jeden Theilnehmers. Das in der ersten Methode angegebene Verfahren fällt mit der im vorigen §. angegebenen Verloosungsweise zusammen, wie sich leicht zeigt. Da die Theilnehmer gewöhnlich nicht persönlich loosen, so werden sie durch die Nummern vertreten. Die Richtigkeit dieser Methode wurde dort nachgewiesen. Diese Verfahrungsweise schützt am meisten gegen möglichen Unterschleif und enthält sogar eine Controlle für die Richtigkeit. Sie ist jedoch bei großer Zahl von Loosen zeitraubend. Die drei folgenden Methoden lassen allerdings Unterschleif fürchten, wenn die Blättchen, worauf die Gewinne bezeichnet sind, oder die Nummern der Loose, welche bestimmten Inhabern zugehören, kennbar gemacht sind, wodurch bestimmten Personen ein Gewinn zugewendet werden kann. Wird jedoch mit Vorsicht dem zu fürchtenden Unterschleif vorgebeugt, so ist ihre Richtigkeit nicht zu beanstanden. Die zweite Methode fällt im Wesentlichen mit der im vorigen §. erörterten Verloosungsweise zusammen und findet dort ihre Begründung. Die Richtigkeit der beiden letzten Methoden stützt sich auf die in 8 und 9 §. 51 entwickelten Sätze, wornach jede Zahl auf jeder einzelnen Stelle gleich oft erscheinen kann, wenn die Versetzungen ohne

Wiederholungen gebildet werden. Die aus der Urne zu ziehenden Zahlen vertreten die Stelle der Theilnehmer und unterliegen den Bildungsgesetzen der Versetzungen ohne Wiederholungen. Hiernach ist das Interesse eines jeden einzelnen Theilnehmers vollkommen gewahrt. Ihre Ausführung ist sehr zeiterspärend.

Was hier von dem Vertheilen der Gewinne oder Vortheile durch das Loos gesagt wurde, gilt natürlich auch von dem Vertheilen der Lasten durch dasselbe, wie bei der Conscription ꝛc. Die bisher aufgestellten Sätze beweisen, daß die Verfahrungsweisen, welche bei Vertheilung der Gewinne oder Lasten durch das Loos beobachtet werden, ganz im Rechte begründet sind. Man hat zwar, so viel mir bekannt ist, bisher diese Sätze nicht mit Hülfe der Mathematik bewiesen, sondern hat sie, gleichsam einem natürlichen Rechtsgefühl folgend, für wahr vorausgesetzt und nach ihnen gehandelt, ohne sich über die Frage zu verständigen, ob sie als wahr und richtig angenommen werden dürfen. In diesem und dem vorhergehenden §. ist dies geschehen und mußte nach unserer Ansicht um so mehr geschehen, da diese Sätze die Basis für die Anwendung des Werthes der Erwartung, der in den gewöhnlichen Verhältnissen so häufig vorkommt, bildet. Denn es bleibt diese Anwendung so lange problematisch, bis nachgewiesen ist, daß auch die Mittel und Wege, welche bei der Verloosung von Vortheilen und Lasten durch das Loos angewendet werden, Niemand in seinen Ansprüchen verkürzen, also auch rechtlich zulässig sind. Hiernach sind die hier aufgestellten Sätze wichtig, denn sie bilden die Elemente in allen hieher gehörigen Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die ziemlich zahlreich sind. Eine andere Beweisart für die hier aufgestellten Sätze findet sich in Grunert's Archiv für Mathematik, 1ster Bd., pag. 118 u. ff.

§. 59.

Die in §. 57 und 58 aufgestellten Sätze gründen sich auf die Voraussetzung, daß die Wahrscheinlichkeiten mit jeder Ziehung sich ändern. Ein anderes Resultat wird sich ergeben, wenn die Wahrscheinlichkeit für jeden Theilnehmer die gleiche ist, sobald er zum Loose gelangt. Dies wird sich auf folgende Weise zeigen. Unter die Personen A_1, A_2, A_3 . . . A_n soll der Gewinn G verloos't werden. Sie kommen in der genannten Reihenfolge zum Loose, und die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, ist für Jeden w, wenn er zum Loosen gelangt, die, nicht zu gewinnen, w_1. Die Verloosung dauert so lange, bis der Gewinn einem Theilnehmer zugefallen ist. Welches ist der Werth der Erwartung für jeden Theilnehmer?

Die Frage beantwortet sich dadurch, daß man den Werth der Erwartung für A_r bestimmt. Es ist klar, daß das Ende der Verloosung nicht angegeben werden, und daß möglicherweise sehr lange die Entscheidung nicht

erfolgen kann. Um jedoch die Frage zu fixiren, so wird angenommen, daß jeder von den Theilnehmern p Mal zum Looſen gelange. Soll nun A_r das erſte Mal zum Looſen gelangen, ſo darf in den $(r-1)$ vorhergehenden Verſuchen der Gewinn nicht vergeben ſein. Die Wahrſcheinlichkeit hiefür iſt w_1^{r-1}. Iſt dies geſchehen, ſo hat er die Hoffnung w, den Gewinn G zu erhalten. Gewinnt er nicht und ſoll er wieder zum Looſen gelangen, ſo darf in den folgenden n Verſuchen der Gewinn nicht vergeben ſein. Die Wahrſcheinlichkeit hiefür iſt w_1^{n+r-1}. Iſt dies eingetroffen, ſo hat er wiederholt die angegebene Hoffnung auf den Gewinn. Dies führt ſich ſo fort und es darf von je n zu n Verſuchen der Gewinn nicht vergeben werden. Beſtimmt man nun den Werth der Erwartung für jeden einzelnen der genannten Fälle, ſo iſt derſelbe für A_r, wenn man 2 §. 22 benutzt und $a = w_1^{r-1}w$, $u = w_1^{(p-1)n+r-1}$, $e = w_1^n$ ſetzt und G als allen Gliedern gemeinſchaftlich ausſcheidet,

$$1)\ E_r = w_1^{r-1}w.G + w_1^{n+r-1}wG + w_1^{2n+r-1}.wG + \ldots + w_1^{(p-1)n+r-1}wG$$

$$= w.\frac{w_1^{r-1} - w_1^{pn+r-1}}{1 - w_1^n}.G.$$

Setzt man nun hierin 1, 2, 3 ... n ſtatt r, ſo ergeben ſich die Erwartungswerthe für die einzelnen Theilnehmer:

$$2)\ E_1 = wG\frac{1-w_1^{pn}}{1-w_1^n};\quad E_2 = w_1wG\frac{1-w_1^{pn}}{1-w_1^n};\quad E_3 = w_1^2wG\frac{1-w_1^{pn}}{1-w_1^n}$$

u. ſ. w. Hieraus ergiebt ſich folgende Vergleichung für dieſe Werthe, die Verlooſung mag beliebig lang fortgeſetzt werden, wenn nur Alle gleich oft zum Looſen gelangen:

$$3)\ E_1 : E_2 : E_3 : E_4 \ldots = 1 : w_1 : w_1^2 : w_1^3 : \ldots\ldots$$

Es zeigt ſich, daß unter dieſer Vorausſetzung die Erwartungswerthe der einzelnen Theilnehmer nicht gleich ſind, und die Ordnung, worin dieſelben zum Looſen gelangen, durchaus nicht gleichgültig iſt. Es wird leicht ſein, dieſen Satz auf dem gezeigten Wege zu verallgemeinern. Mehr hierüber iſt in den Abhandlungen der mathem. phyſik. Claſſe der Kön. Baierſchen Akademie der Wiſſenſch., 2ter Bd., München 1837, pag. 243 nachzuleſen. Spielen n Perſonen mit einem Würfel, ſo daß diejenige den Gewinn G erhält, welche die Zahl 6 wirft, ſo ſtehen die Erwartungswerthe der vier erſten Perſonen zu einander in folgendem Verhältniſſe: 216 : 180 : 150 : 125 u. ſ. w. Die Reihenfolge iſt daher nicht gleichgültig. Hieher gehören die meiſten Spiele, und die Vorhand hat bei ihnen in der Regel Vortheile, weswegen auch, um dieſe Ungleichheit zu heben, in denſelben die Vorhand wechſelt.

§. 60.

A will die Summe ra wagen. Die Wahrscheinlichkeit im einzelnen Falle zu gewinnen ist w, die zu verlieren w_1, also $w+w_1=1$. Gewinnt A, so erhält er den $q$fachen Satz. Es fragt sich, soll A die Summe ra auf einmal oder soll er sie in r Versuchen, also in jedem Versuche die Summe a, aussetzen?

Wird die Summe auf einmal ausgesetzt, so ist der Werth der Erwartung nach 1 §. 55:

$$1)\quad E = w.q.ra.$$

Wird die Summe auf r Versuche vertheilt, so daß in jedem a ausgesetzt wird, so kann A entweder in allen r Versuchen, oder in $r-1$, $r-2$, ... 2, 1 gewinnen. Nimmt man an: er gewinne in $(r-k)$ Versuchen, so ist nothwendige Bedingung, daß er in den übrigen k Versuchen verliere. Gewinnt er $(r-k)$ mal, so erhält er die Summe $(r-k)\,qa$. Das Gewinnen, welches $(r-k)$mal geschehen soll, und das Verlieren, welches $k$mal geschehen soll, kann nun so oft eintreffen, als sich die beiden unter sich verschiedenen Ereignisse mit einander verbinden können. Dies kommt offenbar mit der Zahl der Fälle überein, wornach sich zwei Arten von Elementen unter einander versetzen lassen, wenn die eine Art $r-k$ und die andere k Elemente zählt. Die Zahl dieser Fälle erhält man, wenn $p=r-k$, $q=k$, $n=r$, $r=0$ u. s. w. in 11 §. 51 gesetzt wird. Es ist sofort:

$$A_1 = \frac{r(r-1)(r-2)....3.2.1}{1.2...k.1.2...(r-k)} = \frac{r^{k|-1}}{1^{k|1}} = (r)_k.$$

Die Wahrscheinlichkeit, $(r-k)$ mal zu gewinnen, ist $w_2 = w^{r-k}$, die, $r$mal zu verlieren, ist $w_3 = w_1{}^r$. Wird nun A_1 mit diesen Wahrscheinlichkeiten und mit der zu gewinnenden Summe verbunden, so ist der gesuchte Werth der Erwartung:

$$2)\quad E_{r-k} = (r)_k . q(r-k)\,a . w^{r-k} . w_1{}^k = (r-1)_k\, q . ra . w^{r-k} w_1{}^k.$$

Wendet man nun diese Gleichung auf die vorhin angeführten Fälle an, indem man der Reihe nach 0, 1, 2, ... $r-1$ statt k setzt, so ergiebt sich hieraus der Werth der Erwartung für sämmtliche oben angegebene Fälle, und es ist, wenn der Factor qra, welcher in allen hierdurch entstehenden Gliedern vorkommt, ausgeschieden wird:

$$E = qra\,[w^r + (r-1)_1\, w^{r-1} w_1 + (r-1)_2\, w^{r-2} w_1{}^2 + (r-1)_3 w^{r-3} w_1{}^3 .... (r-1)_{r-1} w . w_1{}^{r-1}].$$

Aus jedem Gliede der eingeklammerten Reihe kann ein w ausgeschieden werden. Geschieht dies, so entsteht:

$$E = qra . w[w^{r-1} + (r-1)_1 w^{r-2} w_1 + (r-1)_2 w^{r-3} w_1{}^2 + (r-1)_3 w^{r-4} w_1{}^3 .... (r-1)_{r-1} w_1{}^{r-1}]$$

Die Glieder der eingeklammerten Reihe bilden nun offenbar die $(r-1)$te Potenz des Binoms $(w+w_1)$ nach §. 77 d. Alg. Hiernach geht die vorstehende Darstellung, da $w+w_1=1$ ist, in folgende über:

$$3)\quad E = w.q.ra\,(w+w_1)^{r-1} = w.q.ra.$$

Vergleicht man 1 mit 3, so ergiebt sich, daß beide Resultate gleich sind. Es ist nun einleuchtend, daß es hinsichtlich des Resultates einerlei ist, ob die Versuche gleichzeitig oder nacheinander gemacht werden. Dies führt zu folgendem Satze:

4) Der Werth der Erwartung oder der mathematischen Hoffnung bleibt unverändert, man mag eine Summe in einem Versuche, oder gleichheitlich vertheilt in mehreren Versuchen wagen, wenn die Wahrscheinlichkeit in dem einzelnen Versuche zu gewinnen unverändert und dieselbe bleibt.

Aendert sich aber die Wahrscheinlichkeit, wie dies in §. 57 der Fall ist, so fragt es sich, ob der vorstehende Satz noch richtig bleibt. Zu dem Ende soll folgende Frage beantwortet werden. In einer Urne sind m mit den Zahlen 1, 2, 3 . . . . m bezeichnete Kugeln. p Kugeln werden hinter einander gezogen, und nach vollendeter Ziehung werden die erschienenen Kugeln in die Urne zurückgeworfen. Jede Kugel oder die ihr aufgeschriebene Zahl kann mit einer Summe besetzt werden. Erscheint die besetzte Kugel, so wird der $q$fache Einsatz als Gewinn gezahlt. Soll nun A, der die Summe ra aussetzen will, diese auf eine Kugel, oder gleichheitlich vertheilt auf r Kugeln setzen, so daß jede Kugel mit der Summe a besetzt ist?

Setzt A die Summe ra auf eine einzige Kugel, so hängt die Hoffnung zu gewinnen davon ab, daß diese Kugel mit noch $(r-1)$ Kugeln aus den übrigen, in der Urne enthaltenen Kugeln, also mit $(m-1)$ Kugeln, erscheine. Die Wahrscheinlichkeit, daß dies geschehen werde, ergiebt sich aus 16 §. 53, wenn dort $h=1$, $m=1$, und $n=m-1$, $p=r$ gesetzt wird. Hiernach ist:

$$5)\quad w = p\,\frac{1\,.\,(m-1)^{p\,-\,1\,|\,-\,1}}{m^{p\,|\,-\,1}}\,.$$

In diesem Falle gewinnt A die ausgesetzte Summe $q$mal. Der Werth der Erwartung ist sofort:

$$6)\quad E = \frac{p\,.\,1\,.\,(m-1)^{p\,-\,1\,|\,-\,1}}{m^{p\,|\,-\,1}}\,q\,.\,ra = \frac{p}{m}\,.\,q\,.\,ra.$$

Wird die Summe auf r Nummern vertheilt und auf jede also a gesetzt, so können die vorhin (zu 2 dieses §.) aufgeführten Fälle wieder eintreten. Wird auch hier der Fall festgehalten, wenn gerade $(r-k)$ Nummern gewinnen, so setzt dies voraus, daß in den übrigen $(p-r+k)$ Ziehungen nur Nummern erscheinen, die nicht gewinnen, und es ergiebt sich hiefür die Wahrscheinlichkeit aus 16 §. 53, wenn p statt r, r statt m, $m-r$ statt n, und $r-k$ statt h gesetzt wird. In diesem Falle wird die Summe $(r-k)\,qa$ gewonnen und der Werth der Erwartung ist:

$$7)\quad E_{r\text{-}k} = \frac{p^{r\text{-}k\,|\,-\,1}}{1^{r\text{-}k\,|\,1}} \cdot \frac{r^{r\text{-}k\,|\,-\,1}(m-r)^{p\text{-}r+k\,|\,-\,1}}{m^{p\,|\,-\,1}}(r-k)qa = \frac{p(m-r)^{p\text{-}r\,|\,-\,1}}{m^{p\,|\,-\,1}}rqa.(r-1)_k(p-1)^{r\text{-}k\text{-}1\,|\,-\,1}(m-p)^{k\,|\,-\,1}$$

Wendet man nun diese Gleichung auf die vorhin aufgeführten Fälle an,

indem man der Reihe nach 0, 1, 2, . . . $r-1$ statt k setzt, so ergiebt sich hieraus der Werth für sämmtliche dem Unternehmen günstige Fälle, und es ist, da man, wie in 7 gezeigt wurde, aus jedem hiedurch entstehenden Gliede den Factor $p \cdot \frac{(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}} \cdot rqa$ ausscheiden kann:

$$E = \frac{p(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}} rqa\,[(p-1)^{r-1|-1} + (r-1)_1 (p-1)^{r-2|-1} (m-p)^{1|-1}$$

$$+(r-1)_2(p-1)^{r-3|-1}(m-p)^{2|-1}.....(r-1)_{r-2}(p-1)(m-p)^{r-2|-1}+(r-1)_{r-1}(m-p)^{r-1|-1}].$$

Die in Klammern eingeschlossene Reihe enthält für die Fakultäten das nämliche Gesetz, welches für ein Binom gilt. Dies Gesetz ist bekanntlich folgendes:

$$(a+b)^{n|-1} = a^{n|-1} + (n)_1 a^{n-1|-1} b^{1|-1} + (n)_2 a^{n-2|-1} b^{2|-1} + (n)_3 a^{n-3|-1} b^{3|-1}....$$
$$....(n)_{n-2} a^{2|-1} b^{n-2|-1} + (n)_{n-1} ab^{n-2|-1} + (n)_n b^{n|-1}.$$

Setzt man nun $a = p-1$, $n = r-1$, $b = m-p$, so läßt die eingeklammerte Reihe sich auf den Ausdruck $(m-1)^{r-1|-1}$ zurückbringen. Wird dieser Werth eingeführt, so entsteht sofort:

8) $E = \frac{p(m-r)^{p-r|-1}}{m^{p|-1}} \cdot (m-1)^{r-|1-1} \cdot rqa = \frac{p.(m-1)^{p-1|-1}}{m^{p|-1}} . rqa = \frac{p}{m}\ q\,.\,ra.$

Aus 6 und 8 folgt daher auch, daß der Werth der Erwartung in beiden Fällen gleich ist, und der Satz 4 gilt daher auch noch unter den zuletzt aufgestellten Bedingungen. Die Gleichungen 1 und 3 wurden auch von Lacroix (Lehrbuch der Wahrscheinlichkeits-Rechnung §. 75) bewiesen. Die Gleichungen 6 und 8 sind eine Erweiterung dieser Sätze. Gauthier d'Hauteserve macht hiegegen starke Verstöße in seinem Traité sur l. probab. Probl. XVII. pag. 77, denn er will dort einen Unterschied im Werth der Erwartung für jemand finden, der 3 Fl. im Lotto aussetzt, für den Fall, wenn er diese Summe auf eine Nummer, oder wenn er sie auf drei Nummern einer Ziehung, oder wenn er sie auf je eine Nummer in drei verschiedenen Ziehungen zu je 1 Fl. aussetzt. Er bestimmt, indem er den 14fachen Einsatz als reinen Gewinn annimmt, den Werth der Erwartung im ersten Fall zu 2,333 . . . Fl., im zweiten zu 2,5464 . . . Fl., im dritten zu 2,6001 . . . Fl. Hätte er richtige Schlüsse gemacht, so hätte er den Erwartungswerth in jedem Falle gleich und 2,333 . . . Fl. gefunden. Im ersten Falle kommt nämlich 6, im zweiten 8, im dritten 3 in Anwendung. Der Werth 2,5464 . . . ist nach der von G. d'Hauteserve angegebenen Methode falsch, und es hat sich dort außerdem entweder ein Rechnungs- oder Druckfehler eingeschlichen.

Die zu 8 gemachten Schlüsse bleiben in voller Kraft, so lange $p > r$ ist. Wird aber r größer als p, dann tritt eine Art Paradoxon ein, denn A kann bei der Vertheilung auf verschiedene Nummern im glücklichen Falle nur $p\,.\,qa$ gewinnen, während er durch eine Nummer $r\,.\,qa$ gewin-

nen kann. Dieser Wiederspruch lös't sich aber dadurch, daß der Werth der Erwartung den mittlern oder Durchschnittswerth für alle zu hoffenden Gewinne angiebt und daß dieser die nämliche Summe erreichen kann, ohne daß die einzelnen Fälle zu der Summe erwachsen, wie dies in einem besondern Falle stattfinden kann. Man kann nun, um das Gesagte zu bestätigen, von der Annahme ausgehen, daß $r > p$ ist, und die vorstehende Aufgabe hiernach behandeln. Man wird dann durch Anwendung der Formel 7 gleichfalls auf das unter 8 angegebene Resultat geführt, wie dies in Grunert's Archiv für Math. 1. Bd. pag. 116 und 117 gezeigt ist.

§. 61.

Man kann nun die Frage aufwerfen: welchen Einfluß äußert die Ausführung eines Unternehmens, womit Verlust oder Gewinn verbunden sein kann, auf den Besitz eines Individuums?

Man nenne zu dem Ende den Besitz eines Individuums K, die zu machende Auslage B, den zu hoffenden Gewinn G, die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen w, die zu verlieren w_1, also $w_1 + w = 1$, so ist der zu erwartende Verlust B, und der Stand des Besitzes nach dem Mißlingen $(K—B)$, nach dem Gelingen $(K—B+G)$. Die Wahrscheinlichkeit, daß der erste Besitzstand eintreten werde, ist w_1, und der muthmaßliche Besitz $M_1 = w_1 (K—B)$ nach 1 §. 55; diejenige, daß der zweite eintreten werde, ist w, und der muthmaßliche Besitz in diesem Falle ist: $M = w (K—G+B)$ (1 §. 55). In einen dieser Zustände wird der Unternehmer gelangen. Hiernach ist der Werth der Erwartung:

$$1) \quad E = (w+w_1)K - (w+w_1)B + wG = K - B + wG.$$

Nun drückt wG nach 1 §. 55 u. 56 einen Werth aus, welcher, wenn kein Nachtheil auf der einen oder andern Seite eintreten soll, dem Werth von B gleich sein muß. Ist dies der Fall, so ist unter den vorliegenden Bedingungen $E = K$. Ist aber wG kleiner als B, wie dies der Fall in allen Spielen oder Lotterien ꝛc. ist, wobei Procente genommen werden, so wird E kleiner als K. Dies führt zu folgendem Satze:

Steht bei Ausführung eines Unternehmens, womit Verlust oder Gewinn verbunden sein kann, der zu erwartende Gewinn nach §. 56 im richtigen Verhältniß zu dem zu fürchtenden Verluste, so deutet der Werth der Erwartung auf keine Aenderung im Besitze, und es läßt sich kein schädlicher Einfluß, den die Ausführung eines solchen Unternehmens auf den Besitz haben könnte, nachweisen. Ist aber der zu erwartende Gewinn geringer, als er nach 1 §. 55 sein sollte, so wird durch die Ausführung eines solchen Unternehmens der Besitz beeinträchtigt; ist er größer, so deutet die Ausführung auf Vermehrung des Besitzes.

Jedes Spiel, wobei nicht Gewinn und Verlust in richtigem Verhältnisse zu einander stehen, ist daher für den Spieler nachtheilig. Die nämlichen Resultate ergeben sich, wenn keine Auslagen dem Wagen vorangehen und die bestimmten Summen erst nach der Entscheidung ausgezahlt werden. Nennt man in diesem Falle die Summe, welche jemand zu erhalten hat, R (reinen Gewinn), so ergiebt sich folgende Gleichung:

$$2)\quad E = (w + w_1)K - wB + w_1R$$

und es muß dann $wB = w_1R$ nach 8 §. 56 sein, was mit dem Gesagten vollkommen übereinstimmt.

§. 62.

In den vorhergehenden §§. wurden die Gesetze, welche den Werth der Erwartung bestimmen, ganz allgemein und ohne Rücksicht auf die besondern Verhältnisse derer betrachtet, welche ein Unternehmen, womit Gewinn oder Verlust verbunden ist, auszuführen im Begriff sind. Werden aber Summen gewagt, so ist es in der That nicht gleichgültig, wie die Verhältnisse des Unternehmers beschaffen sind, denn irgend eine Summe ist, objectiv betrachtet, immer dieselbe, während sie in Beziehung auf die Verhältnisse desjenigen, der sie der Gefahr des Verlierens aussetzt, eine sehr verschiedene Bedeutung haben kann. So wird eine Summe von 100 Fl., die in irgend einem Unternehmen auf Gewinn oder Verlust gewagt wird, für den, der nur 1000 Fl. besitzt, eine ganz andere Bedeutung haben als für den, der 10000 Fl. besitzt. Das Gleiche gilt bei der Erwerbung einer und derselben Summe für Personen, welche verschiedene Mittel besitzen. Man kann daher füglich zwischen objectiver und subjectiver Bedeutung einer Summe, und ebenso zwischen dem Werthe objectiver und subjectiver Hoffnung oder Erwartung unterscheiden, und unter dem Werth der objectiven Hoffnung oder Erwartung den verstehen, welchen ein zu erlangender Besitz ohne Rücksicht auf die besondern Verhältnisse des Unternehmers hat, und unter dem der subjectiven Hoffnung denjenigen verstehen, welchen er in Rücksicht auf die Verhältnisse des Unternehmers hat.

Um nun die Bedeutung oder den Werth zu bestimmen, welchen eine beliebige Summe in Rücksicht auf Besitz und auf eintretenden Gewinn oder Verlust hat, wird nöthig, das Verhältniß dieser Summe (B) zwischen dem ursprünglichen Besitze (K) und zwischen dem Besitze nach Eintritt des Gewinnes oder Verlustes zu betrachten. Bezeichnet man das erste Verhältniß durch U, das zweite durch H, das dritte durch V, so hat man folgende Vergleichung:

$$1)\quad U:H:V = \frac{B}{K} : \frac{B}{K+B} : \frac{B}{K-B} = \frac{1}{K} : \frac{1}{K+B} : \frac{1}{K-B}$$

oder 2) $U:H=K+B:K=1+\frac{B}{K}:1=1:\frac{K}{K+B}$

3) $U:V=K-B:K=1-\frac{B}{K}:1=1:\frac{K}{K-B}$

4) $H:V=K+B:K-B=1:\frac{K-B}{K+B}$.

Diese Vergleichungen zeigen, daß die nämliche Summe, als Verlust betrachtet, eine größere Bedeutung oder Wichtigkeit hat, als wenn sie als Gewinn betrachtet wird, und daß ihr Verlust dem Besitzer mehr Nachtheil bringt, als ihr Gewinn Vortheil, denn ihr Gewinn steigert den Besitz in geringerem Verhältnisse, als der Verlust ihn schwächt. Hieraus ergiebt sich, welche Vorsicht bei Aufopferung von Summen zu empfehlen ist, die auf Gewinn oder Verlust gewagt werden, wie nachtheilig wiederholt erlittene Verluste auf den Besitz einwirken, und wie unklug es ist, wiederholte Verluste durch Steigerung des Einsatzes decken und ausgleichen zu wollen, indem solche Anstrengungen immer ungünstiger einwirken.

Vergleicht man nun den Werth oder die Bedeutung, welche eine und dieselbe Summe als Gewinn oder Verlust für Personen hat, deren Besitz verschieden groß (K_1, K_2) ist, so ist:

5) $U_1 : U_2 = K_1 : K_2 = 1 : \frac{K_2}{K_1}$

6) $H_1 : H_2 = K_2 + B : K_1 + B = 1 : \frac{K_1+B}{K_2+B}$

7) $V_1 : V_2 = K_2 - B : K_1 - B = 1 : \frac{K_1 - B}{K_2 - B}$.

Hieraus ergiebt sich, daß der Werth oder die Bedeutung einer und derselben Summe für zwei Personen von verschiedenen Mitteln im umgekehrten Verhältnisse zum Besitze steht, für die bemitteltere also eine geringere Bedeutung hat, als für die weniger bemittelte, daß ebenso Gewinn und Verlust eine geringere Bedeutung für die erstere als für die letztere haben, und zwar eine um so geringere, je größer die Mittel sind, und umgekehrt. Für gleich bemittelte Personen hat daher auch der Gewinn oder Verlust einer und derselben Summe gleiche Bedeutung, und es erscheint hiernach am geeignetsten, wenn sich Personen von gleichen Mitteln zu Erreichung gemeinschaftlicher Zwecke in Gesellschaften vereinigen, denn für sie hat Besitz, Gewinn und Verlust gleiche Bedeutung. Auf diesem Wege werden daher die gemeinschaftlichen Interessen mit mehr Eifer gefördert werden, als da, wo verschiedene Interessen vorwalten.

Daniel Bernoulli (Comment. Academ. scient. imperial. petropolit. T. V. ad annos 1730 et 1731. pag. 187 sqq. Specimen theoriae novae d. mensura sortis) hat zuerst auf den hier betrachteten Gegenstand

aufmerksam gemacht und den Begriff der subjectiven Hoffnung durch mensura sortis bezeichnet. Laplace (Théor. d. probab. Ch. X.) hat ihn fortune morale, espérance morale genannt.

§. 63.

Gewöhnlich steigert sich der Besitz eines Individuums allmälig, besonders wenn man auch geistige Kräfte zu den Gütern rechnet und als Mittel ansieht, wodurch physische Güter erworben werden. Doch kann auch schneller Zuwachs eintreten. Geschieht dies, so läßt sich dieser als aus vielen aufeinander folgenden kleinen Zunahmen entstanden denken. Kein Mensch nun ist absolut arm. Sollte er auch in der That für einen Augenblick kein physisches Gut besitzen, so hat er doch durch seine Persönlichkeit einen bestimmten Besitz, den er einem Kapitale gleich anschlagen kann, das ihm nach seinen Talenten, Fähigkeiten, Bildung, Fleiß ꝛc. rentirt. Bezeichnet nun K den ursprünglichen Besitz, so kann man die Vermehrung desselben bis zur Summe $(K+x)$ durch das Anhäufen unendlich kleiner Zunahmen (∂x) entstanden denken, wie denn auch bei einer nicht ganz unbedeutenden Summe ein Zuwachs im Werthe von der kleinsten Münzsorte als sehr klein erscheint. Nach 1 §. 62 ist nun die Bedeutung der auf diese Weise entstandenen Vermehrung des Besitzes $\frac{\partial x}{K+x}$ und die Bedeutung sämmtlicher Zunahmen, oder der Werth der subjectiven Hoffnung auf Vermehrung:

$$1)\quad M = \int \frac{\partial x}{K+x} + C = lg(K+x) - lg\,K = lg\,\frac{K+x}{K}$$

Den Werth von C findet man nämlich, wenn man auf den ursprünglichen Besitz zurückgeht, also $x = 0$ in dem Integral 1 setzt. Eine gleiche Betrachtungsweise läßt sich anwenden, wenn der ursprüngliche Besitz sich um die Größe x vermindert, und man erhält für die Bedeutung einer Verminderung oder des zu fürchtenden Verlustes x folgende Gleichung:

$$2)\quad V = \int \frac{\partial x}{K-x} + C = lg\,(K-x) - lg\,K = lg\,\frac{K-x}{K}$$

Mit diesen Gleichungen werden sich nun Fragen, die sich auf die Ermittlung des Werthes der subjectiven Hoffnung beziehen, beantworten lassen. Ist ein Unternehmen zu wagen, womit der Verlust der Summe B, oder Gewinn G verbunden sein kann, und ist die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen w, die zu verlieren w_1, ferner $w + w_1 = 1$, so kann der Unternehmer in eine der unter 1 und 2 bezeichneten Lagen kommen. Setzt man daher G statt x in 1 und B statt x in 2 und bemerkt, daß sich im Falle des Gelingens der Besitz des Unternehmers nach 1 vermehrt, im Falle des Mißlingens nach 2 vermindert, so ergiebt sich hieraus und nach 1 §. 55 der Werth der subjectiven Hoffnung:

$$3)\ H = w\ lg\ \frac{K+G}{K} + w_1\ lg\ \frac{K-B}{K}.$$

In diesem Falle ist unter G der reine Gewinn und ohne etwaigen Abzug zu verstehen, dessen Werth sich aus 12 §. 56 ermittelt, und der zur Grundlage dienen muß, wenn keine Bevortheilung stattfinden soll. Wird dieser Werth statt G in 3 eingeführt und wendet man sofort die Entwickelung der Logarithmen in Reihen an nach 16 §. 114 der Algebra, so ist:

$$w\ lg\left(1+\frac{w_1 B}{w K}\right) = w\frac{w_1 B}{w K} - w\frac{w_1^2 B^2}{2w^2K^2} + w\frac{w_1^3 B^3}{3w^3K^3} - w\frac{w_1^4 B^4}{4w^4K^4} + \ldots$$

$$w_1\ lg\left(1-\frac{B}{K}\right) = -\frac{w_1 B}{K} - \frac{w_1 B^2}{2K^2} - \frac{w_1 B^3}{3K^3} - \frac{w_1 B^4}{4K^4} - \ldots$$

Zählt man beide Reihen zusammen und ordnet zweckmäßig, so erhält man sofort aus 3:

$$4)\ H = -w_1\left(1+\frac{w_1}{w}\right)\frac{B^2}{2K^2} - w_1\left(1-\frac{w_1^2}{w^2}\right)\frac{B^3}{3K^3} - w_1\left(1+\frac{w_1^3}{w^3}\right)\frac{B^4}{4K^4} - \ldots$$

Der Werth dieser Reihe hängt von der Beschaffenheit des Ausdrucks $\frac{w_1^m}{(m+1)w^m}\frac{B^{m+1}}{K^{m+1}}$ ab. Convergirt dieser Ausdruck, so convergirt auch der Werth der Reihe und wird um so kleiner, je stärker dieser Ausdruck convergirt. In diesem Falle wird der Werth aller Glieder negativ. Divergirt dieser Ausdruck, so werden die geraden Glieder dieser Reihe positiv, die ungeraden negativ. Vergleicht man das 2te und 3te, 4te und 5te Glied u. s. w., das $2m$te und $(2m+1)$te Glied mit einander, so geben sie wegen der Divergenz immer einen negativen Werth. Die Reihe führt also wieder auf einen negativen Werth, der um so größer wird, je stärker die Glieder divergiren. Hiernach kann man der Darstellung 4 folgende Sätze entnehmen:

5) Jedes Unternehmen, wobei eine Summe auf Gewinn oder Verlust ausgesetzt wird, äußert einen nachtheiligen Einfluß auf den Werth der subjectiven Hoffnung, selbst wenn Gewinn und Verlust nach §. 55 im richtigen Verhältnisse stehen. Dies tritt noch stärker hervor, wenn auf dem reinen Gewinn ein Abzug lastet, wie bei Lotterien und Spielbanken.

6) Der Nachtheil wird um so kleiner, je kleiner die zu wagende Summe im Verhältnisse zum Besitz und je günstiger die Aussicht zu gewinnen ist; er wird um so größer, je größer die zu wagende Summe im Verhältnisse zum Besitze und je ungünstiger die Aussicht zu gewinnen ist.

Am meisten locken hohe Gewinne zum Spiele. Diese werden aber nur auf solche Fälle gesetzt, wobei die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen sehr klein ist. Gerade hiebei ist der Werth der subjectiven Hoffnung am meisten beeinträchtigt. Geht man von den Logarithmen auf die Grundgrößen zurück, so wird aus 3:

$$7)\quad H = \left(\frac{K+G}{K}\right)^{w} \left(\frac{K-B}{K}\right)^{w_1}$$

Hieraus lassen sich besondere Fälle leicht berechnen. Setzt jemand, der 1000 Fl. besitzt, 1 Fl., womit er unter gleichen Bedingungen gewinnen oder verlieren kann, so ist der Werth der subjectiven Hoffnung $H = \sqrt{1001.999} = 999{,}9994\ldots$ Bei einem Besitze von 100 Fl. ist sie $\sqrt{101.99} = 99{,}9949\ldots$ während der Werth der objectiven Hoffnung §. 61 unverändert bleibt.

§. 64.

Nun läßt sich auch die in §. 60 gestellte Aufgabe nach den im vorigen §. gefundenen Resultaten betrachten. Will nämlich jemand die Summe ra wagen und hat er die Wahl, sie auf einmal zu wagen oder auf r Versuche zu vertheilen, so ist nun die Frage, wie groß der Werth der subjectiven Hoffnung ist, wenn die Wahrscheinlichkeit im einzelnen Versuche zu gewinnen w, die zu verlieren w_1 ist?

Setzt er die Summe ra auf einmal aus, so ist der Werth der subjectiven Hoffnung nach 1 §. 55 und 1 §. 63, wenn a die veränderliche Größe bedeutet:

$$1)\quad H = w \int \frac{\partial a}{K+ra}.$$

Vertheilt er die Summe auf r Versuche, so kann er entweder r, oder $(r-1)$, oder $r-2$, . . . oder 2, oder 1mal die Summe a gewinnen. Die Anzahl der Fälle, wie oft jedes einzelne Unternehmen günstig ausfallen kann, ist schon in §. 60 angegeben worden. Benutzt man die dort gemachten Bemerkungen und trägt sie auf den vorliegenden Fall über, so ist der Werth der subjectiven Erwartung, daß man in r Versuchen gerade $(r-k)$mal gewinnt und $k$mal verliert, in Rücksicht auf 1 §. 63:

$$H_{r-k} = (r)_k\, w^{r-k}\, w_1^{\,k} \int \frac{\partial a}{K+(r-k)a}.$$

Wird nun hierin 0, 1, 2, 3 . . . . $r-1$ statt k gesetzt, so ergiebt sich der hierauf beruhende Werth der subjectiven Hoffnung:

$$H = w^r \int \frac{\partial a}{K+ra} + r w^{r-1} w_1 \int \frac{\partial a}{K+(r-1)a} + (r)_2 w^{r-2} w_1^{\,2} \int \frac{\partial a}{K+(r-2)a} + \ldots$$
$$\ldots (r)_{r-2}\, w^2 w_1^{\,r-2} \int \frac{\partial a}{K+2a} + (r)_{r-1}\, w\, w_1^{\,r-1} \int \frac{\partial a}{K+a}.$$

Diese Darstellung läßt sich auch so geben:

$$2)\quad H = w \int \frac{\partial a}{K+ra} \left[w^{r-1} + r.w^{r-2} w_1 \frac{K+ra}{K+(r-1)a} + (r)_2 w^{r-3} w_1^{\,2} \frac{K+ra}{K+(r-2)a} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots . (r)_{r-2}\, w\, w_1^{\,r-2} \frac{K+ra}{K+2a} + (r)_{r-1}\, w_1^{\,r-1} \frac{K+ra}{K+a} \right].$$

Der Werth der in der Klammer eingeschlossenen Reihe ist offenbar größer als $(w + w_1)^{r-1} = 1$. Folglich ist auch der Werth der Gleichung 2 größer als der der Gleichung 1. Es ist klar, daß der Werth der eingeklammerten Reihe um so mehr die Einheit übertrifft, je größer r wird. Dies führt zu folgenden Behauptungen:

3) Der Werth der subjectiven Hoffnung ist größer, wenn eine zu wagende Summe auf mehrere Fälle vertheilt wird, als wenn sie auf einmal gewagt wird.

4) Er ist um so größer, je größer die Anzahl der Fälle ist, auf welche die zu wagende Summe vertheilt wird.

Es ist daher rathsam, große Summen nicht auf einmal zu wagen und seinen Besitz nicht auf einen Punkt zu concentriren. Die hier gewonnenen Sätze unterscheiden sich von den in §. 61 gefundenen. Die Beantwortung folgender Frage gehört auch hieher.

Ist es rathsam, in eine Assecuranz-Gesellschaft zu treten, um sich gegen künftigen Schaden sicher zu stellen?

Ist K der Besitz einer Person, welche sich die Summe S durch Einzahlung der Summe B sichern kann, so ist der künftige sichere Besitz:

$$5) \quad K + S - B.$$

Steht in Aussicht, die Summe S mit einer Wahrscheinlichkeit w zu gewinnen, sie mit der Wahrscheinlichkeit w_1 zu verlieren, so läßt sich nach §. 63 der Werth der subjectiven Hoffnung auch so darstellen:

$$6) \quad H = w\,lg\,(K+S) + w_1\,lg\,(K-S).$$

Um nun $lg\,(K+S)$ und $lg\,(K-S)$ in eine Reihe zu entwickeln, setze man in 16 §. 114 der Algeb. $x = \frac{S}{K}$, so wird:

$$lg\,(1+\frac{S}{K}) = lg\,\frac{K+S}{K} = lg\,(K+S) - lg\,K.$$

Es ist also:

$$7) \quad lg\,(K+S) = lg\,(1+\frac{S}{K}) + lg\,K.$$

Entwickelt man nun $lg\,(1+\frac{S}{K})$, indem man $x = \frac{S}{K}$ setzt, so ist:

$$8) \quad lg\,(K+S) = lg\,K + \frac{S}{K} - \frac{S^2}{2K^2} + \frac{S^3}{3K^3} - \ldots$$

$$9) \quad lg\,(K-S) = lg\,K - \frac{S}{K} - \frac{S^2}{2K^2} - \frac{S^3}{3K^3} - \ldots$$

Werden nun die Werthe aus 8 und 9 in 6 eingeführt, so entsteht:

$$H = w\,lg\,K + w\,\frac{S}{K} - w\,\frac{S^2}{2K^2} + w\,\frac{S^3}{3K^3} - \ldots$$
$$+ w_1 lg K - w_1 \frac{S}{K} - w_1 \frac{S^2}{2K^2} - w_1 \frac{S^3}{3K^3} - \ldots$$

Da nun $w + w_1 = 1$ ist, so geht die Summe dieser Reihen und somit 6 in folgende Darstellung über:

10) $$H = lg\,K + (w - w_1)\,\frac{S}{K} - \frac{S^2}{2K^2} + (w - w_1)\,\frac{S^3}{3K^3} - \frac{S^4}{4K^4}.$$

Der Werth der subjectiven Hoffnung in Beziehung auf den sichern Besitz 5 ergiebt sich, wenn man nach Analogie der Entwickelungen 8 und 9 den Werth von 5 durch Logarithmen darstellt, und das hiedurch entstehende Resultat mit 10 vergleicht. Hiernach ist:

11) $$H_1 = lg\,(K + S - B) = lg\,K + \frac{S - B}{K} - \frac{(S-B)^2}{2K^2} + \frac{(S-B)^3}{3K^3} - \ldots$$

Bestimmt man nun die Einlage nach der Gefahr des Verlustes und der Größe der zu versichernden Summe, so ergiebt sich aus 2 §. 56 hiefür: $B = w_1 S$. Wird dieser Werth in 3 eingeführt, so entsteht, da $S - B = (1 - w_1)\,S = w\,S$ ist:

12) $$H_1 = lg\,K + \frac{wS}{K} - \frac{w^2S^2}{2K^2} + \frac{w^3S^3}{3K^3} - \ldots$$

Der Werth von 12 oder 5 ist offenbar größer als der von 10 oder 6. Hiernach zeigt sich der Eintritt in eine Versicherungs-Gesellschaft zur Sicherung einer zu wagenden Summe offenbar vortheilhaft, und es wird Sache des Staates sein, derartige Assecuranz-Gesellschaften zu fördern.

Sechstes Kapitel.

Lotterie-Anlehen und Lotterien.

---

§. 65.

In dem dritten Kapitel wurden die Gesetze aufgestellt, welche die Grundlage für die Tilgung der Anlehen bilden. Ebenso wurden dort mehrere Methoden (§. 32 u. ff.) angegeben, wie die Tilgung der Anlehen ausgeführt

werden kann. Es giebt nun auch eine Methode, eine aufgenommene Schuld in Form einer Lotterie zu tilgen. Diese Tilgungsweise ist ein Ergebniß der neuern Zeit, und ziemlich beliebt. Es soll daher hier das Nöthige zur Beurtheilung dieser Tilgungsweise beigebracht werden.

Man nennt nämlich ein Anlehen, das in Form einer Lotterie getilgt wird, ein Lotterie-Anlehen. Es unterliegt nun die Tilgung eines Lotterie-Anlehens im Allgemeinen den im Frühern aufgestellten Gesetzen, und geschieht also dadurch, daß während eines festgesetzten Zeitraumes und nach einem zum Voraus bestimmten Plane jährlich oder halbjährlich Summen zurückgezahlt werden, welche Zinsen- und Kapital-Abtragungen nach §. 28—31 in sich begreifen, oder wenigstens darstellen sollen. Zu dem Ende werden Schuldscheine in nicht zu hohen Summen, etwa in 25, 50, 100 Fl. ꝛc., um eine allgemeinere Theilnahme herbeizuführen, ausgegeben und von einem bestimmten Zeitpunkte an zurückgezahlt. Diese Schuldscheine führen im vorliegenden Falle den Namen »Loose« und gelangen alle allmälig in der festgesetzten Zeit zum Spiele. Die jährlich oder halbjährlich nach dem angenommenen Plane heimzuzahlenden Summen werden nämlich in Gewinne verschiedener Größe vertheilt, von denen sich die höchsten zu nicht unbeträchtlichen Summen zu 40000, 50000 Fl. ꝛc. und mehr erheben. Die niedersten Gewinne steigen von einer bestimmten Summe an und wachsen während der Zeit, in welcher ein Lotterie-Anlehen spielt, jährlich oder halbjährlich nach irgend einem Zinsfuß, in der Regel jedoch so, daß nur einfache Zinsen dem auf dem Schuldscheine gezeichneten Kapitale zugelegt werden. Kein Loos verliert, sondern jedes erhält die eingelegte Summe nebst den eben genannten einfachen Zinsen zurück. Bei jeder Ziehung wird sofort eine Anzahl Gewinne unter die zum Spielen kommenden Loose vertheilt. Der Zinsfuß, wornach die niedersten Gewinne bedacht werden, ist natürlich geringer als der Zinsfuß, in welchem das Anlehen verzinst wird. Durch den hieraus sich ergebenden Ueberschuß und durch die Zinses-Zinsen, welche von dem Anlehen fallen, wird es möglich, höhere Gewinne auf einzelne Loose in den verschiedenen Ziehungen auszusetzen. Diese Einrichtung und die damit verbundene Sicherheit hat den Lotterie-Anlehen große Theilnahme zugewandt, denn sie geben dem Besitzer eines Looses die Aussicht, im glücklichen Falle einen nicht unbedeutenden Gewinn zu erhalten, ohne den Verlust seiner Einlage fürchten zu müssen. Im unglücklichsten Falle wird dieselbe ihm nach einer Reihe von Jahren mit niedern, einfachen Zinsen zurückgegeben. Die Lotterie-Anlehen vertreten sogar in mancher Beziehung die Sparcassen, indem bei ihnen eine niedere Summe zinstragend angelegt werden kann und es nicht möglich wird, kleine Zinssummen, die eben deswegen nicht leicht zinstragend angelegt werden können, zu consumiren, wie dies gewöhnlich geschieht.

Die Zahl der Loose, welche bei jeder Ziehung zum Spiele gelangen und dadurch getilgt werden, ist durch einen Plan zum Voraus bestimmt. Hiebei gelangen entweder alle noch rückständigen Loose zum Spiele, oder sie werden durch eine der Gewinnziehung vorausgehende sogenannte Serienziehung bezeichnet. In diesem Falle werden nämlich sämmtliche Loose in Abtheilungen von 100 zu 100, Serie genannt, gesondert, so daß die erste Serie die Loose von 1 — 100, die zweite die von 101 — 200 in sich begreift u. s. w. Durch diese Einrichtung wird die Spiellust und Speculation in's Interesse gezogen, und es tritt auch gewöhnlich ein Steigen im Werthe der zur Gewinnziehung gelangenden Serien-Loose ein.

Die Fragen nun, welche bei den Lotterie-Anlehen in Betrachtung kommen, sind: Welches ist der Werth eines Looses, das bei einem Lotterie-Anlehen mitspielt, zu irgend einem Zeitpunkte? Welches ist der Werth eines Looses, das nach der Serienziehung in die Gewinnziehung kommt?

Da sich die allgemeinen Formeln in der Regel leichter entwickeln lassen, wenn man sich dabei auf einen besondern Fall beziehen kann, so soll hier der Plan, welcher dem Großherzoglich Badischen Lotterie-Anlehen von fünf Millionen Gulden vom Jahre 1840 zu Grunde liegt, in einer Uebersicht auf der beifolgenden Tafel mitgetheilt werden, woraus sich im Allgemeinen die Einrichtung der Lotterie-Anlehen ergiebt, und worauf wir uns im Folgende beziehen werden. Die Einrichtung der Tafel ist durch sich selbst verständlich.

Zahl d. Ziehungen	Zeit der Ziehungen			Höchster Gewinn	Niederst. Gewinn	Summe der Gewinne jeder Ziehung	Zahl der spielenden Loose	Zahl der rückständig. Loose	Zeit der Zahlung.
	Jahr	Serie	Gewinn						
1	1841	1. Aug.	1.Sept.	50000	65	150000	800	99200	1. Febr. 1842
2	1842	1. Febr.	1.März	40000	65	94450	400	98800	1. Aug. 1842
3	1842	1. Aug.	1.Sept.	40000	65	94450	400	98400	1. Febr. 1843
4	1843	1. Febr.	1.März	35000	65	89450	400	98000	1. Aug. 1843
5	1843	1. Aug.	1.Sept.	35000	65	89450	400	97600	1. Febr. 1844
6	1844	1. Febr.	1.März	35000	65	89450	400	97200	1. Aug. 1844
7	1844	1. Aug.	1.Sept.	35000	65	89450	400	96800	1. Febr. 1845
8	1845	1. Febr.	1.März	35000	65	89450	400	96400	1. Aug. 1845
9	1845	1. Aug.	1.Sept.	35000	65	89450	400	96000	1. Febr. 1846
10	1846	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	65	150000	600 700	95400 94700	1. Febr. 1847

Zahl d. Ziehungen	Zeit der Ziehungen: Jahr	Zeit der Ziehungen: Serie	Zeit der Ziehungen: Gewinn	Höchster Gewinn	Niederst. Gewinn	Summe der Gewinne jeder Ziehung	Zahl der spielenden Loose	Zahl der rückständig. Loose	Zeit der Zahlung.
11	1847	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	65	150000	600 700	94100 93400	1. Febr. 1848
12	1848	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	65	150000	600 700	92800 92100	1. Febr. 1849
13	1849	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	65	150000	600 700	91500 90800	1. Febr. 1850
14	1850	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	65	150000	600 700	90200 89500	1. Febr. 1851
15	1851	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	65	150000	600 700	88900 88200	1. Febr. 1852
16	1852	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	65	150000	600 700	87600 86900	1. Febr. 1853
17	1853	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	65	150000	600 700	86300 85600	1. Febr. 1854
18	1854	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	65	150000	600 700	85000 84300	1. Febr. 1855
19	1855	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	65	150000	600 700	83700 83000	1. Febr. 1856
20	1856	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	30000	66	321000	2000 2000	81000 79000	1. Febr. 1857
21	1857	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	67	365850	2200 2300	76800 74500	1. Febr. 1858
22	1858	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	68	404200	2500 2500	72000 69500	1. Febr. 1859
23	1859	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	69	478550	3000 3000	66500 63500	1. Febr. 1860
24	1860	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	70	589400	3700 3800	59800 56000	1. Febr. 1861
25	1861	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	71	703250	4500 4500	51500 47000	1. Febr. 1862
26	1862	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	35000	72	793130	5000 5000	42000 37000	1. Febr. 1863
27	1863	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	40000	73	922300	5700 5800	31300 25500	1. Febr. 1864
28	1864	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	40000	74	1007650	6200 6300	19300 13000	1. Febr. 1865
29	1865	1. Febr. 1. Aug.	1.Sept.	50000	75	1073125	6500 6500	6500 0000	1. Febr. 1866
Summe						9034055	100000		

Es ist hier allerdings nur der höchste Gewinn, welcher in jeder Ziehung vorkommt, angegeben. Die Gewinne, welche zwischen ihm und dem niedersten liegen, fehlen. Ihre Kenntniß im Einzelnen ist jedoch nicht von besonderer, und bei dem Calcul von gar keiner Wichtigkeit. Sie umfassen die Summen 15000, 10000, 8000, 5000, 3000, 1500, 1000, 500, 250, 125, 100, so zwar, daß von den höheren Gewinnen nur je einer in einer Ziehung vorkommt, von den niederen 1500, 1000, . . . je 2, je 4 und so fort. Jedes Jahr kommen zwei Serienziehungen vor, in den ersten Jahren auch zwei Gewinnziehungen. In den späteren ist letzteres nicht mehr der Fall. Die eben genannte Einrichtung findet sich nicht gewöhnlich bei den Lotterie-Anlehen. In der Regel sind nämlich die Gewinnziehungen jährlich angeordnet. Dadurch wird die Untersuchung etwas verwickelter, was jedoch keine weitere Schwierigkeit in der Anlage des Calculs herbeiführt.

Der Plan, welcher diesem Lotterie-Anlehen zu Grunde liegt, wurde durch ein besonderes, mit Zustimmung der Stände erlassenes, Gesetz vom 11ten Juni 1840 festgestellt. Die Artikel, worauf der vorliegende Plan beruht, sind ihrem Hauptinhalte nach folgende: Art. 1. »Die Amortisationskasse wird ermächtigt, ein Kapital von 5 Millionen aufzunehmen.« Art. 2. »Das Anlehen ist durch Verkauf von hunderttausend Loosen, je zu fünfzig Gulden, zu machen, vom 1sten Februar 1841 an mit drei und ein halb Procent, in halbjährlichen Raten zahlbar, zu verzinsen und innerhalb fünfundzwanzig Jahren zu tilgen.« Art. 4. »Die in den ersten fünfzehn Jahren zu bezahlenden Gewinnste sollen in keinem Jahre unter Einhundert und fünfzig Tausend Gulden betragen und dürfen Zweihundert Tausend Gulden nicht übersteigen. Die Gewinnste der sechszehnten Ziehung, oder bei halbjährlichen Ziehungen die Gewinnste der einunddreißigsten und zweiunddreißigsten Ziehung zusammen,, dürfen nicht unter Dreihundert Tausend Gulden und nicht über Vierhundert Tausend Gulden gestellt werden. Die Gewinnste der letzten neun Jahre sind in Summen zu bestimmen, die gegen den Betrag des sechszehnten Jahres allmälig anwachsen.« Der 5te Artikel bestimmt, daß die jährlichen Abtragssummen nebst allen Zinsen und Zinses-Zinsen den Loosinhabern vollständig zu gute kommen müssen und daß für kein einzelnes Loos ein geringerer Betrag, als fünfzig Gulden nebst den bis zur Zeit der Heimzahlung anwachsenden einfachen Zinsen von zwei Procent jährlich ausbezahlt werden darf. Der Art. 3 bestimmt, daß der Anlehensunternehmer auf diese Bestimmungen hin den Plan zur Tilgung des Anlehens zu entwerfen habe. Dies ist, wie sich aus der beiliegenden Tafel ergiebt, geschehen. Wer näher hierüber unterrichtet zu sein wünscht, der findet alles hieher Gehörige in meiner Theorie der Lotterie-Anlehen, pag. 3 u. ff.

§. 66.

Von den beiden Aufgaben, welche in dem vorigen §. angedeutet wurden, ist die Werthbestimmung eines Serienlooses, das zu einer bestimmten Gewinnziehung gelangt, die einfachste. Daher wird sie zuerst betrachtet.

Man kann den Werth eines Serienlooses irgend einer Ziehung so bestimmen, daß man annimmt, es sei Jemand in dem Besitze aller in einer Serienziehung erschienenen Loose. Da nun diese Loose in der nächsten Gewinnziehung zum Spielen gelangen und auf sie sämmtliche, in dieser Ziehung vorkommende Gewinne vertheilt werden müssen, so gelangt der Inhaber aller Serienloose in den Besitz sämmtlicher Gewinne, also auch der ganzen Summe, welche nach der Gewinnziehung ausgezahlt werden wird. Um nun den Werth eines Serienlooses, welches bei der nachfolgenden Gewinnziehung mitspielt, zu bestimmen, hat man die auf diese Gewinnziehung fallende Summe durch die Zahl der sämmtlichen in ihr mitspielenden Loose zu theilen. Nennt man nun die nach der $k$ten Gewinnziehung auszuzahlende Summe S_k, die Zahl der Loose, welche in dieser Ziehung mitspielen, Z_k, den Werth eines hiefür bestimmten Serienlooses M_k, so ist sofort:

$$1)\quad M_k = \frac{S_k}{Z_k}.$$

Diese Darstellung läßt sich auch aus der Gleichung 3 §. 55 ableiten. Nennt man nämlich die Gewinne, welche in der $k$ten Gewinnziehung durch's Loos vertheilt werden sollen, der Reihe nach G_1, G_2, $G_3 \ldots G_n$, und die Zahlen, welche angeben, wie oft jeder Gewinn in der Ziehung enthalten ist, der Reihe nach p_1, p_2, $p_3 \ldots p_n$, so hat man nach 3 §. 55:

$$2)\quad M_k = \frac{p_1 G_1 + p_2 G_2 \ldots . p_n G_n}{p_1 + p_2 + p_3 \ldots . p_n}.$$

Da nun der Zähler in 2 in der That nichts Anderes ist, als die Summe aller in der $k$ten Ziehung vorkommenden Gewinne, und der Nenner nichts Anderes, als sämmtliche in der Ziehung mitspielenden Loose, so fällt die Gleichung 2 und 1 zusammen.

Der Werth eines Serienlooses, das in der Gewinnziehung mitspielt, welche am 1sten September 1845 stattfindet, ergiebt sich aus dem vorstehenden Plane und der Gleichung 1 durch Einführung der erforderlichen Werthe, und ist:

$$M = \frac{89450}{400} = 223{,}625 \text{ Fl.}$$

Der Werth eines Serienlooses, das ein Jahr später zur Gewinnziehung gelangt, wird durch Einführung der angezeigten Werthe bestimmt zu:

$$M = \frac{150000}{1300} = 115{,}384.. \text{ Fl.}$$

Dieser Werth bleibt bis zur 20sten Ziehung unverändert. Gewöhnlich wird der Gewinn, welcher einem Looſe zufällt, nicht ſogleich nach erfolgter Ziehung, ſondern einige Zeit ſpäter ausgezahlt. Die Gleichungen 1 und 2 beſtimmen den Werth eines Serienlooſes ohne Rückſicht auf die Zeit. Soll die Bedeutung, welche eine ſpätere Zahlung auf den Werth des Looſes hat, mit in Rechnung gezogen werden, ſo iſt:

$$3)\quad M_k = \frac{S_k}{Z_k 1{,}0 p_1}$$

wenn p der Zinsfuß iſt, wornach rabattirt werden ſoll, und p_1 den für den zwiſchenliegenden Zeitraum reducirten Zinsfuß bedeutet (§. 2.).

Um nun den Werth eines Looſes, das einem Lotterieanlehen angehört, zu beſtimmen, wird die Bemerkung dienen, daß ein ſolches Loos in irgend einer Ziehung erſcheinen muß, alſo entweder in der erſten, oder zweiten, oder dritten u. ſ. w., oder in der letzten erſcheinen wird. Es wird daher der Beſitzer eines Looſes zu irgend einer Zeit einen der ausgeſetzten Gewinne erhalten. Da man aber den Gewinn, den er erhalten kann, nicht kennt, ſo iſt bei der bevorſtehenden Rechnung der Werth der Erwartung, den ein Loos hat, das in einer Gewinnziehung zum Spielen gelangt, und der in der Gleichung 1 oder 2 angegeben iſt, in Betrachtung zu ziehen. Geht man nun bei Berechnung des Werthes, den ein ſolches Lotterieloos im Allgemeinen hat, von der Zeit der Eröffnung eines Lotterie-Anlehens aus, ſo beruht derſelbe offenbar auf der Summe aller Erwartungswerthe, welche ſich aus den einzelnen Gewinnziehungen, die das Anlehen nach dem feſtgeſtellten Plane durchläuft, ergeben. Dies iſt in der Gleichung 2 §. 55 angegeben, welche ſofort der Rechnung zur Grundlage dient. Hält man nun ein beſtimmtes Loos im Auge und nennt die vorerſt noch unbekannten Wahrſcheinlichkeiten, daß es gerade in der erſten, zweiten, dritten u. ſ. w., in der letzten Ziehung erſcheinen werde, der Reihe nach w_1, w_2, w_3 .... w_n, und die Werthe, welche der Beſitzer in der erſten, zweiten, dritten u. ſ. w., letzten Ziehung zu erwarten hat, der Reihe nach M_1, M_2, M_3 .... M_n (Nr. 1), den Werth des Looſes ſelbſt E, ſo hat man aus 2 §. 55:

$$4)\quad E = w_1 M_1 + w_2 M_2 + w_3 M_3 + \ldots w_n M_n$$

Hierin müſſen die Werthe w_1, w_2, w_3 .... w_n noch näher beſtimmt werden. Die Werthe M_1, M_2, M_3 .... M_n, welche in dieſen Gleichungen vorkommen, ſind aber nicht ſogleich fällig, ſondern werden es erſt im Laufe der Zeit. Die vorſtehende Gleichung giebt daher den Werth von E nicht in Beziehung auf den gegenwärtigen Zeitpunkt an, für welchen die Gleichung 2 §. 55 gilt, woraus ſie abgele et wurde. Daher iſt dieſe Bemerkung in den Calcul aufzunehmen und die einzelnen Glieder der Reihe ſind in Beziehung auf die zwiſchenliegenden Zeiträume zu rabattiren.

Wir wenden uns zuerſt zur Beſtimmung der Werthe von w_1, w_2,

$w_3 \ldots w_n$. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmtes Loos in der ersten, zweiten, dritten Ziehung u. s. w., überhaupt in der *k*ten Ziehung erscheinen werde, beruht nach 6 §. 50 darauf, daß es in keiner der vorhergehenden Ziehungen erschienen ist, und daß es sofort, wenn diese Bedingung in Erfüllung gegangen, gerade in der zweiten, dritten u. s. w. erscheinen werde. Nennt man nun die Wahrscheinlichkeiten, daß ein Loos in der ersten, zweiten, dritten Ziehung u. s. w., in der *k*ten nicht erscheinen werde, der Reihe nach $u_1, u_2, u_3 \ldots u_k$, so ist hiernach die Wahrscheinlichkeit, daß es gerade in der *k*ten Ziehung erscheinen werde:

$$5) \quad w_k = u_1 . u_2 . u_3 \ldots . u_{k-1} . x_k.$$

Man hat nun diese Formel zur Bestimmung der fraglichen Wahrscheinlichkeiten anzuwenden. Diese ergeben sich nach 1 §. 50 aus dem Verhältniß der Anzahl der in jeder einzelnen Gewinnziehung spielenden Loose zu der aller in dem Lotterie-Anlehen noch rückständigen Loose. Nennt man nun die Zahl der in den verschiedenen Gewinnziehungen mitspielenden Loose der Reihe nach $Z_1, Z_2, Z_3 \ldots Z_n$, die Zahl aller Loose Z, so ist:

$$6) \quad Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 \ldots + Z_n,$$

und man hat hiernach für die Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmtes Loos in der ersten Ziehung erscheinen oder nicht erscheinen werde:

$$7) \quad x_1 = \frac{Z_1}{Z} \quad ; \quad u_1 = \frac{Z - Z_1}{Z} ;$$

daß es in der zweiten Ziehung erscheinen werde, oder nicht:

$$8) \quad x_2 = \frac{Z_2}{Z - Z_1} \quad ; \quad u_2 = \frac{Z - Z_1 - Z_2}{Z - Z_1} ;$$

daß es in der dritten Ziehung erscheinen werde, oder nicht:

$$9) \quad x_3 = \frac{Z_3}{Z - Z_1 - Z_2} \quad ; \quad u_3 = \frac{Z - Z_1 - Z_2 - Z_3}{Z - Z_1 - Z_2}$$

u. s. w. Daß es in der *k*ten Ziehung erscheinen werde:

$$10) \quad x_k = \frac{Z_k}{Z - Z_1 - Z_2 - Z_3 \ldots - Z_{k-1}} = \frac{Z_k}{Z_k + Z_{k+1} + \ldots . Z_n} ;$$

daß es nicht in derselben erscheinen werde:

$$11) \quad u_k = \frac{Z - Z_1 - Z_2 - Z_3 \ldots - Z_k}{Z - Z_1 - Z_2 - Z_3 \ldots - Z_{k-1}} = \frac{Z_{k+1} + Z_{k+2} + \ldots Z_n}{Z_k + Z_{k+1} + Z_{k+2} + .. Z_n} .$$

Führt man nun die hier angegebenen Werthe in die Gleichung 5 ein, so ergeben sich die Werthe für die besonderen Fälle. Es ist daher die Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmtes Loos gerade in der ersten Ziehung erscheinen werde, aus 7:

$$w_1 = \frac{Z_1}{Z};$$

diejenige, daß es gerade in der zweiten erscheinen werde, aus 7 und 8:

$$w_2 = \frac{Z - Z_1}{Z} \cdot \frac{Z_2}{Z - Z_1} = \frac{Z_2}{Z};$$

die, daß es gerade in der dritten erscheinen werde, aus 7, 8 und 9:

$$w_3 = \frac{Z - Z_1}{Z} \cdot \frac{Z - Z_1 - Z_2}{Z - Z_1} \cdot \frac{Z_3}{Z - Z_1 - Z_2} = \frac{Z_3}{Z}$$

u. s. w. Diejenige, daß es gerade in der *k*ten Ziehung erscheinen werde, ist daher:

$$12)\quad w_k = \frac{Z_k}{Z}.$$

Führt man nun die bisher erhaltenen Werthe in die Gleichung 4 ein und bemerkt, daß $M_k = \frac{S_k}{Z_k}$ nach 1, also daß $M_1 = \frac{S_1}{Z_1}$, $M_2 = \frac{S_2}{Z_2}$, $M_3 = \frac{S_3}{Z_3}$ u. s. w. ist, so geht sie in folgende über:

$$13)\quad E = \frac{S_1}{Z} + \frac{S_2}{Z} + \frac{S_3}{Z} + \frac{S_4}{Z} + \ldots . \frac{S_n}{Z}.$$

Die Summen $S_1, S_2, S_3 \ldots . S_n$ sind nun nicht sogleich, sondern nach Verfluß von verschiedenen Zeiträumen fällig. Nimmt man an, daß die Tilgung eines Lotterie-Anlehens in Jahresfristen geschieht, und daß die Verzinsung gleichfalls in Jahresfristen und nach dem Zinsfuß p vor sich geht, und hält man die oben gemachte Voraussetzung fest, nach welcher der Werth von E für den Zeitpunkt bestimmt werden soll, worin das Lotterie-Anlehen eröffnet wurde, so ist die Summe S_1 sofort nach Verfluß des ersten, S_2 nach Verfluß des zweiten, S_3 nach Verfluß des dritten Jahres fällig u. s. w., und man hat daher die einzelnen Glieder der Reihe in 13 nach §. 30 zu rabattiren, um den Werth von E für den Zeitpunkt zu finden, worin das Lotterie-Anlehen gemacht wurde. Hiernach ist:

$$14)\quad E = \frac{S_1}{Z.1{,}0p} + \frac{S_2}{Z.1{,}0p^2} + \frac{S_3}{Z.1{,}0p^3} + \frac{S_4}{Z.1{,}0p^4} \cdots \cdots \frac{S_n}{Z.1{,}0p^n}$$

Soll der Werth von E auf den Zeitpunkt der ersten Gewinnzahlung zurückgebracht werden, so ist:

$$15)\quad E = \frac{1}{Z}\left(S_1 + \frac{S_2}{1{,}0p} + \frac{S_3}{1{,}0p^2} + \frac{S_4}{1{,}0p_3} + \ldots . \frac{S_n}{1{,}0p^{n-1}}\right).$$

Gewöhnlich geschieht die Kapitaltilgung jährlich, die Verzinsung aber halbjährlich. Für diesen Fall hat man die einzelnen Glieder nach dem Maßstabe $\frac{1}{1{,}0p_1^2}$ zu rabattiren, wenn p_1 den halbjährlichen Zinsfuß bedeutet.

Der Erwartungswerth eines Looses, welches unter dieser Voraussetzung in einem Lotterie-Anlehen mitspielt, ist für den Zeitpunkt, worin das Lotterie-Anlehen eröffnet wurde,

$$16)\quad E = \frac{1}{Z}\left[\frac{S_1}{1{,}0\,p_1^{\,2}} + \frac{S_2}{1{,}0\,p_1^{\,4}} + \frac{S_3}{1{,}0\,p_1^{\,6}} + \ldots \frac{S_n}{1{,}0\,p_1^{\,2n}}\right]$$

Für den Zeitpunkt, an welchem die erste Gewinnziehung erfolgt, ist dieser Werth:

$$17)\quad E = \frac{1}{Z}\left(S_1 + \frac{S_2}{1{,}0\,p_1^{\,2}} + \frac{S_3}{1{,}0\,p_1^{\,4}} + \frac{S_4}{1{,}0\,p_1^{\,6}} + \ldots \frac{S_n}{1{,}0\,p_1^{\,2n-2}}\right).$$

Man kann nun auch den Erwartungswerth, welchen ein Loos in irgend einem Zeitpunkt während der Tilgung des Lotterie-Anlehens, etwa zur Zeit der $k$ten Gewinnziehung, hat, bestimmen. Hiebei sind die nämlichen Schlüsse wie bisher zu machen, und man kann daher die vorstehenden Gleichungen benutzen, um den fraglichen Werth aus ihnen abzuleiten. Folgen nämlich auf die $k$te Ziehung noch $n-k = m$ Ziehungen, so ist der Erwartungswerth für ein Loos für $m+1 = n-k+1$ Ziehungen zu ermitteln und ganz auf die nämliche Weise, wie er vorher für n Ziehungen in 15 und 17 ermittelt wurde. Nennt man die Zahl der Loose, welche in dem Lotterie-Anlehen von der $k$ten Ziehung an noch mitspielen, Z_r, so tritt Z_r an die Stelle von Z, und die Summen S_k, S_{k+1}, S_{k+3} .... S_n an die Stelle von S_1, S_2, S_3 ... S_n, und man gewinnt zur Bestimmung des Werthes eines noch nicht erschienenen Looses zur Zeit der $k$ten Ziehung:

$$18)\quad E_k = \frac{1}{Z_r}\left(S_k + \frac{S_{k+1}}{1{,}0p} + \frac{S_{k+2}}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{S_n}{1{,}0p^{n-k}}\right).$$

Diese Gleichung gilt, wenn die Gewinnzahlungen und die Verzinsung jährlich geschehen. Werden aber die Gewinnzahlungen jährlich gemacht und geht die Verzinsung halbjährlich vor sich, so gilt folgende:

$$19)\quad E_k = \frac{1}{Z_r}\left(S_k + \frac{S_{k+1}}{1{,}0p_1^{\,2}} + \frac{S_{k+2}}{1{,}0p_1^{\,4}} \ldots \frac{S_n}{1{,}0p_1^{\,2n-2k}}\right).$$

Soll nun der Werth eines Looses auf einen Zeitpunkt, der zwischen der $k$ten und $(k-1)$ten Ziehung liegt, zurückgebracht werden, so hat dies keine Schwierigkeit, und man hat den aus der ganzen Reihe sich ergebenden Werth (E_k) im Verhältniß zu dieser Zeit nach 2 §. 10 weiter zu rabattiren.

Der Plan des in §. 65 angegebenen Großherzoglich Badischen Lotterie-Anlehens hat das Eigenthümliche, daß die Kapitaltilgung eine Zeit lang halbjährlich, dann jährlich, die Verzinsung aber halbjährlich geschieht. Soll daher der Werth eines Looses, das in diesem Lotterie-Anlehen mitspielt, bestimmt werden, so hat man hiernach den Calcul zu ändern. Nennt man die Zahl der halbjährlichen Kapitaltilgungen k, so hat man für den Werth eines Looses zur Zeit der Eröffnung des Anlehens:

$$20)\quad E = \frac{1}{Z}\left(\frac{S_1}{1{,}0\,p_1^{\,2}} + \frac{S_2}{1{,}0\,p_1^{\,3}} + \frac{S_3}{1{,}0\,p_1^{\,4}} + \ldots\ldots \frac{S_{k-1}}{1{,}0\,p_1^{\,2k-1}} + \frac{S_k}{1{,}0\,p_1^{\,2k}} + \frac{S_{k+1}}{1{,}0\,p_1^{\,2k+2}} + \frac{S_{k+2}}{1{,}0\,p_1^{\,2k+4}} + \ldots \frac{S_n}{1{,}0\,p_1^{\,2n}}\right).$$

Die Anwendung der vorstehenden Formeln auf besondere Fälle zur Ermittelung der Zahlenwerthe, um deren Kenntniß es sich gerade handelt, ist nicht ohne Mühe, da die Werthe S_1, S_2, S_3 . . . nicht immer unter sich gleich sind. Man kann die Rechnung dadurch weniger mühevoll machen, daß man die Gleichungen aus der unabhängigen in eine zurücklaufende Form überführt. Hiedurch erhält man aus 14 und 16 folgende Darstellungen:

$$21)\quad E = \Big(\Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\Big(\frac{S_n}{1{,}0p} + S_{n-1}\Big)\frac{1}{1{,}0p} + S_{n-2}\Big)\frac{1}{1{,}0p} + S_{n-3}\Big)\frac{1}{1{,}0p} \ldots\ldots + S_3\Big)\frac{1}{1{,}0p} + S_2\Big)\frac{1}{1{,}0p} + S_1\Big)\frac{1}{1{,}0p\,.\,Z}.$$

$$22)\quad E = \Big(\Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\Big(\frac{S_n}{1{,}0p_1^{\,2}} + S_{n-1}\Big)\frac{1}{1{,}0p_1^{\,2}} + S_{n-2}\Big)\frac{1}{1{,}0p_1^{\,2}} + S_{n-3}\Big)\frac{1}{1{,}0p_1^{\,2}} \ldots + S_3\Big)\frac{1}{1{,}0p_1^{\,2}} + S_2\Big)\frac{1}{1{,}0p_1^{\,2}} + S_1\Big)\frac{1}{1{,}0p_1^{\,2}\,.\,Z}.$$

Eben so ist aus 18 und 19:

$$23)\quad E = \Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\frac{S_n}{1{,}0p} + S_{n-1}\Big)\frac{1}{1{,}0p} + S_{n-2}\Big)\frac{1}{1{,}0p} + \ldots . S_{k+1}\Big)\frac{1}{1{,}0p} + S_k\Big)\frac{1}{Z_r}.$$

$$24)\quad E_k = \Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\frac{S_n}{1{,}0p_1^{\,2}} + S_{n-1}\Big)\frac{1}{1{,}0p_1^{\,2}} + \ldots S_{k+1}\Big)\frac{1}{1{,}0p_1^{\,2}} + S_k\Big)\frac{1}{Z_r}.$$

Alle diese Gleichungen gelten nur für den relativen Zinsfuß. Man könnte auch den conformen Zinsfuß in Anwendung bringen; dieser hat jedoch in den Gleichungen 14—19 keine Bedeutung, denn er führt auf die Gleichungen 14, 16 und 18 zurück. Nur dann führt er auf ein anderes Resultat, wenn die Kapitaltilgungen halbjährlich, wie in 20, vor sich gehen, und auch nur für diese Zeit. Da nun seine Anwendung sehr beschränkt ist, so wird er nicht besonders hervorgehoben.

§. 67.

Bei Berechnung des Werthes, welchen ein in einem Lotterie-Anlehen mitspielendes Loos hat, kann man von verschiedenen Ansichten ausgehen. Dadurch wird der Werth auch verschieden ausfallen. Man kann hiebei den Zinsfuß 4, welcher gegenwärtig der gewöhnlichste sein dürfte, zu Grunde

legen. Dies wird Jeder thun, welcher eine disponible Summe anzulegen wünscht, und der sich die Frage vorlegt, ob es rathsam ist, sich bei einem Lotterie-Anlehen zu betheiligen? Berechnet man nun unter dieser Voraussetzung nach einer der im vorhergehenden §. angegebenen Formeln den Werth eines Looses, so erhält man die Summe, wofür ein Loos unter dieser Annahme kaufwürdig ist. Diese Berechnungsweise ist aber offenbar eine nur subjectiv gültige, und hiernach kann der Werth eines Looses eines Lotterie-Anlehens, den es als solches hat, nicht bemessen werden. Um letzteren zu erhalten, ist nöthig, dem Calcul diejenigen Elemente zu Grunde zu legen, welche der Aufnahme eines Lotterie-Anlehens zu Grunde gelegt wurden. Man muß daher nach 8 §. 30 den Zinsfuß und die Art der Verzinsung beibehalten, worauf die Tilgung des Anlehens beruht. Der Werth, welcher auf diese Weise gefunden wird, kann füglich der objective Werth eines Lotterielooses heißen. Bei Berechnung des subjectiven Werthes eines Looses wird wohl jährliche Verzinsung anzunehmen sein, denn diese ist im gewöhnlichen Leben die allgemein vorkommende.

Nach diesen Ansichten ist der Werth eines Looses, das in dem Großherzoglich Badischen Lotterie-Anlehen vom Jahre 1840 mitspielt, berechnet und in folgender Tafel angegeben. Der subjective Werth eines Looses ist bei 4 Proc. und jährlicher Verzinsung, der objective bei 3,5 Proc. und halbjährlicher Verzinsung berechnet. Da man aber nicht leicht Gelegenheit findet, eine Summe von 50 Fl., welche der Nominalwerth eines Looses ist, auf Zinses-Zinsen bei halbjährlicher Verzinsung anzulegen, so ist auch der Werth eines Looses bei $3\frac{1}{2}$ Proc. und jährlicher Verzinsung beigefügt. Die Rechnung selbst schließt sich genau an den Plan an und ist im relativen Zinsfuß, worin auch die Verzinsung vor sich geht, in Folge der Bestimmung 8 §. 30 durchgeführt.

Der Rechnung ist die zurücklaufende Form, welche in den Gleichungen 21—24 aufgeführt ist, zu Grunde gelegt. Sie wurde der Gleichung 20, worin die Eigenthümlichkeit des vorliegenden Anlehens aufgefaßt ist, angepaßt. Hiedurch findet man allmälig die Werthe eines Looses zu den verschiedenen Jahren, wie sie in der Tafel angegeben sind. Hiernach sind folgende Geschäfte auszuführen. Man rabattire die bei der letzten Zahlung fällige Summe (S_n) auf die Zahlungszeit der vorletzten und messe durch die Zahl der noch rückständigen Loose, so hat man den Werth eines Looses zur Zeit der vorletzten Zahlung; nun zähle man das durch Rabattiren erhaltene Resultat zu der Summe, welche nach der zweitletzten Ziehung fällig wird (S_{n-1}), und rabattire die so erhaltene Summe auf die Zeit der drittletzten Ziehung, und messe das entstandene Resultat durch die Zahl aller in dem Lotterie-Anlehen noch mitspielenden Loose, so findet man den Werth des Looses zur Zeit dieser Zahlung. Auf diese Weise fahre man fort, bis alle Zeiträume, durch welche das Anlehen spielt, durchlaufen sind.

Erwartungswerth eines Looses bei 4 Proc. und Jahreszins (subjectiver Werth).					Erwartungswerth eines Looses bei 3½ Proc. und Jahreszins.				Erwartungswerth eines Looses bei 3½ Proc. und halbjährl. Zinsen (objectiver W.).				
Jahr.	Größe der Schuld.	Rabattirter Werth der Schuld.	Werth des Looses.		Größe der Schuld.	Rabattirter Werth der ganzen Schuld.	Werth des Looses.		Größe der Schuld.	Rabattirter Werth der Schuld.	Werth des Looses.		Anzahl der Loose.
	fl.	fl.	fl.	kr.	fl.	fl.	fl.	kr.	fl.	fl.	fl.	kr.	
1866 Febr.	1073125,000				1073125,00				1073125,00				
1865 »	2039500,961	1031850,961	79	22	2044485,74	1036835,74	79	45	2044186,24	1036536,24	79	44	13000
1864 »	2883358,650	1961058,650	76	54	2897648,54	1975348,54	77	28	2896774,92	1974474,92	77	26	25500
1863 »	3565590,240	2772460,240	74	56	3592790,43	2799660,43	75	40	3591118,44	2797988,44	75	37	37000
1862 »	4131702,154	3428452,154	72	56,6	4174545,10	3471295,10	73	51	4171903,30	3468653,30	73	48	47000
1861 »	4562190,495	3972790,495	70	56	4622776,91	4033376,91	72	1	4619032,10	4029632,10	71	57	56000
1860 »	4865271,630	4386721,630	69	4,8	4945001,12	4466451,12	70	20	4940062,82	4461512,82	70	16	63500
1859 »	5082345,798	4678145,798	67	18,6	5181978,86	4777778,86	68	45	5175795,67	4771595,67	68	39	69500
1858 »	5252720,960	4886870,960	65	35,7	5372592,86	5006742,86	67	12	5365139,50	4999289,50	67	9	74500
1857 »	5371693,230	5050693,230	63	55,9	5511910,97	5190910,97	65	42	5503176,29	5182176,29	65	36	79000
1856 »	5315089,645	5165089,645	62	13 7	5475517,85	5325517,85	64	10	5465505,72	5315505,72	64	3	83000
1855 »	5260663,120	5110663,120	60	37	5440355,41	5290355,41	62	41	5429119,79	5279119,79	62	37	84300
1854 »	5208329,923	5058329,923	59	55,5	5406382,04	5256382,04	61	28	5393974,72	5243974,72	61	16	85600
1853 »	5158009,541	5008009,541	57	37,7	5373557,52	5223557,52	60	6	5360028,15	5210028,15	59	57	86900
1852 »	5109624,559	4959624,559	56	13	5341843,02	5191843,02	58	52	5327239,25	5177239,25	58	42	88200
1851 »	5063100,537	4913100,537	54	53,6	5311200,98	5161200,98	57	40	5295568,52	5145568,52	57	29	89500
1850 »	5018365,901	4868365,901	53	36,6	5281595,15	5131595,15	56	31	5264977,84	5114977,84	56	20	90800
1849 »	4975351,828	4825351,828	52	23,5	5252990,49	5102990,49	55	24	5235430,35	5085430,35	55	13	92100
1848 »	4933992,142	4783992,142	51	13	5225353,13	5075353,13	54	20	5206890,52	5056890,52	54	9	93400
1847 »	4894223,214	4744223,214	50	5,8	5198650,37	5048650,37	53	19	5179323,95	5029323,95	53	11	94700
1846 »	4795433,859	4705983,859	49	1	5112300,60	5022850,60	52	19	5092147,47	5002697,47	52	7	96000
1845 Aug.	4790855,744	4701405,744	48	46	5113824,05	5024374,05	52	7	5094017,54	5004567,54	51	55	96400
1845 Febr.	4786367,397	4696917,397	48	31	5115321,31	5025871,31	51	54	5095855,44	5006405,44	51	43	96800
1844 Aug.	4781967,055	4692517,055	48	16,6	5116792,81	5027342,81	51	43	5097661,74	5008211,74	51	34	97200
1844 Febr.	4777652,995	4688202,995	48	2	5118239,00	5028789,00	51	31	5099436,97	5009986,97	51	20	97600
1843 Aug.	4773423,524	4683973,524	47	47,7	5119660,32	5030210,32	51	20	5101181,67	5011731,67	51	8	98000
1843 Febr.	4774276,984	4679826,984	47	33,5	5126056,95	5031606,95	51	8	5107896,35	5013446,35	50	57	98400
1842 Aug.	4775113,710	4680663,710	47	22,5	5132343,80	5037893,80	50	59	5114495,55	5020045,55	50	49	98800
1842 Febr.	4831484,029	4681484,029	47	11,5	5194072,54	5044072,54	50	51	5176531,25	5026531,25	50	40	99200
1841 »		4645657,721	46	27		5018427,57	50	11		5000000,00	50	—	100000

Unger hat in seinem Handbuch der Staats-Lotterie-Anleihen, Leipzig 1841, pag. 210 u. ff., auch das Großherzoglich Badische Lotterie-Anlehen einer Rechnung unterworfen und bestimmte den Erwartungswerth eines Looses, welches in diesem Lotterie-Anlehen mitspielt, bei einem Zinsfuß von 4 und bei Jahreszinsen, also unter den Voraussetzungen, wie sie auch hier in der ersten Rubrik der beigehenden Tafeln gemacht sind. Er findet jedoch pag. 210—245 für die Jahre 1841—1859 Werthe, welche mit den hier mitgetheilten nicht harmoniren. Dies begreift sämmtliche Werthe in der dritten Columne (Tab.: Werth der Schuld. Rubr.: Erwartungswerth des Looses bei 4 Proc.) von der siebenten an bis zur untersten Zeile. Eine wiederholt angestellte Prüfung bestätigte die Richtigkeit der hier mitgetheilten Werthe, ferner eine Zuschrift, die ich von einem gewandten Calculator über meine Theorie der Lotterie-Anlehen erhielt (worin die hier mitgetheilten Werthe gleichfalls enthalten sind) und der dieselben mit seiner Rechnung genau übereinstimmend fand.

Nach der beigegebenen Tabelle ist ein Loos, das in diesem Lotterie-Anlehen mitspielt, je nachdem die Elemente sind, welche dem Calcul zu Grunde gelegt werden, im Februar des Jahres 1845 werth 48 Fl. 31 Kr., 51 Fl. 54 Kr., 51 Fl. 43 Kr.; im August 48 Fl. 46 Kr., 52 Fl. 7 Kr., 51 Fl. 55 Kr. Der Cours dieser Loose steht gegenwärtig (März) zwischen 66 und 67 Fl. Die Differenz ist, wie man sieht, bedeutend, und es zeigt sich, daß dieses Anlehen ein großes Vertrauen genießt.

§. 68.

Da die Lotterie-Anlehen, wie schon oben bemerkt wurde, so eingerichtet sind, daß die niedrigsten Gewinne von einem bestimmten Zeitpunkte an mit einfachen Zinsen, aber in einem niedrigern Zinsfuße, steigen, als der Zinsfuß des Lotterie-Anlehens ist, so knüpft sich hieran die Frage: In welchem Verhältniß steht Gewinn und Verlust bei einem Loose, welches in einem Lotterie-Anlehen mitspielt?

Man kann, um die fragliche Vergleichung zu gewinnen, von verschiedenen Ansichten ausgehen und den Werth, den ein nutzbringend angelegtes Kapital zu irgend einem Zeitpunkte hat, mit dem Erwartungswerthe oder dem niedrigsten Werthe ꝛc. vergleichen, welchen ein Loos hat, das in einem Lotterie-Anlehen mitspielt. Nennt man nun die Summe, um welche ein Lotterieloos angekauft wurde, K, so wird es am zweckmäßigsten sein, den Kaufpreis des Looses auf die Zeit zurückzuführen, worin irgend eine Gewinnziehung eines Lotterie-Anlehens ausgezahlt wird. Beträgt nun der Zeitraum, welcher zwischen der Zeit des Ankaufs und der Auszahlung liegt, n Jahre, so ist der Werth, zu welchem der Ankaufspreis bei einfachen Zinsen und bei dem Zinsfuß q erwachsen ist, nach 2 §. 6:

$$1)\quad S = K.\frac{100+nq}{100};$$

bei Zinses-Zinsen und bei jährlicher oder halbjährlicher Verzinsung:

$$2)\quad S = K.1{,}0\,q^n\;; \qquad 3)\quad S = K\,1{,}0\,q_1^{2n},$$

worin $q_1 = \frac{1}{2}q$ ist. Vergleicht man nun die hier erhaltenen Werthe mit dem Werthe eines Serienlooses oder, was dasselbe ist, mit dem Durchschnittswerth, welchen ein Lotterieloos zur Zeit der $k$ten Gewinnzahlung hat, so ergiebt sich Gewinn oder Verlust, je nachdem sich in den nachstehenden Formeln:

$$4)\quad D = \frac{S_k}{Z_k} - K.\frac{100+nq}{100}\;; \qquad 5)\quad D = \frac{S_k}{Z_k} - K.1{,}0\,q^n\;;$$

$$6)\quad D = \frac{S_k}{Z_k} - K.1{,}0\,q_1^{2n}$$

der Werth von D herausstellt. Wird er positiv, so deutet dies auf Gewinn, wird er negativ, so deutet dies auf Verlust. Bei dem Großherzoglich Badischen Lotterie-Anlehen von 1840 tritt der Umstand ein, daß dasselbe eine Zeit hindurch durch halbe Jahre spielt. Soll diese Eigenthümlichkeit in den Calcul aufgenommen werden, so hat man eine der folgenden Formeln zu beachten:

$$7)\quad S = K.1{,}0q_1^{rm}.1{,}0q^h\;; \qquad 8)\quad S = K.1{,}0q_1^{rm+2h}.$$

Hieraus zieht man folgende Vergleichung:

$$9)\quad D = \frac{S_k}{Z_k} - K.1{,}0q_1^{2m}\,1{,}0q^h\;; \qquad 10)\quad D = \frac{S_k}{Z_k} - K.1{,}0q_1^{2m+2h}.$$

Man kann nun die vorstehenden Werthe auch mit dem Erwartungswerthe eines Looses oder mit dem niedrigsten Werthe, welchen ein Loos zur Zeit der $k$ten Gewinnzahlung hat, vergleichen. Nennt man erstern E_k und letztern N_k, so erhält man hieraus folgende Zusammenstellungen:

$$11)\quad D = E_k - K.\frac{100+nq}{100}\;; \qquad 12)\quad D = N_k - K.\frac{100+nq}{100}\;;$$

$$13)\quad D = E_k - K1{,}0q^n\;; \qquad 14)\quad D = N_k - K.1{,}0q^n\;;$$

$$15)\quad D = E_k - K.1{,}0q_1^{2n}\;; \qquad 16)\quad D = N_k - K.1{,}0q_1^{2n}\;;$$

$$17)\quad D = E_k - K.1{,}0q_1^{2m}.1{,}0q^h\;; \qquad 18)\quad D = N_k - K.1{,}0q_1^{2m}\,1{,}0q^h\;;$$

$$19)\quad D = E_k - K1{,}0q_1^{2m+2h}\;; \qquad 20)\quad D = N_k - K1{,}0q_1^{2m+2h}.$$

Der Werth für E_k ist aus 18 oder 19 §. 66 zu bestimmen.

Benutzt man diese Formeln, um Vergleichungen zu erhalten, so stellen sich die Resultate für den Besitzer eines Looses nicht ungünstig, wenn man den Mittelwerth eines Looses und einfache Zinsen der Rechnung zu Grunde legt und die Gleichung 4 benutzt. Nimmt man nun an, ein Loos sei um den Nennwerth von 50 Fl. gekauft worden, und legt man 4 Proc. der Rechnung zu Grunde, so ergiebt sich in den ersten zwanzig Ziehungen ein bedeutender Vortheil für den Besitzer eines Looses, und D erhebt sich in den

ersten Ziehungen bis zur Summe von 184 Fl. und schwankt zwischen dieser Summe und 36 Fl. Erst von der 20sten Ziehung an zeigt sich Verlust. *D* wird negativ und schwankt zwischen $^4/_5$ und 17 Fl. Noch vortheilhafter sind die Resultate, wenn 3,5 als Zinsfuß angenommen wird. Dann wird *D* erst von der 23sten Ziehung an negativ und deutet auf Verlust. Der Verlust aber schwankt zwischen 2 und 10 Fl. Die Mittelwerthe der Loose bei dem bisher betrachteten Lotterie-Anlehen stehen von Anfang ziemlich hoch (236 Fl.), fallen dann, erreichen in der 24sten und 25sten Ziehung ihren niedrigsten Stand (78 Fl.), erheben sich dann wieder und erreichen die Höhe von 82 Fl. Weitere hieher gehörige Zusammenstellungen finden sich in meiner Theorie der Lotterie-Anlehen, pag. 34 und 35. Die hier angeführten Vergleichungen gelten natürlich nur, wenn ein Loos bei Eröffnung des Lotterie-Anlehens um den Nennwerth von 50 Fl. angekauft wurde. Dies ist aber nicht immer der Fall. Es ist das Interesse der Uebernehmer eines solchen Anlehens, die Loose über dem Nennwerth abzusetzen und sich Gewinn zu sichern. Sie werden daher nicht um den Nennwerth zu haben sein. Daher wird sich bei jedem höhern Ankauf das Verhältniß zwischen Gewinn und Verlust ungünstiger für den Käufer stellen. Zwar standen die Ankaufspreise der Loose des Großherzoglich Badischen Lotterie-Anlehens anfänglich niedriger als der Nennwerth. Dieser niedere Stand hatte aber vorzüglich seinen Grund in den damaligen besonderen Zeitverhältnissen. Als diese vorüber waren, hob sich der Cours dieser Papiere gleich und steht gegenwärtig unverhältnißmäßig hoch.

Die Regulirung der Mittelwerthe der Loose eines Lotterie-Anlehens ist, wenn nicht der Plan ganz entschieden hindernd eintritt, in der Hand des Uebernehmers eines Lotterie-Anlehens gelegen. Es ist nun das Interesse des Uebernehmers, die Mittelwerthe und zugleich die niedrigsten Gewinne so hoch als möglich zu setzen, um die Theilnahme an dem Lotterie-Anlehen in den Augen des spiellustigen Publikums gleich bei dem Anfang als vortheilhaft hinzustellen und so die Loose schnell und unter günstigen Preisen abzusetzen. Zeigt sich der Eintritt in ein Lotterie-Anlehen vortheilhaft, so wird wohl der Erfolg eines schnellen und günstigen Absatzes gesichert sein, denn die Frage nach dem Werth, welchen ein Loos in späteren Zeiten hat, liegt einerseits zu fern, andererseits zu versteckt, als daß er sich sogleich und leicht erörtern ließe. Daher bringt Jeder, durch die Hoffnung auf Gewinn gelockt, unwillkürlich seine Gabe in die Casse des Uebernehmers eines Lotterie-Anlehens, welcher ein Loos höher kauft, als der Erwartungswerth desselben angiebt.

§. 69.

Da die Lotterie-Anlehen beliebt sind, so hat sich die Speculation ihrer bemächtigt und das Spiel mit Promessen erfunden. Eine Promesse ist

nämlich die Ausmiethung eines Lotterielooses auf eine bestimmte Gewinnziehung gegen eine Summe, welche der Käufer an den Vermiether ein für alle Mal zu zahlen, und auf welche er keinen weitern Anspruch nach der erfolgten Auszahlung hat. Der Vermiether (Besitzer des Looses) tritt für die bestimmte Gewinnziehung das fragliche Loos sammt allen damit verbundenen Vortheilen und Rechten an den Miether ab, so daß jeder Gewinn, der diesem Looſe im Falle seines Erscheinens zukommen sollte, dem Miether gehört. Erscheint aber das gemiethete Loos in der zum Voraus bestimmten Gewinnziehung nicht, so tritt der Vermiether in den vollen Besitz des Looses wieder ein, und der Miether hat allen Anspruch auf Entschädigung verloren.

Um nun den Werth einer Promesse für eine bestimmte Ziehung ermitteln zu können, wird die Beantwortung folgender Vorfragen nöthig.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, einen Gewinn von bestimmter Größe (G) in irgend einer Ziehung (K) zu erhalten?

Um diesen Gewinn erhalten zu können, ist nöthig, daß das mitspielende Loos gerade in der $k$ten Ziehung erscheine. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieses Ereignisses ist in 12 §. 66 angegeben. Ist nun der Gewinn G_r in der $k$ten Ziehung m Mal enthalten und spielen in dieser Ziehung Z_k Looſe mit, so kann man denselben m Mal unter Z_k Fällen erhalten. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $\frac{m}{Z_k}$. Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit, unter diesen Verhältnissen den Gewinn G_r zu erhalten,

$$1)\quad w = \frac{Z_k}{Z} \cdot \frac{m}{Z_k} = \frac{m}{Z}.$$

Der Werth der Erwartung (H_k), welcher dem Besitzer eines Looses aus dem Gewinne G_r, der in der $k$ten Ziehung fällig wird, zufließt, ist aus 1 in Rücksicht auf 1 §. 55:

$$2)\quad H_k = \frac{m G_r}{Z}.$$

Kommt nun der Gewinn G_r in mehreren Ziehungen vor, so dient die Gleichung 1, um zu bestimmen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, um den Gewinn G_r in allen Ziehungen, worin er vorkommt, zu erhalten. Kommt er in der $k$ten Ziehung m_1 Mal, in der $(k+1)$ten Ziehung m_2 Mal vor u. s. w., so ist die Wahrscheinlichkeit, ihn in den folgenden n Ziehungen zu erhalten,

$$3)\quad w = \frac{m_1}{Z} + \frac{m_2}{Z} + \frac{m_3}{Z} + \ldots \frac{m_n}{Z}.$$

Der Werth der Erwartung, welcher sich durch das Mitspielen eines Looses in allen diesen Ziehungen ergiebt, ist aus 2:

$$4)\quad E = \frac{m_1 G_r}{Z} + \frac{m_2 G_r}{Z} + \frac{m_3 G_r}{Z} + \ldots \frac{m_n G_r}{Z}.$$

Da aber die Ziehungen in verschiedenen Zeitpunkten erfolgen, so ist auch dieser Bemerkung nach §. 66 Rechnung zu tragen, und man hat sofort für den gegenwärtigen Werth der Erwartung den Gewinn G_r zu erhalten:

$$5)\quad E = \frac{G_r}{Z}\left(m_1 + \frac{m_2}{1{,}0p} + \frac{m_3}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{m_n}{1{,}0p^{n-1}}\right).$$

Der in dieser Gleichung angegebene Werth läßt sich auf jeden früheren Zeitpunkt zurückführen. Diese Gleichung kann man leicht verallgemeinern, denn man erkennt, daß die Schlüsse unverändert bleiben, wenn verschiedene Gewinne $G_1, G_2, G_3 \ldots G_n$ in Rechnung gebracht werden sollen. Hiernach ist:

$$6)\quad E = \frac{1}{Z}\left(m_1 G_1 + \frac{m_2 G_2}{1{,}0p} + \frac{m_3 G_3}{1{,}0p^2} + \ldots\ldots \frac{m_n G_n}{1{,}0\,p^n}\right).$$

Die Formel für die zurücklaufende Bildungsweise ist:

$$7)\quad E = \frac{1}{Z}\Bigg(\Bigg(\Bigg(\ldots\ldots\Bigg(\Bigg(\frac{m_n G_n}{1{,}0p} + m_{n-1}G_{n-1}\Bigg)\frac{1}{1{,}0p} + m_{n-2}G_{n-2}\Bigg)\frac{1}{1{,}0p} + \ldots \ldots m_3 G_3\Bigg)\frac{1}{1{,}0p} + m_2 G_2\Bigg)\frac{1}{1{,}0p} + m_1 G_1\Bigg).$$

Die vorstehenden Formeln wurden in der Voraussetzung entwickelt, daß alle Loose in dem Lotterie-Anlehen noch vorhanden sind. Sie gehen also von der Zeit der Eröffnung des Anlehens aus. Sie lassen sich jedoch leicht auf spätere Ziehungen übertragen. Sind nämlich schon mehrere Ziehungen vorüber und ist die Zahl der Loose, welche noch in dem Lotterie-Anlehen mitspielen, Z_r, so ändert dies die Schlußweise nicht, denn es tritt Z_r an die Stelle von Z in den vorstehenden Gleichungen. Der Erwartungswerth E_k eines Looses ist hiernach, wenn von irgend einer späteren Ziehung an gerechnet wird,

$$8)\quad E_k = \frac{1}{Z_r}\left(m_k G_k + \frac{m_{k+1}\,G_{k+1}}{1{,}0p} + \frac{m_{k+2}\,G_{k+2}}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{m_{k+n}\,G_{k+n}}{1{,}0p^n}\right).$$

Jedes Loos, das in einem Lotterie-Anlehen mitspielt, erhält einen Gewinn, im ungünstigsten Falle den niedrigsten in der Ziehung, worin es erscheint. Man kann hiernach auch den Werth der Erwartung bestimmen, welchen der Besitzer eines Looses hat, wenn ihm nur einer der niedrigsten Gewinne zufällt. Bezeichnet man die niedrigsten Gewinne der Reihe nach durch $N_1, N_2 \ldots N_n$, die Anzahl der Fälle, wie oft die niedrigsten Gewinne vorkommen, $F_1, F_2, F_3 \ldots F_n$, so ist:

$$9)\quad E = \frac{1}{Z}\left(F_1.N_1 + \frac{F_2 N_2}{1{,}0p} + \frac{F_3 N_3}{1{,}0\,p^2} + \ldots \frac{F_n N_n}{1{,}0p^{n-1}}\right).$$

Der Erwartungswerth für spätere Ziehungen ergiebt sich in Rücksicht auf 8 leicht. In den vorstehenden Gleichungen wurde die Rabattirung durch Jahresfristen genommen. Die Zurückführung des Rabatts auf halbe Jahre unterliegt keiner Schwierigkeit. Wir kommen nun auf die oben vorgelegte Frage zurück.

Der Werth einer Promesse wird sich nun dadurch bestimmen lassen, daß man annimmt: irgend jemand sei im Besitze aller noch nicht gezogenen Loose, und daß für alle noch vorhandenen Loose Promessen genommen werden. Nennt man nun den Werth einer Promesse P, die Zahl aller noch vorhandenen Loose Z_r, so wird der Besitzer aller Loose $Z_r \,.\, P$ Fl. einnehmen. Durch die Ausstellung von Promessen auf alle Loose verzichtet der Besitzer auf alle in der bevorstehenden ($k$ten) Ziehung vorkommende Gewinne. Ist nun die Summe aller in dieser Ziehung vorkommenden Gewinne S_k, so muß, wenn weder Verlust noch Gewinn für Käufer und Verkäufer stattfinden soll, die Einnahme der Ausgabe gleichkommen, und es muß also sein

$$P \,.\, Z_r = S_k.$$

Der Werth einer Promesse für die $k$te Ziehung ist daher:

$$10) \quad P = \frac{S_k}{Z_r}.$$

Diese Gleichung gilt, wie man sieht, für jede Ziehung und bezeichnet den Werth einer Promesse, ehe die Serienziehung erfolgt ist, wodurch die zur nächsten Gewinnziehung gelangenden Loose bezeichnet werden. Nach erfolgter Serienziehung geht der Werth der Promesse in den Mittelwerth eines Looses nach 1 §. 66 über und ist:

$$11) \quad P = \frac{S_k}{Z_k}.$$

Will der Vermiether die Auszahlung einer bestimmten Summe, wenn das Loos gewinnen sollte, ausgeschlossen haben, oder verzichtet der Käufer auf eine bestimmte Summe oder einen bestimmten Werth, so ist dies in Abzug zu bringen. Nennt man die Summe, worauf der Miether verzichtet, R, die wohl in Rücksicht auf 10 kleiner als der in der Ziehung vorkommende niederste Gewinn angenommen werden muß, so ist diese Summe mit der Zahl aller in der Ziehung mitspielenden Loose zu vervielfachen und der hiedurch entstandene Werth von S_k in 10 und 11 abzuziehen. Man erhält daher:

$$12) \quad P = \frac{S_k - Z_k R}{Z_r}; \quad 13) \quad \frac{S_k}{Z_k} - R.$$

Verzichtet der Miether auf mehrere in einer Ziehung vorkommende, niedere Gewinne, so sind diese nach den eben gemachten Bemerkungen in Rechnung zu ziehen. Heißen diese Gewinne der Reihe nach $G_1, G_2, G_3 \ldots G_m$, und die Zahl der Fälle, wie oft sie vorkommen, $F_1, F_2, F_3 \ldots . F_m$, so ist der Werth einer Promesse unter dieser Voraussetzung:

$$14) \quad P = \frac{S_k - F_1 G_1 - F_2 G_2 - \ldots . - F_m \; G_m}{Z_r}.$$

Verlangt der Vermiether Procente nach dem Zinsfuße q und für einen zwischenliegenden Zeitraum t, so ist, wenn $tq = q_1$ gesetzt wird:

$$14)\quad P = \frac{(S_k - F_1 G_1 - F_2 G_2 \ldots . - F_m G_m)\, 1{,}0\, q_1}{Z_r}.$$

Nach diesen Ansichten und Gleichungen ist die beifolgende Tafel berechnet.

Jahr.	Werth der Promesse, wenn der Käufer das Loos erhält.		Werth der Promesse, wenn er 50 Fl. abgiebt.		Werth der Promesse, wenn er auf die niederste Prämie verzichtet.		Größe der Wahrscheinlichkeit, daß ein Loos in der Ziehung der genannten Jahre erscheinen werde.
	Fl.	kr.	Fl.	kr.	Fl.	kr.	
1865 Febr.	82	32,8	32	32,8	8	45	0,13
1864 »	39	30,9	15	—	3	40,5	0,125
1863 »	27	55,6	9	23	2	31,9	0,115
1862 »	16	52,5	6	14	1	47	0,1
1861 »	12	33	4	31	1	20	0,09
1860 »	9	16,8	3	22,5	1	10,7	0,075
1859 »	6	53	2	34	1	4,5	0,06
1858 »	5	21,5	2	4	—	59,8	0,05
1857 »	4	37,8	1	46,9	—	56,5	0,045
1856 »	3	52	1	27	—	48	0,04
1855 »	1	46,7	1	—	—	52,3	0,013
1854 »	1	45	—	59,5	—	51,6	0,013
1853 »	1	43,5	—	58,6	—	50,8	0,013
1852 »	1	41,4	—	57,7	—	50,0	0,013
1851 »	1	40,5	—	56,9	—	49,3	0,013
1850 »	1	39	—	56	—	48,6	0,013
1849 »	1	37,7	—	55	—	47,9	0,013
1848 »	1	36,3	—	54,6	—	47,2	0,013
1847 »	1	35	—	53,8	—	46,6	0,013
1846 »	1	33,7	—	53,1	—	46,0	0,013
1845 Aug.	—	55,6	—	43,2	—	42,3	0,004
1845 Febr.	—	55,4	—	43	—	42,1	0,004
1844 Aug.	—	55,2	—	42,8	—	41,9	0,004
1844 Febr.	—	54,9	—	42,6	—	41,7	0,004
1843 Aug.	—	54,7	—	42,4	—	41,5	0,004
1843 Febr.	—	54,5	—	42,3	—	41,4	0,004
1842 Aug.	—	57,3	—	45,1	—	44,2	0,004
1842 Febr.	—	57,1	—	45	—	44,1	0,004
1841 Febr.	1	30	1	6	1	2,7	0,008

Das Spiel mit Promessen ist nach den hier gegebenen Entwickelungen so lange unbedenklich, als dem Käufer die gehörige Sicherheit von dem Vermiether gegeben wird, zu dem Gewinne zu gelangen, welcher auf das Loos fallen sollte. Die beste Sicherheit besteht in der temporären Auslieferung des gemietheten Looses. Ist dies nicht der Fall und giebt gar der Verkäufer mehrere Promessen auf ein und dasselbe Loos, so ist Gefahr für den Käufer vorhanden, wenn ihm nicht hinlängliche Sicherheit geleistet wird. Es ist daher mit Recht auf das Bedenkliche dieses Spieles aufmerksam zu machen, und von mehreren Staaten wurden öffentliche Warnungen hiegegen erlassen. Zudem ist dieses Spiel für den Käufer nicht einladend, denn in dem Maaße, als der Werth der Promesse nieder steht, ist auch die Hoffnung auf glücklichen Erfolg gering, wie dies aus den beigegebenen Wahrscheinlichkeiten hervorgeht:

Die von Unger in seinem Handbuch der Lotterie-Anlehen angegebenen Werthe der Promessen für die verschiedenen Ziehungszeiten stimmen mit den hier gegebenen nur theilweise überein.

Die Lotterie-Anlehen sind, wie man sieht, eine Verbindung einer Lotterie mit einer Verzinsung der in dieser Lotterie erscheinenden Loose zu einem niedern Zinsfuß, und gehören daher zu den Glücksspielen. Man hat diese Eigenschaft als Moment gegen die Zulässigkeit der Lotterie-Anlehen geltend machen wollen. Jedoch mit Unrecht. Denn wenn schon nicht in Abrede gestellt werden kann, daß die Lotterie-Anlehen diesen Charakter haben, so fehlen ihnen doch diejenigen Eigenschaften gänzlich, welche den Grund für die Verwerflichkeit der Lotterien abgeben. Hieher gehört das Aussetzen eines einzigen oder nur weniger hohen Gewinne, um zum Spiele zu verleiten, und der Verlust der ganzen Einlage in den meisten Fällen, ferner die hohen Abzüge, welche auf den Gewinnen lasten, Einkaufsgelder ꝛc. Bei einem Lotterie-Anlehen geht nicht nur die Einlage nicht verloren, sondern erhöht sich jährlich in einem mäßigen Zinsfuß. Die Lotterie-Anlehen haben daher eine in zweifacher Beziehung günstige Wirkung, indem sie einerseits denjenigen, der sich bei ihnen betheiligt, dadurch zu Ersparnissen gleichsam zwingen, weil er die Zinsen der bei ihnen niedergelegten Summe, die wegen ihrer Unbedeutendheit nicht geachtet und verausgabt werden, nicht bekommt, also auch nicht verausgaben kann; andererseits, weil sie gerade der gewöhnlichen Lotterie am entschiedensten dadurch entgegenwirken, daß sich jeder Spiellustige, wenn er anders nur einigermaßen prüft, ehe er sein Geld opfert, gewiß lieber bei einem Lotterie-Anlehen als bei einer Lotterie betheiligt. Aus diesem Grunde ist es vielmehr Sache der Staaten, die Betheiligung bei Lotterie-Anlehen zu erleichtern, anstatt zu erschweren.

Die Lotterie-Anlehen sind aber nur bei Aufnahme von größern Capitalien anwendbar und können daher nur von Staaten zur Ausführung gebracht

werden. Es sind mit den Lotterie-Anlehen manche Uebelstände verbunden, welche drückend für den Staat werden oder werden können. Diese sind: Unverrückbarkeit des einmal angenommenen Tilgungsplanes, Unveränderlichkeit des Zinsfußes, unzweckmäßige Anordnung im Tilgungsplan und hieraus sich ergebende, unverhältnißmäßige Belastung des Staates in irgend einem Zeitraum der Tilgungsperiode.

Ist einmal der Tilgungsplan festgestellt, so kann ein Staat nicht mehr hievon abgehen, auch wenn er in der günstigen Lage wäre, durch anderweitige Ueberschüsse die Tilgung des Anlehens zu beschleunigen. Wurde das Lotterie-Anlehen zu einem etwas hohen Zinsfuß aufgenommen, so entgeht dem Staate die Gelegenheit, das Fallen des Zinsfußes in seinem Vortheile zu benutzen. Hierauf möchte jedoch keine weitere Bedeutung zu legen sein, da der Zinsfuß in der neuern Zeit so weit gesunken ist, daß ein weiteres Zurückgehen nicht wohl zu erwarten steht. Am ungünstigsten für den Staat wirkt eine unzweckmäßige Anlage des Tilgungsplans, wie sich dies bei dem oben angegebenen Lotterie-Anlehen S. 168 herausstellt. Die Tilgung des Anlehens ist in den letzten Jahren den frühern gegenüber so belastend für die Staatscasse, daß ihr nur durch große disponible Summen oder, wenn diese nicht vorhanden sind, durch ein wiederholtes Anlehen entsprochen werden kann. Auf diesen Uebelstand habe ich in meiner Theorie der Lotterie-Anlehen aufmerksam gemacht und dort gezeigt, wie ihm durch zweckmäßige Anordnung abgeholfen werden kann. Hieher gehört die Tilgung der Lotterie-Anlehen durch gleichheitliche Abtragsummen, oder durch allmälig steigende Abtragsummen. Beide Tilgungsmethoden lassen sich leicht auf Lotterie-Anlehen, namentlich bei nicht zu kleinen Summen und ohne daß die Tilgungszeit zu weit ausgedehnt werden muß, anwenden, worauf ich in der angeführten Schrift schon hingewiesen habe. Die weitere Ausführung liegt außer den Grenzen dieser Schrift. In Rücksicht auf diese Momente wurde auch von der Großh. Bad. Regierung zu Anfange des Jahres 1845 ein Gesetz den Landständen vorgelegt, um ein Lotterie-Anlehen im Betrage von vierzehn Millionen zu 3,5 Proc. aufzunehmen und in gleichen oder steigenden Abtragsummen innerhalb 30 — 40 Jahren zu tilgen. Der Erfolg war so günstig, daß das Anlehen von einer aus mehreren Handelshäusern bestehenden Gesellschaft mit einem Mehrgebote von 10 Fl. 38 Kr. auf jedes 100 Fl. bei einer Tilgungszeit von 40 Jahren übernommen wurde.

Die königlich sächsische Landes-Lotterie zu Leipzig.

§. 70.

Der Plan, der hier mitgetheilt wird und im Jahre 1838 ausgegeben wurde, umfaßt die 15te königl. sächsische Lotterie zu Leipzig.

Plan

zur

15ten königl. sächsischen Landes-Lotterie zu Leipzig.

Erste Classe à 8 Thlr. Einlage.		Zweite Classe à 8 Thlr. Einlage.		Fünfte Classe à 8 Thlr. Einlage.	
Gewinne.	Thaler.	Gewinne.	Thaler.	Gewinne.	Thaler.
1 à 2000	2000	1 à 3000	3000	1 à 100000	100000
1 - 1000	1000	1 - 1000	1000	1 - 50000	50000
5 - 400	2000	5 - 400	2000	1 - 30000	30000
8 - 200	1600	8 - 200	1600	1 - 20000	20000
35 - 100	3500	35 - 100	3500	2 - 10000	20000
50 - 40	2000	50 - 50	2500	4 - 5000	20000
100 - 30	3000	100 - 40	4000	10 - 2000	20000
1300 - 20	26000	1300 - 30	39000	60 - 1000	60000
1500 Gew. betr. Thl.	41100	1500 Gew. betr. Thl.	56600	100 - 400	40000
				150 - 200	30000
				1000 - 100	100000
				9670 - 50	483500
Dritte Classe à 8 Thlr. Einlage.		**Vierte Classe à 8 Thlr. Einlage.**			
Gewinne.	Thaler.	Gewinne.	Thaler.		
1 à 4000	4000	1 à 5000	5000		
1 - 2000	2000	1 - 2000	2000		
2 - 1000	2000	2 - 1000	2000		
6 - 400	2400	6 - 400	2400		
10 - 200	2000	10 - 200	2000		
50 - 100	5000	60 - 100	6000		
130 - 60	7800	120 - 60	7200		
1300 - 40	52000	1300 - 50	65000		
1500 Gew. betr. Thl.	77200	1500 Gew. betr. Thl.	91600	11000 Gew. betr. Thlr.	973500

Einnahme.		Bilanz.	Ausgabe.	
34000 Loose à 8 Thl.	1. Cl. betr. 272000 Thl.		1500 Gew. 1. Classe betr.	41100 Thlr.
32500 » » 8 »	2. » » 260000 »		1500 » 2. » »	56600 »
31000 » » 8 »	3. » » 248000 »		1500 » 3. » »	77200 »
29500 » » 8 »	4. » » 236000 »		1500 » 4. » »	91600 »
28000 » » 8 »	5. » » 224000 »		11000 » 5. » »	973500 »
	Summa 1240000 Thl.		17000 Gewinne betragen	1240000 Thlr.

Da es hier nur darauf ankommt, die Art und Weise kennen zu lernen, wie eine solche Lotterie der Rechnung unterworfen werden kann, so ist nicht nöthig, den letzten Plan derselben vor Augen zu haben. Dies kann um so eher geschehen, da der einmal angenommene Plan bei derartigen Lotterien nicht so bald geändert wird und also wohl noch jetzt gültig sein mag.

Dem Plane sind allgemeine Bestimmungen für diese Lotterie beigegeben. Sie erstrecken sich im Allgemeinen auf Maaßregeln, welche zur Sicherheit des sich dabei betheiligenden Publikums nöthig sind. Die besondern Bestimmungen, welche dazu dienen, den vorstehenden Plan zu verstehen und die Lotterie selbst durch den Calcul zu würdigen, heben wir hervor. Sie sind in §. 1, 2 und 7 enthalten und lauten so §. 1.: »Die von Sr. Maj. dem Könige von Sachsen genehmigte und garantirte Landes-Lotterie besteht in dem gegenwärtigen 15ten Spiele aus 34000 Loosen und 17000 in 5 Classen vertheilten Gewinnen. In jeder Classe werden nur so viele Nummern gezogen, als planmäßig Gewinne vorhanden sind, und die nach Ziehung der planmäßigen 11000 Gewinne der 5ten Classe aus dem Nummerrade nicht gezogenen Loose sind *Nieten*.« §. 2: »Die Einlage beträgt auf ein ganzes Loos in jeder Classe 8 Thlr., zusammen also 40 Thlr. in preuß. Courant. Hierüber haben die Collecteurs bei jeder Classe ein Aufgeld als Schreibegebühr zu erhalten, und zwar für ein ganzes Loos Vier Groschen, für ein halbes Loos Zwei Groschen, für ein Viertel-Loos Einen Groschen und für ein Achtel-Loos 6 Pfennige. Bei Kauf-Loosen ist die Einlage und das Aufgeld der gezogenen Classen nachzuzahlen.« §. 7: »Von den Gewinnen unter 1000 Thlr. werden Zehn vom Hundert, und von Gewinnen von 1000 Thlr. und darüber Zwölf und Einhalb vom Hundert abgezogen. Desgleichen gebührt den Herren Haupt-Collecteurs, einschließlich des Antheils der etwaigen Unter-Collecteurs, ein Abzug von 9 Pfennigen von jedem Gewinnthaler.«

Obgleich diese Lotterie nur 34000 Loose aufführt, so besteht sie in der That doch aus 155000; denn in der ersten Classe spielen 34000 Loose mit, in der zweiten 32500, in der dritten 31000, in der vierten 29500, in der fünften 28000 Loose. Ein Loos, das in einer Classe erschienen ist, hat das Recht zum Mitspielen in den folgenden Classen verloren. Ein Loos, das sich nicht unter den gezogenen befindet, hat dieses Recht nicht verloren, es muß aber durch eine Einlage von 8 Thalern von neuem erworben werden, und gilt dann nur auf die nächstfolgende Ziehung. Deswegen besteht diese Lotterie aus der genannten Zahl von Loosen, wie auch die Bilanz zeigt. Der nämliche Zweck würde erreicht, wenn in der ersten Classe alle 34000 Loose gezogen, aber nur 1500 Gewinne in dem angegebenen Betrage unter sie vertheilt, und diejenigen Loose, welche nicht gewonnen haben, zu einer neuen Lotterie zurückgelegt würden u. s. w., bis endlich durch fünf Classen

die nämliche Ziehungsweise durchgeführt ist. Die Art, wie die Gewinnziehungen bei dieser Lotterie geschehen, gründet sich auf die in §. 58 aufgestellten Sätze, wobei die dort über die Sicherheit der Controlle gemachten Bemerkungen ihre Anwendung finden.

Soll nun nach den vorhin gegebenen Nachweisungen über die Zahl der in dieser Lotterie mitspielenden Loose der Kaufwerth eines Looses bestimmt werden, so hat man die auf alle Gewinne zu vertheilende Summe durch die Zahl aller Loose zu theilen. Wird derselbe P genannt, so ist:

$$1)\quad P = \frac{1240000}{155000}\ \text{Thlr.} = 8\ \text{Thlr.}$$

und das Loos jeder Classe wird sofort auch mit 8 Thlr. bezahlt. Will daher jemand, der in den frühern Classen nicht mitspielte, sich in einer spätern Classe betheiligen, so muß er 8 Thlr. für ein Loos dieser Classe und so viel mal 8 Thlr. nachzahlen, als Classen durchgespielt sind, denn jedes in der Lotterie vorhandene Loos wird als ein solches angesehen, das in den frühern Classen mitgespielt, aber nichts gewonnen und den Eintritt in jede spätere Classe durch 8 Thlr. zu erwerben hat.

Anders stellt sich die Sache, wenn der mittlere Werth bestimmt werden soll, welchen ein Loos in den verschiedenen Classen hat.

In der ersten Classe spielen 34000 Loose, welche 1500 Gewinne, deren Gesammtsumme 41100 Thlr. beträgt, unter sich zu vertheilen haben. Hiernach ist der Erwartungswerth (E_1) für ein in der ersten Classe mitspielendes Loos:

$$2)\quad E_1 = \frac{41100}{34000}\ \text{Thlr.} = 1{,}2088..\ \text{Thlr.} = 1\ \text{Thlr. } 6\ \text{Sgr. } 3^{3}/_{17}\ \text{Pf.}$$

In der zweiten Classe spielen 32500 Loose. Die Summe der unter sie zu vertheilenden Gewinne beträgt 56600 Thlr. Der Erwartungswerth (E_2) eines Looses, welches in der zweiten Classe mitspielt, ist hiernach:

$$3)\quad E_2 = \frac{56600}{32500}\ \text{Thlr.} = 1{,}7415..\ \text{Thlr.} = 1\ \text{Thlr. } 22\ \text{Sgr. } 2^{62}/_{65}\ \text{Pf.}$$

Der Erwartungswerth eines Looses der dritten Classe, worin auf 31000 Loose 77200 Thlr. als Gewinne vertheilt werden, ist:

$$4)\quad E_3 = \frac{77200}{31000}\ \text{Thl.} = 2{,}49032..\ \text{Thlr.} = 2\,\text{Thlr. } 14\ \text{Sgr. } 8^{16}/_{31}\ \text{Pf.}$$

Der Erwartungswerth eines Looses, das in der vierten Classe spielt, ist:

$$5)\quad E_4 = \frac{91600}{29500}\ \text{Thlr.} = 3{,}1050..\ \text{Thlr.} = 3\ \text{Thlr. } 3\ \text{Sgr. } 1^{49}/_{59}\ \text{Pf.}$$

Der Erwartungswerth eines in der fünften Classe spielenden Looses ist:

$$6)\quad E_5 = \frac{973500}{28000}\ \text{Thlr.} = 34{,}7678..\ \text{Thlr.} = 34\ \text{Thlr. } 23\ \text{Sgr. } {}^{3}/_{7}\ \text{Pf.}$$

Hieraus gewinnt man folgende Zusammenstellung:

E_1	=	1	Thlr.	6	Sgr.	3,1764..	Pf.	=	1,2088..	Thlr.
E_2	=	1	»	22	»	2,9538..	»	=	1,7415..	»
E_3	=	2	»	14	»	8,5161..	»	=	2,4903..	»
E_4	=	3	»	3	»	1,8305..	»	=	3,1050..	»
E_5	=	34	»	23	»	0,4285.	»	=	34,7678..	»
7) E	=	43	Thlr.	9	Sgr.	4,9055..	Pf.	=	43,3136..	Thlr.

Der Erwartungswerth eines Looses steht um so höher, je später die Classe ist, welcher es angehört. Wer ein Loos aus einer der vier ersten Classen kauft, giebt eine höhere Summe für die Waare, als sie werth ist. Hiedurch erhält die Bank Ueberschüsse aus den Einkäufen in die ersten Classen, welche dazu dienen, den bedeutend höhern Werth eines Looses der fünften Classe hervorzubringen. Man kann nun aus den vorstehenden Erwartungswerthen den durchschnittlichen Erwartungswerth eines Looses für jede Classe bestimmen. Er ist:

8) $E = \frac{43{,}3136..}{5}$ Thlr. = 8,6627... Thlr. = 8 Thlr. 19 Sgr. 10,574.. Pf.

Ein Loos hat hiernach einen höhern Erwartungswerth als sein Kaufwerth ist. Dies ist der günstigen Anlage der Lotterie zuzuschreiben, wornach die Loose der ersten Classe theurer sind, als sie sein sollten und das Loos im Ganzen wohlfeiler gestellt werden kann. Dieses Resultat ist jedoch nur nach dem ersten Blicke günstig und in der That nur als ein nominelles zu bezeichnen, denn wenn man die Loose um die angegebenen Werthe für die verschiedenen Classen verkaufen wollte, so ergäbe sich folgende Bilanz:

34000	Loose der	1sten	Classe à	1,208..	Thlr.	betragen.. 41100 Thlr.
32500	»	» 2ten	»	» 1,741..	»	» 56600 »
31000	»	» 3ten	»	» 2,490..	»	» 77200 »
29500	»	» 4ten	»	» 3,105..	»	» 91600 »
28000	»	» 5ten	»	» 34,767..	»	» 973500 »

Auf diesem Wege würde die nämliche Summe, wie vorhin, nämlich 1240000 Thlr., gewonnen. Die Vertheilung der Beiträge durch die Classen wäre weniger zweckmäßig als die vorige und der Vortheil der Bank weniger bedacht. Bei der Einrichtung der Classen-Lotterien ist es aber nicht gleichgültig, wie die Beiträge erhoben werden, und es ist dabei die Aufgabe zu lösen: auf welche Weise müssen die Kaufwerthe der Loose für die einzelnen Classen angesetzt werden, um der Bank den günstigsten Erwartungswerth zu sichern? Daß diese Frage nicht bedeutungslos ist, zeigt der vorliegende Fall.

Obgleich sich der Erwartungswerth eines Looses nach 7 und 8 günstiger als der Kaufwerth herausstellt, so steht doch der wahre Erwartungs- und Kaufwerth eines Looses bei weitem niederer als die in 1, 7 und 8 angegebenen Werthe, wenn man die Abzüge in Rechnung bringt, welche die Bank von den

Gewinnen in Anspruch nimmt. Außer 10 und 12,5 Proc., welche der Bank von niedern oder höhern Gewinnen zufallen, werden noch 9 Pfennige oder $^3/_4$ Sgr. von jedem Gewinnthaler für die Collecteurs in Abzug gebracht. Dieser Abzug beträgt von 100 Thlr. 100.$^3/_4$ Sgr. = 75 Sgr. = 2,5 Thlr. oder 2,5 Proc. Bringt man dies in Rechnung, so werden von 1000 Thlr. und darüber 15 Proc., von Summen unter 1000 Thlr. aber 12,5 Proc. abgezogen. Diese Bemerkungen führen zu folgenden Resultaten. Für die erste Classe ergiebt sich ein Abzug von:

15 Proc. wegen 3000 Thlr. mit $\frac{3000.15}{100} = 450$ Thlr.

12,5 » » 38100 » » $38100 . \frac{125}{1000} = 4762{,}5$ Thlr.

Hieraus ergiebt sich ein Abzug von 5212,5 Thlr., und der Erwartungswerth eines Looses der ersten Classe ist:

9) $E_1 = \frac{41100 - 5212{,}5}{34000} = \frac{35887{,}5}{34000} = 1$ Thlr. 1,6654.. Sgr.

In der zweiten Classe ergiebt sich ein Abzug von:

15 Proc. wegen 4000 Thlr. mit $\frac{4000.15}{100} = 600$ Thlr.

12,5 » » 52600 » » $\frac{52600.125}{1000} = 6575$ Thlr.

Der Abzug beträgt sofort 7175 Thlr., und der Erwartungswerth eines Looses der zweiten Classe ist:

10) $E_2 = \frac{56600 - 7175}{32500} = \frac{49425}{32500} = 1$ Thlr. 15,6230 . . Sgr.

Von den Gewinnen der dritten Classe wird abgezogen:

15 Proc. wegen 8000 Thlr. mit $\frac{8000.15}{100} = 1200$ Thlr.

12,5 » » 692000 » » $\frac{69200\,125}{1000} = 8650$ Thlr.

Der Erwartungswerth eines Looses der dritten Classe ist bei einem Abzug von 9850 Thalern:

11) $E_3 = \frac{77200 - 9850}{31000} = \frac{67350}{31000}$ Thlr. = 2 Thlr. 5,1774.. Sgr.

Von den Gewinnen der vierten Classe wird abgezogen:

15 Proc. wegen 9000 Thlr. mit $\frac{9000.15}{100} = 1350$ Thlr.

12 » » 82600 » » $\frac{82600.125}{1000} = 10325$ Thlr.

Der Abzug beträgt 11675 Thlr. Hieraus ist der Erwartungswerth eines Looses der vierten Classe:

12) $E_4 = \frac{91600 - 11675}{295000} = \frac{79925}{29500}$ Thlr. = 2 Thlr. 21,2796...Sgr.

Von den Gewinnen der fünften Classe wird abgezogen:

15 Proc. wegen 320000 Thlr. mit $\frac{320000.15}{100} = 48000$ Thlr.

12,5 » » 653500 » » $\frac{653500.125}{1000} = 81687{,}5$ Thlr.

Aus dem Gesammt-Abzug von 129687,5 Thlrn. ergiebt sich der Erwartungswerth eines Looses der fünften Classe:

13) $E_5 = \frac{973500 - 129687{,}5}{28000} = \frac{843812{,}5}{28000} = 30$ Thlr. 4,0848...Sgr.

Diese Resultate führen zu folgender Zusammenstellung der Erwartungswerthe:

$E_1 =$ 1 Thlr. 1,6654.. Sgr.
$E_2 =$ 1 » 15,6230.. »
$E_3 =$ 2 » 5,1774.. »
$E_4 =$ 2 » 21,2796.. »
$E_5 =$ 30 » 4,0848.. »

14) $E =$ 37 Thlr. 17,8304.. Sgr.

Der Erwartungswerth eines Looses stellt sich demnach auf 37 Thaler 17,83.. Sgr. und hiernach niederer als in 7. Er steht jedoch noch um ein Bedeutendes höher als der wirkliche Werth, wie sich aus Folgendem zeigen wird.

Die Summe aller Abzüge theilt sich nämlich zwischen die Bank und die Collecteure. Da für die Collecteure ohne Unterschied der Summen $2\frac{1}{2}$ Proc. abgezogen werden, so ergeben sich hiernach folgende Abzüge aus der

1sten	Classe	für	die	Bank	4185	Thlr.,	für	die	Coll.	1027,5	Thlr.
2ten	»	»	»	»	5760	»	»	»	»	1415	»
3ten	»	»	»	»	7920	»	»	»	»	1930	»
4ten	»	»	»	»	9385	»	»	»	»	2290	»
5ten	»	»	»	»	105350	»	»	»	»	24337,5	»
				Summe	132600	Thlr.				31000	Thlr.

Die Summe aller Abzüge ist daher 163600 Thlr. Hiernach wird an die gewinnenden Personen ausgezahlt:

$S = 1240000 - 163600 = 1076400$ Thlr.

Diese Summe haben daher alle Theilnehmer zu erhalten, denn der Abzug muß von allen getragen werden. Sie vertheilt sich daher auf 155000 Looſe. Somit ist der wahre Werth eines Looses:

$E = \frac{1076400}{155000} = 6$ Thlr. 28,33548 . . Sgr.

Der Kaufwerth eines Looses, welches durch alle Classen spielt, ist daher:

$P =$ 34 Thlr. 21,6774 . . Sgr.

Kauft nun jemand ein ganzes Loos, um damit alle Classen durchzuspielen, so hat er noch ein Aufgeld von 4 Groschen als Schreibegebühr für jede Classe zu entrichten und tritt sofort mit einem Werth von 40 Thlr. 20 Gr. in einen wirklichen Werth von 34 Thlr. 21,677.. Sgr. ein.

§. 71.

Außer den im vorigen §. gemachten Betrachtungen lassen sich noch folgende über die Hoffnung, in dieser Lotterie zu gewinnen, anstellen. Kauft jemand ein Loos für die erste Classe, so gilt für ihn die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen $w_1 = \frac{1500}{34000} = \frac{3}{68}$, die zu verlieren $u_1 = \frac{32500}{34000} = \frac{65}{68}$. Hiernach hat jemand Hoffnung, einmal in 22 Fällen zu gewinnen. Setzt jemand in diese Classe, so sollte nach 3 §. 56 der zu hoffende Gewinn das $\frac{68}{3}$fache des Einsatzes, also, da er 8 Thlr. setzt, $\frac{68.8}{3} = 181\frac{1}{3}$ Thlr. betragen. Er beträgt aber nach 2 §. 70 nur 1,208.. Thlr. Vergleicht man Einnahme und Ausgabe für das Spiel in der ersten Classe mit einander, so ist der Ueberschuß, welchen die Bank in Casse für die spätern Classen behält:

$$1)\quad R_1 = 34000.8 - 41100 = 230900 \text{ Thlr.}$$

Kauft jemand, der in der ersten Classe nicht gewonnen hat, ein Loos für die zweite, so ist für ihn die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen $w_2 = \frac{1500}{32500} = \frac{3}{65}$, die zu verlieren $u_2 = \frac{31000}{32500} = \frac{62}{65}$. Er hat hiernach die Hoffnung, einmal ungefähr in 21 Fällen zu gewinnen. Der für ihn zu hoffende Gewinn sollte daher das $\frac{65}{3}$fache des Einsatzes und somit, da er 8 Thlr. setzt, $\frac{65.8}{3} = 173\frac{1}{3}$ Thlr. betragen. Der Erwartungswerth ist 1,7415.. Thlr. nach 3 §. 70. Die Vergleichung der Einnahme und Ausgabe, welche sich für die Bank aus der zweiten Classe ergiebt, führt zu der Summe:

$$2)\quad R_2 = 32500.8 - 56600 = 203400 \text{ Thlr.}$$

Setzt man diese Schlüsse fort, so ergeben sich der Reihe nach für die Wahrscheinlichkeiten in der dritten, vierten und fünften Classe zu gewinnen und zu verlieren folgende Werthe:

$$w_3 = \frac{1500}{31000} = \frac{3}{62}; \quad u_3 = \frac{29500}{31000} = \frac{59}{62}$$

$$w_4 = \frac{1500}{29500} = \frac{3}{59}; \quad u_4 = \frac{28000}{29500} = \frac{56}{59}$$

$$w_5 = \frac{11000}{28000} = \frac{11}{28}; \qquad u_5 = \frac{17000}{28000} = \frac{17}{28}$$

Wer in diesen Classen spielt, hat nach 3 §. 56 nachstehende Gewinne zu hoffen:

In der 3ten Classe den $\frac{62}{3}$fachen Einsatz oder $\frac{62.8}{3} = 165\frac{1}{3}$ Thlr.

4ten » $\frac{59}{3}$ » » » $\frac{59.8}{3} = 157\frac{1}{3}$ Thlr.

5ten » $\frac{28}{11}$ » » » $\frac{28.8}{11} = 20\frac{4}{11}$ Thlr.

Die Bank behält daher aus der dritten Classe einen Ueberschuß von:

3) $R_3 = 31000.8 - 77200 = 170800$ Thlr.

aus der vierten Classe:

4) $R_4 = 29500.8 - 91600 = 144400$ Thlr.

aus der fünften Classe:

5) $R_5 = 28000.8 - 973500 = -749500$ Thlr.

Sie hat daher in der letzten Classe 749500 Thlr. mehr auszugeben, als für dieselbe eingenommen. Diese müssen den Ueberschüssen aus den vier vorhergehenden Classen gleichkommen. Hiernach hat man folgende Zusammenstellung für den Ueberschuß aus dem Ertrage der

Loose der ersten Classe	230900	Thlr.
» » zweiten »	203400	»
» » dritten »	170800	»
» » vierten »	144400	»
Summe der Ueberschüsse aus den vier ersten Classen	749500	Thlr.

Die Bank giebt daher in der letzten Classe gerade so viel mehr aus, als der Ueberschuß der Einnahmen aus den vier ersten Classen beträgt. Hieraus hat also die Bank keinen directen Vortheil. Sie kann ihn nur aus temporärer Benutzung der eingegangenen Beiträge schöpfen, denn sie kann den Ueberschuß von 230900 Thlr. aus der ersten Classe fünf Monate, den von 203400 Thlr. aus der zweiten Classe ungefähr vier Monate lang u. s. w. benutzen. Dies ist ein nicht unbedeutender Vortheil an einem großen Geldmarkte. Hiezu kommt noch die bei dieser Lotterie bestehende Einrichtung, gleiche Beiträge für alle Classen zu erheben, welche zur Theilnahme anlockt. Würde man die Beiträge nach der im vorigen §. gegebenen Methode erheben, so fiele dieser Reiz beinahe ganz und der ziemlich hohe Beitrag für den Eintritt in die letzte Classe, worin die Hauptgewinne erscheinen, würde eher von der Theilnahme abschrecken, als anlocken.

Schließlich soll nun noch das Verhältniß gezeigt werden, worin die Aussicht auf Gewinn zu der auf Verlust steht. Zu dem Ende wird nöthig, die Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, gerade in der ersten, zweiten, dritten

Classe u. s. w. zu gewinnen. Die Wahrscheinlichkeit, gerade in der ersten Classe zu gewinnen, ist, wie oben bemerkt wurde:

$$6)\quad w = \frac{3}{68}$$

Die Wahrscheinlichkeit, gerade in der zweiten Classe zu gewinnen, setzt voraus, daß man in der ersten verloren habe. Sie ist daher:

$$7)\quad w = u_1 \,.\, w_2 = \frac{65}{68} \cdot \frac{3}{65} = \frac{3}{68}$$

Die Wahrscheinlichkeit, gerade in der dritten Classe zu gewinnen, setzt voraus, daß man in den beiden ersten verloren habe. Sie ist:

$$8)\quad w = u_1 \,.\, u_2 \,.\, w_3 = \frac{65}{68} \cdot \frac{62}{65} \cdot \frac{3}{62} = \frac{3}{68}$$

Setzt man diese Schlüsse fort, so ist die Wahrscheinlichkeit, gerade in der vierten Classe zu gewinnen:

$$9)\quad w = u_1 \,.\, u_2 \,.\, u_3 \,.\, w_4 = \frac{65}{68} \cdot \frac{62}{65} \cdot \frac{59}{62} \cdot \frac{3}{59} = \frac{3}{68}$$

Diejenige, gerade in der fünften zu gewinnen:

$$10)\quad w = u_1 \,.\, u_2 \,.\, u_3 \,.\, u_4 \,.\, w_5 = \frac{65}{68} \cdot \frac{62}{65} \cdot \frac{59}{62} \cdot \frac{56}{59} \cdot \frac{11}{28} = \frac{22}{68}$$

Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit für jemand, welcher mit einem Loose durch alle Classen bis zu seinem Erscheinen fortzuspielen gedenkt, aus 6—10:

$$11)\quad w = \frac{3}{68} + \frac{3}{68} + \frac{3}{68} + \frac{3}{68} + \frac{22}{68} = \frac{1}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen steigt also höchstens auf $^1/_2$. Hieraus leiten sich nun die Wahrscheinlichkeiten zu verlieren ab. Die Wahrscheinlichkeit, daß jemand in der ersten Classe verlieren, also daß er wenigstens 8 Thlr. ausgeben werde, ist $\frac{65}{68}$; die Wahrscheinlichkeit, daß er in den beiden ersten Classen verlieren, also wenigstens 16 Thlr. ausgeben werde, ist $u_2 = \frac{65}{68} \cdot \frac{62}{65} = \frac{62}{68}$; die Wahrscheinlichkeit, daß er in den drei ersten Classen verlieren, als wenigstens 24 Thaler ausgeben werde, ist $u_3 = \frac{65}{68} \cdot \frac{62}{65} \cdot \frac{59}{62} = \frac{59}{68}$; die Wahrscheinlichkeit, daß er in den vier ersten Classen verlieren, also wenigstens 32 Thaler ausgeben werde, ist $u_4 = \frac{65}{68} \cdot \frac{62}{65} \cdot \frac{59}{62} \cdot \frac{56}{59} = \frac{56}{68}$; die Wahrscheinlichkeit, daß er in allen fünf Classen verlieren, also 40 Thaler ausgeben werde, ist: $u_5 = \frac{65}{68} \cdot \frac{62}{65} \cdot \frac{59}{62} \cdot \frac{56}{59} \cdot \frac{17}{28} = \frac{34}{68} = \frac{1}{2}$. Hiernach sind die

Wahrscheinlichkeiten in den verschiedenen Classen zu verlieren der Reihe nach

$$\frac{65}{68}, \frac{62}{68}, \frac{59}{68}, \frac{56}{68}, \frac{1}{2}.$$

Die correspondirenden Wahrscheinlichkeiten, in diesen Classen zu gewinnen, sind der Reihe nach:

$$\frac{3}{68}, \frac{3}{68}, \frac{3}{68}, \frac{3}{68}, \frac{22}{68}.$$

Die Wahrscheinlichkeiten, daß jemand entweder 8, oder 16, oder 24, oder 32, oder 40 Thlr. werde ausgeben müssen, sind der Reihe nach:

$$\frac{65}{68}, \frac{62}{68}, \frac{59}{68}, \frac{56}{68}, \frac{34}{68}.$$

Wer in dieser Lotterie spielt, kann entweder in irgend einer Classe, oder gar nicht gewinnen. Einer dieser Fälle wird eintreten. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist:

$$w = \frac{3}{68} + \frac{3}{68} + \frac{3}{68} + \frac{3}{68} + \frac{22}{68} + \frac{34}{68} = 1.$$

Man sieht aus dieser Zusammenstellung, wie ungünstig die Aussicht auf Gewinn sich zu der auf Verlust verhält, und daß die Wahrscheinlichkeiten zu verlieren größer als $1/2$ sind und höchstens bis auf diesen Werth sinken, und daß dagegen die zu gewinnen kleiner als $1/2$ sind und höchstens sich bis zu diesem Werthe erheben. Schenkt man diesen Bemerkungen Rücksicht und bedenkt die nicht unbedeutenden Abzüge, welche auf den auszuzahlenden Gewinnen lasten, so wird jedem, der sein Glück versuchen will, zu rathen sein, sich besser bei einem Lotterie-Anlehen zu betheiligen, wobei keine Gefahr auf Verlust der ganzen Einlage zu fürchten ist, wo alle zusammengetragenen Summen sammt Zinsen und Zinses-Zinsen, ohne Abzüge, den Theilnehmern zu gut kommen, und wobei nicht immer so große Einlagen nöthig sind, als bei Classen-Lotterien.

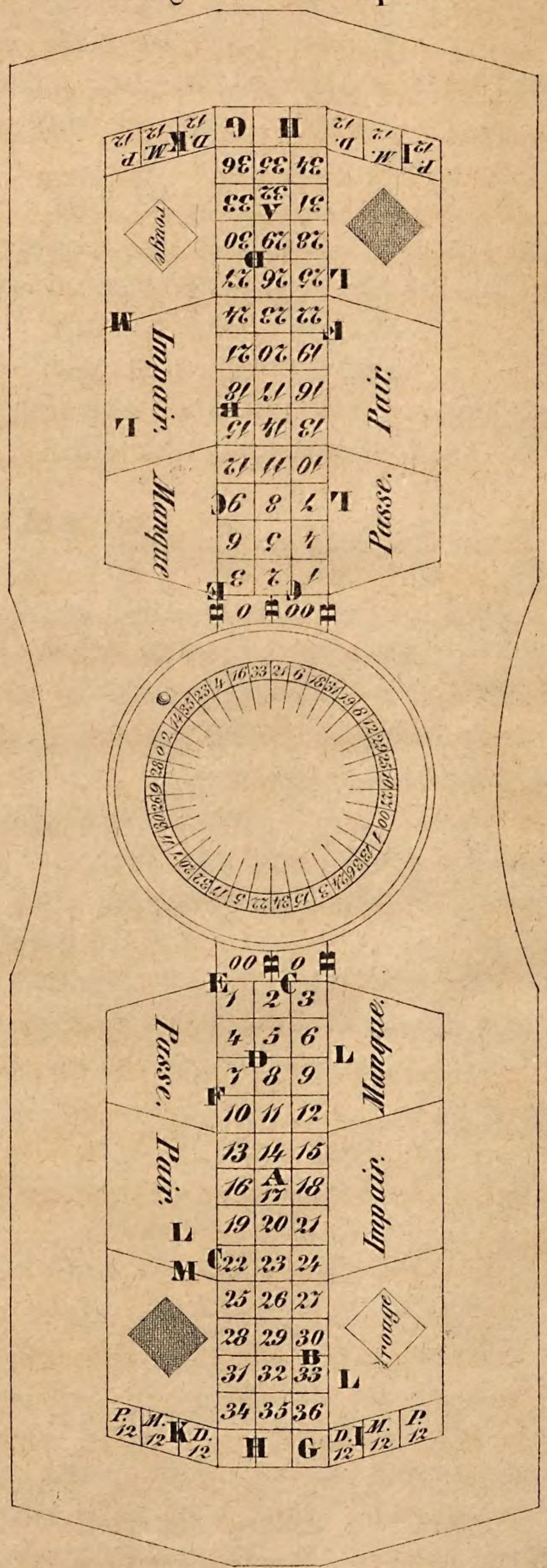
Das Roulette-Spiel.

---

§. 72.

Dieses in Bädern beliebte Spiel wird auf folgende Art gespielt. In einer Vertiefung ist eine kreisrunde Scheibe so angebracht, daß sie sich um ihren Mittelpunkt horizontal drehen läßt. An ihrem Rande befinden sich 38 Fächer, die mit den Zahlen von 1 — 36 nebst der einfachen (0) und der

Abbildung des Roulettespieles.



Die darauf befindlichen alphabetischen Zeichen gehen die Einsatzstellen an.

doppelten Null (00) in ganz willkürlicher Ordnung bezeichnet sind (s. die nebenstehende Zeichnung). Die Scheibe ist von einem sich allmälig erhebenden, nicht beweglichen Rande umschlossen, auf welchem eine kleine Kugel in Bewegung gesetzt werden kann, die bei abnehmender Geschwindigkeit über den abschüssigen Theil des Randes herabgleitet, in eines der 38 Fächer der Scheibe fällt und darin liegen bleibt. Bei dem Beginne des Spiels wird die kreisrunde Scheibe in einer bestimmten Richtung gedreht und die Kugel auf dem unbeweglichen Rande in der entgegengesetzten fortgestoßen, bis sie endlich erlahmt und in irgend ein Fach fällt. Ist die Kugel in ein bestimmtes Fach gefallen, so ist das Spiel entschieden, und diejenige Zahl hat gewonnen, welche dem Fache aufgeschrieben ist. Der Croupier ruft die gewinnende Zahl laut aus. Derjenige Spieler, welcher diese Zahl besetzt hat, erhält die ausgesetzte Summe selbst und noch 35mal von der Bank, also den 36fachen Einsatz zurück.

Mit diesem Spiele sind nun noch mehrere Abänderungen verbunden. Die eine Hälfte der 38 Zahlen ist mit Roth (rouge), die andere mit Schwarz (noir) bezeichnet. Folgende Zahlen sind roth: 0, 1, 3, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 36; folgende schwarz: 00, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35. Ferner sind die Zahlen eingetheilt in Gerade (pair) und Ungerade (impair), in Passe und Manque. Die einfache Null (0) ist mit Roth bezeichnet und wird als Ungerade (impair) betrachtet; die doppelte Null (00) ist mit Schwarz bezeichnet und wird zu Gerade (pair) gerechnet. Die einfache Null und die Zahlen von 1 bis 18 bilden Manque (erste Hälfte), die doppelte Null und die Zahlen von 19—36 bilden Passe (zweite Hälfte).

Kommt eine Zahl heraus, die mit Roth bezeichnet ist, so gewinnt der auf Roth stehende Einsatz, während der auf Schwarz stehende verliert. Dasselbe gilt umgekehrt von Schwarz. Kommt eine Zahl heraus, die zu Gerade gerechnet wird, so gewinnt der auf Gerade stehende Satz, während der auf Ungerade stehende verliert und umgekehrt. Kommt eine von den Zahlen 1—18 heraus, so gewinnt der auf Manque stehende Einsatz, der auf Passe stehende ist verloren. Kommt eine von den Zahlen 19—36 heraus, so gewinnt der auf Passe stehende Satz; der auf Manque stehende ist verloren.

In den eben genannten Fällen (Roth und Schwarz, Gerade und Ungerade, Passe und Manque) wird der Einsatz von der Bank einfach ausgezahlt. Der Spieler erhält also den Einsatz doppelt zurück, wenn er gewinnt.

Erscheint die einfache Null (Roth, Ungerade, Manque), so gewinnt der auf dieser Zahl stehende Einsatz, während alle andern Einsätze verloren gehen, ausgenommen Roth, Ungerade, Manque, welche weder gewinnen noch verlieren; während sie doch, als zum eingetroffenen Falle gehörig, gewinnen

sollten. Erscheint die Doppel-Null, so gewinnt der auf dieser Zahl stehende Einsatz, alle anderen Einsätze gehen verloren, mit Ausnahme von Schwarz, Gerade und Passe, die, obgleich sie gewinnen sollten, weder gewinnen noch verlieren. In beiden Ausnahmsfällen erhalten die Spieler den Einsatz zurück.

Außer diesen vier Arten kann noch auf folgende gespielt werden. Auf zwei Zahlen (à cheval), auf drei (transversale pleine), auf vier (carré), auf fünf (transversale à cinq numéros), auf sechs (transversale à six numéros), unten an einer Colonne (bas de colonnes), zwischen zwei Colonnen (entre deux colonnes), auf die 12 ersten (sur les numéros dits 12 premiers), 12 mittlern (ceux dits du milieu), 12 letzten (ceux dits 12 derniers), auf 24 Zahlen (sur 24 numéros).

Man spielt auf zwei, wenn man auf eine Linie setzt, welche zwei Zahlen trennt. Der Einsatz wird 18mal (17mal von der Bank nebst dem Einsatz) an den Spieler ausgezahlt, wenn eine der Zahlen herauskommt, welchen der Einsatz gilt. Der Buchstabe (B) deutet in der Figur die hierher gehörigen Einsatzstellen an.

Man spielt auf drei: a) wenn man auf die Außenlinie von je drei Zahlen, oder b) auf den Punkt der Linie setzt, welche die Doppel-Null von den Zahlen 1 und 2, die einfache Null von den Zahlen 2 und 3 oder die Zahl 2 von der einfachen und Doppel-Null trennt. Der Buchstabe (C) deutet die genannten Fälle an. Erscheint eine von den drei besetzten Ziffern, so wird der Einsatz zwölfmal dem Gewinner zurückbezahlt.

Man spielt auf vier, wenn man den Durchschnittspunkt zweier Linien besetzt, welche vier Zahlen von einander trennen. Der Buchstabe D deutet einen solchen Fall an. Erscheint eine von den vier besetzten Zahlen, so wird der Einsatz dem Spieler neunmal zurückgegeben.

Man spielt auf fünf, wenn man auf einen der Endpunkte der Querlinie setzt, welche die Zahlen 1, 2, 3 von der einfachen und doppelten Null trennt. Der Buchstabe E zeigt diesen Punkt an. Erscheint eine dieser fünf Ziffern, so bekommt der Spieler den siebenfachen Einsatz zurück.

Man spielt auf sechs, wenn man auf einen Punkt setzt, wo eine Querlinie eine der Außenlinien durchschneidet. Der Buchstabe F deutet einen solchen Fall an. Erscheint eine dieser sechs besetzten Nummern, so wird der Einsatz sechsmal zurückgezahlt.

Man spielt unten an einer Colonne, wenn man in eines der leeren Felder unten an den Zahlenreihen setzt. Der Buchstabe G zeigt ein solches an. Kommt eine von den Zahlen, welche in der darüber befindlichen Colonne eingeschrieben sind (die beiden Nullen ausgenommen), heraus, so gewinnt man den dreifachen Einsatz.

Unter den gleichen Bedingungen werden die 12 ersten, 12 mittlern, 12

letzten Zahlen gespielt. Auch hier wird der dreifache Einsatz ausgezahlt, wenn eine der besetzten Zahlen erscheint.

Man spielt auf 24 Zahlen, oder zwischen zwei Colonnen, wenn man auf eine Linie setzt, welche zwei von den untersten Feldern von einander trennt. Die Buchstaben H und K deuten solche Fälle an. Der Einsatz wird ein- und einhalbmal (die Hälfte von der Bank) ausgezahlt, und es muß wenigstens die doppelte niederste Einsatz-Summe vom Spieler ausgesetzt werden.

Dies sind die Regeln, welche für das Roulette-Spiel in Baden-Baden bestehen. Vergleicht man nun die Summen, welche von der Bank dem Spieler ausgezahlt werden, mit denen, welche nach den in §. 56 aufgestellten Gesetzen gezahlt werden sollen, so zeigt sich der Vortheil, worin die Bank dem Spieler gegenüber steht.

Nach 3 §. 56 sollte dem Spieler, der auf Roth oder Schwarz setzt, der Einsatz $\frac{38}{18} = 2\frac{1}{19}$mal zurückgegeben werden, ebenso bei Gerade und Ungerade, bei Passe und Manque. Dem Spieler auf eine bestimmte Zahl (en plein) sollte der Einsatz 38mal, auf zwei Zahlen (à cheval) $\frac{38}{2} = 19$ mal; auf drei $\frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}$mal; auf vier $\frac{38}{4} = 9\frac{1}{2}$mal; auf fünf $\frac{38}{5} = 7\frac{3}{5}$mal; auf sechs $\frac{38}{6} = 6\frac{2}{3}$mal; unten an einer Colonne, oder auf die 12 ersten, 12 mittlern, 12 letzten Zahlen $\frac{38}{12} = 3\frac{1}{6}$mal; zwischen zwei Colonnen oder auf 24 Zahlen $\frac{38}{24} = 1\frac{7}{12}$mal zurückbezahlt werden (den Einsatz des Spielers mit eingerechnet), denn die Wahrscheinlichkeiten, in den genannten Fällen zu gewinnen, sind, wie sich leicht ergiebt:

$$\frac{18}{38}, \frac{1}{38}, \frac{2}{38}, \frac{3}{38}, \frac{4}{38}, \frac{5}{38}, \frac{6}{38}, \frac{12}{38}, \frac{24}{38}$$

Wie groß nun der hieraus sich für die Bank ergebende Vortheil ist, wird sich im folgenden §. zeigen.

§. 73.

Der Vortheil der Bank bei den verschiedenen Abänderungen des Roulette-Spieles ist folgender:

a) Bei Roth und Schwarz.

Die Bank hat keinen Vortheil bei Roth und Schwarz, so lange eine der Zahlen 1 bis 36 herauskommt. Trifft aber die Kugel auf die einfache Null (Roth), so verliert, wer auf Schwarz gesetzt hat, und wer auf Roth gesetzt hat, gewinnt nicht, während er gewinnen sollte. Hier ergiebt sich ein Vor-

theil für die Bank. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel gerade die einfache Null treffen werde, ist $w = \frac{1}{38}$. In diesem Falle erhält die Bank die ganze auf Schwarz gesetzte Summe als reinen Gewinn. Nennt man die Summe der Einsätze a, so ist der Vortheil der Bank in diesem Falle $V_1 = \frac{a}{38}$.

Kommt die Doppel-Null (Schwarz) heraus, so tritt der umgekehrte, aber ganz gleiche Fall ein, denn wer auf Roth setzte, verliert, wer auf Schwarz setzte, gewinnt nicht. Nennt man auch hier die auf Roth gesetzte Summe a, so ist der hieraus sich ergebende Vortheil, da die Wahrscheinlichkeit der oben angegebenen gleichkommt, $V_2 = \frac{a}{38}$.

Der Vortheil der Bank bei Roth und Schwarz begreift die beiden genannten Fälle in sich und ist daher:

$$1) \quad V = V_1 + V_2 = \frac{2a}{38} = a \,.\, 0{,}05263157 \ldots$$

b) Bei Gerade und Ungerade:

Die Bank hat keinen Vortheil, so lange eine der Zahlen von 1—36 herauskommt. Erscheint die einfache Null (Ungerade), so geht der auf Gerade stehende Einsatz verloren, während der Spieler, welcher auf Gerade setzte, nicht gewinnt, ob er gleich gewinnen sollte. Die Bank kann daher in diesem Falle nicht verlieren, sondern nur gewinnen. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel gerade die einfache Null treffe, ist $w = \frac{1}{38}$. Die Bank erhält die auf Gerade gesetzte Summe (a) als reinen Gewinn. Ihr Vortheil ist in diesem Falle: $V_1 = \frac{a}{38}$.

Erscheint die Doppel-Null (Gerade), so geht die auf Ungerade ausgesetzte Summe für die Spieler verloren, und der Vortheil, welcher sich hieraus ergiebt, findet sich auf die eben angegebene Weise und ist: $V_2 = \frac{a}{38}$.

Der Vortheil der Bank in Beziehung auf Gerade und Ungerade ist sofort:

$$2) \quad V = V_1 + V_2 = \frac{2a}{38} = a \,.\, 0{,}05263 \ldots$$

c) Bei Passe und Manque:

Auf ganz gleiche Weise, wie in den unter a und b betrachteten Fällen ergiebt sich der Vortheil der Bank in Beziehung auf Passe und Manque:

$$3) \quad V = \frac{2a}{38} = a \,.\, 0{,}05263 \ldots$$

In den unter a, b und c angegebenen Fällen beträgt der Vortheil der Bank 5,263157... Proc.

Der Vortheil der Bank in den noch übrigen Fällen soll dadurch bestimmt werden, daß wir die Aussicht der Bank auf Gewinn (Werth der Erwartung) mit der Aussicht des Spielers auf Gewinn (Werth der Erwartung) nach §. 56 ermitteln und beide mit einander vergleichen, woraus sich sofort der Vortheil auf der einen oder andern Seite ergeben wird.

d) Bei einer bestimmten Zahl (en plein):

Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist für einen Spieler, der eine bestimmte Zahl mit der Summe a besetzt, $w = \frac{1}{38}$. In diesem Fall erhält er als Gewinn den 35fachen Einsatz von der Bank ausgezahlt. Der Werth seiner Erwartung ist sofort:

$$E_1 = \frac{1}{38} \cdot 35\, a.$$

Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist für die Bank, welcher die von dem Spieler nicht besetzten 37 Zahlen zugehören, $w = \frac{37}{38}$. In diesem Falle gewinnt die Bank die von dem Spieler ausgesetzte Summe. Der Werth der Erwartung für die Bank ist also:

$$E_2 = \frac{37}{38}\, a.$$

Der Vortheil der Bank in diesem Falle ist:

$$4)\quad V = E_2 - E_1 = \frac{37-35}{38}\, a = \frac{a}{19} = a\,.\,0{,}0526\,..$$

oder 5,263 . . Proc.

e) Bei zwei Zahlen (à cheval):

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Spieler, der zwei Zahlen besetzt, gewinnen werde, ist $w = \frac{2}{38}$. In diesem Fall gewinnt er den 17fachen Einsatz (a). Der Werth seiner Erwartung ist hiernach:

$$E_1 = \frac{2}{38} \cdot 17\, a = \frac{17}{19}\, a.$$

In dem vorliegenden Falle gehören 36 Zahlen der Bank zu, welche der Spieler nicht besetzt hält. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist daher für sie $w = \frac{36}{38}$. Sie gewinnt die vom Spieler ausgesetzte Summe. Der Werth der Erwartung für die Bank ist:

$$E_2 = \frac{18}{19}\, a.$$

Der Vortheil der Bank ist daher:

$$5)\quad V = E_2 - E_1 = \frac{19-18}{19}\,a = \frac{a}{19} = a.0{,}0526\ldots$$

oder 5,263 . . . Proc.

f) Bei drei Zahlen (transversale pleine):

Die Wahrscheinlichkeit, mit drei besetzten Zahlen zu gewinnen, ist $\frac{3}{38}$, der hierauf gesetzte Gewinn ist der 11fache Einsatz. Der Werth der Erwartung ist daher $E_1 = \frac{3}{38}\,11\,a$. Die Wahrscheinlichkeit, auf 35 freigelassenen Nummern zu gewinnen, ist für die Bank $\frac{35}{38}$. Sie gewinnt den Satz des Spielers. Der Werth der Erwartung ist daher $E_2 = \frac{35}{38}\,a$. Der Vortheil der Bank ist sofort:

$$6)\quad V = E_2 - E_1 = \frac{35-33}{38}\,a = \frac{a}{19} = a.0{,}0526\ldots$$

g) Bei vier Zahlen (carré):

Da die Wahrscheinlichkeit des Spielers zu gewinnen $\frac{4}{38}$ ist und er dann den 8fachen Einsatz gewinnt, so ist der Werth seiner Erwartung $E_1 = \frac{4}{38}.8a$. Die Bank erhält den einfachen Satz bei der Wahrscheinlichkeit $\frac{34}{38}$ zu gewinnen. Der Werth der Erwartung ist hiefür $E_2 = \frac{34}{38}\,a$. Der Vortheil der Bank ist:

$$7)\quad V = E_2 - E_1 = \frac{17-16}{19}\,a = \frac{a}{19} = a.0{,}0526\ldots$$

h) Bei fünf Zahlen (transversale à cinq numéros):

Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist für den Spieler $\frac{5}{38}$. Er gewinnt den 6fachen Satz. Der Werth seiner Erwartung ist $E_1 = \frac{5}{38}\,6\,a$. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist für die Bank $\frac{33}{38}$. Sie gewinnt den Satz a. Der Werth der Erwartung ist $E_2 = \frac{33\,a}{38}$. Hiernach ist der Vortheil:

$$8)\quad V = E_2 - E_1 = \frac{33-30}{38}\,a = \frac{3a}{38} = 0{,}07894735\ldots$$

oder 7,8947 . . Proc.

i) Bei sechs Zahlen (transversale à six numéros):

Stellt man auf die angegebene Weise die Erwartungswerthe für den Spieler und die Bank zusammen, so ist:

$$9)\quad V = \frac{32\,a}{38} - \frac{6}{38}\,.\,5\,a = \frac{2a}{38} = a\,.\,0{,}0526\,\ldots$$

oder 5,26 . . . Proc.

k) Unten an einer Colonne (bas de colonnes) oder auf die 12 ersten, mittlern, letzten Zahlen (12 premiers, 12 du milieu, 12 derniers):

Die Wahrscheinlichkeit, in jedem der eben genannten Fälle zu gewinnen, ist $\frac{12}{38}$. Der Gewinn ist im glücklichen Falle der doppelte Einsatz, folglich der Werth der Erwartung $E_1 = \frac{12}{38}\,.\,2\,a$. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Bank gewinnen werde, ist $\frac{26}{38}$. Sie erhält in diesem Falle den Satz des Spielers. Der Werth der Erwartung hierfür ist $E_2 = \frac{26\,a}{38}$. Der Vortheil der Bank ist:

$$10)\quad V = \frac{26-24}{38}\,a = \frac{a}{19} = a\,.\,0{,}0526\,\ldots$$

l) Zwischen zwei Colonnen (entre deux colonnes), oder auf 24 Zahlen (sur 24 numéros):

Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist für den Spieler $\frac{24}{38}$. Er gewinnt in diesem Falle den halben Satz. Der Werth der Erwartung hiefür ist $\frac{24}{38}\,.\,\frac{a}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist für die Bank $\frac{14}{38}$. Sie gewinnt in diesem Falle den ganzen Einsatz des Spielers. Der Werth der Erwartung ist hierfür $E_2 = \frac{14}{38}\,a$. Der Vortheil der Bank ist sofort:

$$11)\quad V = \frac{7a}{19} - \frac{6a}{19} = \frac{a}{19} = a\,.\,0{,}0526\,\ldots$$

Aus den hier gemachten Bemerkungen ergiebt sich, daß der Vortheil der Bank in den unter a—g und i—l angegebenen Fällen zwischen 5 und 6 Proc. fällt und in dem in h betrachteten Falle sich nahe auf 8 Proc. beläuft. Diese Art zu spielen ist die ungünstigste für den Spieler. Die Bank nimmt nun nach diesen Berechnungen von jedem Spieler einen Tribut von wenigstens 5 Proc. und dies um so gewisser, je längere Zeit er spielt.

Die vorstehende Untersuchung über das Roulette-Spiel wurde deswegen hier mitgetheilt, weil eine genaue und richtige Würdigung dieses Spiels in der Weise, wie sie hier vorliegt, bis jetzt noch nicht gegeben ist. Obwohl

schon hieraus und aus dem Grunde, daß dieses Spiel gegenwärtig zu den beliebtesten und verbreitetsten in Bädern gehört, diese Untersuchung gerechtfertigt erscheint, so möchte sich dieselbe noch insbesondere dadurch rechtfertigen, wenn man folgende Thatsachen beachtet, die den landständischen Verhandlungen des Großherzogthums Baden entnommen sind.

Im Jahre 1839 wurde die Spielbank in Baden unter folgenden Bedingungen auf 15 Jahre in Pacht gegeben. Der Pächter zahlt ein für alle Mal die Summe von 140000 Fl., um die Schulden des dortigen Badfonds zu tilgen, und jährlich die Pachtsumme von 45000 Fl. Hiefür erhielt er die Erlaubniß, eine Bank für das Roulette-Spiel und das sogenannte Trente-et-un zu errichten. Die Eröffnung des Spiels war auf den 10ten Mai und der Schluß auf den 25sten October festgesetzt. Dieser Vertrag wurde im Jahre 1841 dahin abgeändert, daß der Anfang auf den 1sten Mai und der Schluß auf den 31sten October bestimmt wurde, und der Pächter hiefür jährlich weitere 10000 Fl. Pacht zu entrichten hat. Verwandelt man die Baarzahlung von 140000 Fl. in eine jährliche Rente für die Dauer von 15 Jahren, so ist ihr Werth nach 1 §. 32 bei 4 Proc.:

$$T = \frac{140000 \,.\, 0{,}04}{1 - 1{,}04^{-15}} = 12591{,}75 \text{ Fl.}$$

oder in runder Summe 12600 Fl. Hiernach beläuft sich die jährliche Pachtsumme auf 67600 Fl. Hatte der Pächter bei der Uebernahme noch sonstige Ausgaben zu bestreiten, so sind auch diese in Rechnung zu ziehen. Hiefür, sowie für Aufstellung des zum Spiele nöthigen Personals, der erforderlichen Betriebssumme ꝛc., möchte eine weitere jährliche Summe von 30000 Fl. nicht zu hoch gegriffen sein. Hiernach wäre eine Summe von 97600 Fl. oder in runder Summe von 100000 Fl. einzunehmen, ehe reiner Gewinn eintreten kann. Nimmt man nun an, daß diese Summe durch das Roulette-Spiel gedeckt werden soll, so wird, da die Bank nur 6 Monate spielt, nach 2 §. 3 ein Kapital von

$$K = \frac{100000 \,.\, 100}{0{,}5 \,.\, 5{,}26\ldots} = 3800000 \text{ Fl.,}$$

also nahe ein Kapital von 4 Millionen Gulden nöthig, um diese Abgaben zu decken. Sind nun die bestehenden Gerüchte über den wirklichen reinen Ertrag der Spielbank nur einigermaßen begründet, so müßte man annehmen, daß in jedem halben Jahre, worin das Spiel eröffnet ist, wenigstens 10—15 Millionen Gulden an der Bank in Umlauf gesetzt werden. Diese Summe dürfte deswegen nicht übersetzt sein, da der Gewinn der Bank bei dem Trente-et-un viel geringer, als bei dem Roulette-Spiel ist, und der niedrigste Einsatz bei jenem Spiele das $3\frac{1}{2}$fache von dem bei letzterm beträgt. Setzt man die Dauer eines Spieles auf eine Minute und nimmt man an, daß jeden Tag an beiden Banken 500 Spiele gemacht wer-

den, was durchschnittlich eine tägliche Spielzeit von etwas mehr als 4 Stunden ausfüllt, so müßte bei jedem Spiele durchschnittlich eine Summe von 110 — 160 Fl. ausgesetzt werden, um das oben genannte Kapital in Umlauf zu setzen. Diese Annahmen möchten nicht zu hoch gegriffen sein, da an manchen Tagen zwei Roulette in Thätigkeit sind und die Einsätze einzelner Spieler diese Summe nicht nur erreichen, sondern sogar übersteigen.

Bedenkt man nun, welche Summe für das Vergnügen und den Reiz des Spiels hiernach in Bewegung gesetzt und dadurch anderen Zwecken entzogen wird, so liegt der Gedanke ganz nahe, daß dies verhindert und ein Institut fortan nicht mehr geduldet werden möge, welches nur dazu vorhanden zu sein scheint, um eine Leidenschaft nicht nur zu befriedigen, sondern sie von neuem immer wieder anzufachen, nachzuziehen, zu nähren und auszubreiten. Es genügt hier nicht, auf die Moral hinzuweisen und diese als die Macht zu bezeichnen, welche durch ihre Einwirkung (also durch Verödung) derartige Institute zu schließen hat. Es ist Pflicht der Staaten, solche Institute im Interesse der Moral zu unterdrücken, damit nicht die Leidenschaft bei ihrem Anblick Athem und Leben gewinne und in ihrer Verblendung Unglück, Jammer und Noth nicht nur in physischer, sondern noch häufiger in moralischer Beziehung über den Einzelnen und in den Schooß der Familien bringe. Es ist jedoch hier nicht der Ort, die Aufhebung der öffentlichen Spiele, der Zahlen- und Classen-Lotterien ꝛc. zu erörtern. Die bisher vorgelegten Resultate des Calculs möchten genügen, um den Leser in den Stand zu setzen, ein wohlbegründetes Urtheil über Aufhebung der Spielinstitute, namentlich der Zahlen- und Classen-Lotterien, zu fällen, vielleicht besser, als es die ausgeführteste und beredteste Erörterung vermag.

Gespielt wird werden und Spiele werden daher bestehen, so lange die Menschen Langeweile und den Trieb fühlen, diese auf eine angenehme und schmeichelnde, anstrengungslose Weise von sich abzuhalten, so lange der unergründliche Wechsel des Zufalls Reiz bietet, so lange Gewinn im Spiele lockt, so lange Glück im Wagen erobert werden kann, mit Einem Worte, so lange Menschen leben, die Zeit und Mittel haben, um all' diesen Verführungen folgen zu können. Es wäre daher überflüssig, ja ganz zwecklos, die Spiele und das Spielen überhaupt vertilgen zu wollen, denn da der Begriff des Spiels an und für sich nichts Schlechtes enthält, so steht dieser Gedanke auf einem unhaltbaren Boden. Was aber thun? Soll man die Sache mit allen ihren bedenklichen Folgen sich selbst überlassen?

Man suche die Spiellust zu leiten und suche diejenigen Spiele, welche zu Vergeudung des Besitzes oder der Ersparnisse durch Hoffnung auf hohe Gewinne am meisten verleiten und die Sittlichkeit gefährden können, zu unterdrücken. Hierunter dürften vor Allen Zahlen- und Classen-Lotterien zu rechnen sein. Man eröffne dem Publikum nur solche Spiele, welche bei

geringem Vortheile für die Bank nur kleine Gewinne (höchstens den einfachen oder doppelten Einsatz) zulassen, stelle hohe Einsätze und erschwere die Theilnahme.

Siebentes Kapitel.

Sterblichkeit.

---

§. 74.

Wie lange ein Mensch von bestimmtem Alter noch leben werde, läßt sich nicht mit Sicherheit angeben. Es wird sich daher auch Niemand mit Beantwortung dieser Frage beschäftigen. Dennoch kann man die Zeit, welche ein Mensch von bestimmtem Alter noch zu durchleben Hoffnung hat, zum Gegenstand einer Untersuchung machen, und die Beantwortung dieser Frage bietet nicht nur viel Interessantes, sondern auch viel Wichtiges, denn hieran knüpft sich eine Reihe von Anwendungen auf viele Verhältnisse und Einrichtungen, die im öffentlichen, sowie im Privatleben vorkommen. Wäre das Gesetz, wornach das Absterben der Menschen vor sich geht, bekannt, so wäre auch die vorliegende Frage beantwortet, oder könnte wenigstens beantwortet werden, denn man könnte nach den im fünften Kapitel aufgestellten Grundsätzen den Werth in Zahlen angeben, welcher der Hoffnung des Einzelnen auf die ihm noch zukommende Lebensdauer entspricht, oder den Werth der Erwartung in Beziehung auf die von ihm noch zu durchlebenden Jahre bestimmen. Es beruht daher die Beantwortung der angeregten Frage auf genauer Kenntniß des Gesetzes, oder der Ordnung, wodurch die Sterblichkeit der Menschen bedingt ist. Dies Gesetz kann, wie man leicht erkennt, nicht a priori angegeben, sondern nur durch die Erfahrung ermittelt werden. Es haben daher schon viele ausgezeichnete Forscher ihren Fleiß und Scharfsinn der Beantwortung dieser Frage zugewendet, ihre Beobachtungen aufgezeichnet und Tabellen entworfen, worin die Resultate ihrer Arbeiten über die Gesetze des Todes niedergelegt sind. Demungeachtet ist die Untersuchung in diesem Gebiete des menschlichen Wissens nicht geschlossen und die vorliegende Frage in ihrem ganzen Umfange noch keineswegs gelöst.

Versucht man, sich die Bedeutung derselben klar, und von der Art und Weise, wie sie gelöst werden soll, ein deutliches Bild zu machen, so stellen sich mehr Schwierigkeiten einer gründlichen Beantwortung entgegen, als sich dem ersten Blick zeigen möchten, so daß man sich ungeachtet der großen Masse von Material, welches schon verarbeitet vorliegt, zu der Behauptung verleitet fühlt, daß die Beantwortung der schon längst angeregten Frage noch in ihrer ersten Entwickelung begriffen ist, daß noch eine große Reihe von Beobachtungen nöthig wird, um sie zum Abschlusse zu bringen. Erwägt man endlich die vielen und tief liegenden Ursachen, welche das Leben der Menschen gefährden und den Tod bedingen, so wird man leicht von dem Zweifel beschlichen, ob es je dem menschlichen Scharfsinne gelingen werde, den geheimen Gang dieses vielköpfigen Ungeheuers, das auf unzählbaren Wegen den Untergang der Menschen vorbereitet, zu belauschen.

Die Methode, welche man bisher und namentlich in der neueren Zeit bei Verfertigung von Sterblichkeitstafeln befolgt hat, ist gewiß die richtige. Nach ihr werden nicht nur zuverlässige und verbürgte Angaben, sondern auch häufige und auf großen Massen oder großen Zahlen beruhende Beobachtungen verlangt und dem Calcul zu Grunde gelegt. Je öfter und je sorgfältiger die Beobachtungen, je größer die Zahl der Individuen, über welche sich die Beobachtungen ausdehnen, und je vielseitiger endlich die Richtungen sind, über welche sich dieselben erstrecken, desto sicherer werden sich die aus ihnen abgeleiteten Resultate und desto genauer die Gesetze herausstellen, welche aus ihnen gefolgert werden sollen. Man muß es daher mit großem Danke anerkennen, daß sich bis jetzt so viele Gelehrte mit der Erforschung eines Gesetzes beschäftigt haben, dessen Kenntniß bei dem Fortschritte der Civilisation dem Staate sowie dem Einzelnen nicht sowohl von Interesse und Wichtigkeit, sondern vielmehr zur Nothwendigkeit geworden ist.

Mit Untersuchung des hieher gehörigen Gegenstandes haben sich vorzüglich beschäftigt: Short, Halley, Simpson, de Moive, Gompertz, Milne, Morgan, Sprengell, Babbage, Kerseboom, Struyk, Wargentin, Deparcieux, Duvillard, Muret, Benoiston de Chateauneuf, d'Ivernois, Mathieu, Quetelet, Süßmilch, Baumann, Lambert, Casper, Bickes u. m. A. Es kann nicht unsere Absicht sein, hier auf eine Kritik der vorliegenden Arbeiten einzugehen. Wir beschränken uns darauf, das Wesentliche von dem, was unserm Zwecke entspricht, beizubringen. Eine Zusammenstellung der älteren hieher gehörigen Literatur findet sich in Süßmilch's Göttlicher Ordnung, 3ter Theil, 4te Ausg., Berl. 1776, S. 25 u. ff.

Short hat seine Tafeln auf Beobachtungen gegründet, die sich auf 54 Kirchspiele erstreckten, hat jedoch dabei nicht auf die Verhältnisse des Ortes und der Zeitumstände Rücksicht genommen. Halley stützte seine Tafeln

auf die Geburten und Todesfälle, welche in der Stadt Breslau in den fünf Jahren von 1687—1692 vorkamen, und nahm für diese Zeit den Zustand der Bevölkerung als statar an. Simpson benutzte die Sterbelisten von London aus den zehn Jahren von 1728—1738, Price die von Northampton aus den Jahren 1735—1781 u. s. w. Kerseboom gründete seine Tafeln auf die Register von Leibrenten-Anstalten in Holland während eines Zeitraums von 125 Jahren; Deparcieux auf Tontinen in Frankreich, Finlaison auf Tontinen und Renten-Anstalten in England, Wargentin auf Zählungen in Schweden, Süßmilch auf Zählungen in der Mark, Muret auf Zählungen in Waadt, Quetelet auf Zählungen in Belgien, Casper auf Notizen, welche in den Jahren 1818—1829 über die Bewegung in der Bevölkerung Berlins bekannt gemacht wurden u. s. w.

§. 75.

Wäre nun das Gesetz, wornach die Sterblichkeit im Menschengeschlechte erfolgt, ein allgemeines, also von besonderen zeitlichen und örtlichen Verhältnissen unabhängiges, so müßte sich dies durch die Beobachtung bestätigen, und man müßte allenthalben auf die gleichen Resultate geführt werden. Es wäre sofort einerlei, in welchen Ländern und Klimaten, unter welchen Bedingungen und Verhältnissen und zu welchen Zeiten die Beobachtungen gemacht würden. Alle gefundenen Resultate müßten auf das nämliche Gesetz hinweisen. Dies ist aber nicht der Fall. Nicht nur in den verschiedenen Ländern, sondern in den verschiedenen Orten desselben Landes, in ebenen und Gebirgsgegenden, in den Städten und auf dem Lande, ja selbst unter den Bewohnern desselben Ortes zeigen sich hinsichtlich des Geschlechtes und der Lebensweise verschiedene Gesetze für die Sterblichkeit. So ist die Sterblichkeit in England eine andere als in Belgien, in Belgien eine andere als in Deutschland u. s. w. Für die Rentenirer ist sie eine andere als für die ganze Masse, für die Männer eine andere als für Frauen; seit der Schutzpockenimpfung ist sie eine andere als vor derselben. Die Untersuchungen von Rickmann, welche sich auf die Bewegung in der Bevölkernng von England und Wales während der Jahre 1813—1830 erstrecken, stellen die wahrscheinliche Lebensdauer für jedes Individuum zur Zeit der Geburt auf 26 Jahre im Allgemeinen fest, für das männliche Geschlecht jedoch nur auf 23, für das weibliche auf 28 Jahre. Aus den Untersuchungen Casper's über die Bewegung der Bevölkerung in Berlin ergiebt sich die wahrscheinliche Lebensdauer eines Individuums für den nämlichen Zeitpunkt im Allgemeinen auf 20,76 Jahre, für das männliche Geschlecht auf 21,07, für das weibliche auf 20,27 Jahre. Unter denselben Bedingungen ergiebt sich nach Quetelet für die wahrscheinliche Lebensdauer im Augenblick der Geburt

ungefähr 25 Jahre durchschnittlich; in den Städten ist dieselbe nahe 21 Jahre für das männliche, und etwas mehr als 28 Jahre für das weibliche Geschlecht; auf dem Lande ist sie nahe 23½ Jahre für das männliche, und nahe 27½ für das weibliche Geschlecht u. s. w. Nach Finlaison ist diese sogar (für Rentenirer) 55 (für Männer) und 63 Jahre (für Frauen). Nach den Listen der Equitable-Versicherungsgesellschaft in England erreichen von 1000 Individuen 499 das 43ste Jahr, in Berlin nur 345, nach der Sterblichkeitstafel von Northampton 348, nach der von Carlisle 494, nach Kerseboom 419, nach Süßmilch 360, nach Halley 417, nach Finlaison sogar 627 u. s. w. Für die Bewohner desselben Ortes ist nach den bisherigen Erfahrungen die Sterblichkeit nicht die gleiche zu verschiedenen Zeiten, wie sich dies durch folgende Zusammenstellung belegt, welche angiebt, in welchem Verhältnisse sich dieselbe in London während den 50 Jahren von 1780—1830 von je 10 zu 10 Jahren verändert hat. In den Jahren von 1780—1789, 1790—1799, 1800—1809, 1810—1819, 1820—1829 haben von 100000 Individuen gelebt:

Jahre	100000	100000	100000	100000	100000
0 — 2	67394	67778	70739	71725	71947
2 — 5	58054	56887	59297	61670	62077
5 — 10	54296	52975	55044	57585	57894
10 — 20	50548	49655	51963	54243	54116
20 — 30	42889	42720	45111	47270	47143
30 — 40	33675	33681	35422	38014	38409
40 — 50	23495	23829	24958	27755	28860
50 — 60	14979	15135	15806	18546	19687
60 — 70	7654	7788	8247	10208	10947
70 — 80	2489	2445	2802	3775	3719
80 — 90	325	309	398	626	496
90 — 100	34	17	21	21	14
100 und mehr	0	0	0	0	0

Aus dieser Zusammenstellung ergiebt sich die Richtigkeit der vorhin aufgestellten Behauptung. Die Ordnung der Sterblichkeit hat sich in den verschiedenen Jahren augenscheinlich verändert. Die Lebensdauer hat sich nach ihr durchschnittlich vergrößert. Das Jahrzehend von 1780—1789 zeigt hievon Ausnahmen. Diese Erscheinung kann durch allerlei Ursachen bedingt sein, die näher zu untersuchen hier nicht der Ort sein kann. Beruhen nun diese Angaben, die wir aus Casper's Schrift über die wahrscheinliche Lebensdauer entnommen haben, auf sorgfältigen Beobachtungen, was wir hier voraussetzen, so ergiebt sich aus ihnen unzweifelhaft, daß sich die Lebens-

dauer im Laufe eines halben Jahrhunderts unter den Bewohnern der Stadt London gehoben hat. Dies beweisen namentlich die Zahlen, welche die Zahl der Lebenden in den ersten 20 Jahren ausdrücken, denn diese umfassen wohl ausschließlich Individuen, die in dieser Stadt geboren sind, während die Zahlen, welche dem spätern Lebensalter angehören, auch solche Individuen umfassen können, die eingewandert sind. Die größere Lebensdauer erklärt sich entweder ganz oder theilweise durch die Kuhpockenimpfung, deren Einfluß Duvillard in seinem Werk (Analyse et Tableaux de l'influence de la petite vérole sur la mortalité. Par. 1806) untersucht hat. Es ist jedoch auch gedenkbar, daß das Gesetz der Sterblichkeit in verschiedenen Perioden hin und her schwankt, wie dies bei anderen Erscheinungen auch vorkommt. Zu bedauern ist, daß man nicht genug Vorlagen hat, um das Gesetz über Veränderlichkeit in der Ordnung des Todes an einem und demselben Orte verfolgen zu können. Gewiß würden sich die nämlichen Resultate auch in anderen Fällen zeigen, die sich aus der vorliegenden Zusammenstellung über die Sterblichkeit in London ergeben haben.

Geht man nun auf den Inhalt der bisher gemachten Mittheilungen zurück, so deutet er nicht auf ein allgemeines Gesetz, wornach die Sterblichkeit im Menschengeschlechte vor sich geht, sondern auf eine Menge einzelner Gesetze, die durch besondere Verhältnisse bedingt sind und nur für diese gelten. Es dürfte sogar die Behauptung nicht gewagt erscheinen, daß ein allgemeines, für alle Zeiten und Verhältnisse geltendes Gesetz sich wohl gar nicht auffinden lassen wird. Wollte man aber dennoch von der Idee ausgehen, ein allgemeines Gesetz für die Sterblichkeit aufzufinden, oder alle die für besondere Verhältnisse abgeleiteten Gesetze in ein allgemeines zu vereinigen, so möchte dies wohl ein Fehlgriff sein, denn man würde auf diesem Wege zu einem Gesetze gelangen, das nirgends Anwendung fände, weil es bei jeder Anwendung auf unrichtige Resultate führte. Selbst die Idee eines allgemeinen, für alle Zeiten und Verhältnisse gültigen, also unveränderlichen Gesetzes in der Ordnung des Todes trägt eine Unhaltbarkeit in sich, denn es würde auf einen Fatalismus führen, der sich mit der Freiheit, Strebsamkeit und Moralität des Menschen nimmermehr verträgt.

Soll daher die Aufgabe, welche die Auffindung des Gesetzes der Sterblichkeit zum Gegenstand hat, sachgemäß gelöst werden, so dürfte nöthig sein, alle Umstände und Verhältnisse, welche auf die Lebensdauer des Menschen einzuwirken geeignet sind, in's Auge zu fassen, sie in dieser Beziehung zu verfolgen und hierauf die Beobachtungen zu gründen, woraus sich die gewünschten Gesetze ableiten lassen. Die Verfolgung dieses Weges wird zum Ziele führen. Er wurde auch bereits in der neueren Zeit eingeschlagen. Hierin ist auch der Grund zu suchen, warum die meisten Tafeln, welche in den früheren Zeiten über die Sterblichkeit aufgestellt wurden, ganz oder doch

größtentheils unbrauchbar sind. Sie wurden entworfen, ohne diesen wichtigen Momenten Rücksicht zu schenken.

§. 76.

Wir wenden uns zu der Betrachtung der Ursachen, welche auf die Lebensdauer des Menschen einzuwirken geeignet scheinen. Sie zerfallen in zwei Arten, innere und äußere. Zu den

a) inneren werden zu zählen sein:

1) physische Beschaffenheit des einzelnen Individuums.

Vor Allem wird der körperlichen Beschaffenheit eines Individuums ein Einfluß auf die Lebensdauer einzuräumen sein. Ein schwacher, zarter Körper wird Anstrengungen, Abmühung, Entbehrung, harte Arbeiten ꝛc., manche Einwirkungen der Atmosphäre, den Wechsel der Witterung, climatische Einflüsse nicht so leicht ertragen können, als ein starker und kräftiger, und es wird häufig großer Vorsicht und Schonung bedürfen, um die schädlichen Folgen solcher Einwirkungen abzuhalten. Hiedurch kann der Keim zu mancher Krankheit geweckt und ausgebildet werden, wozu es oft nur einer kleinen Ursache bedarf. Hieher gehört insbesondere eine kränkliche Anlage des Körpers, und es ist nicht zu bezweifeln, daß ein ungesunder Körper früher dem Tode erliegen werde, als ein gesunder. Es können allerdings Fälle vorkommen, in welchen ein kränkliches Individuum, oft unter sehr ungünstigen Verhältnissen, wider Erwarten ein langes Leben durchlebt. Dies kann aber nicht als Norm dienen. Hieher gehört die Frage, inwieweit körperliche Gebrechen oder abnorme Körperbildung Einfluß auf die Lebensdauer äußern können, und ob ein krüppelhafter Mensch, dem ein beschäftigtes Leben zugemuthet wird, eine Aussicht auf die gleiche Lebensdauer hat, wie ein normal gebildeter? Wenn man nun auch von vorne herein die Frage nicht dahin entscheiden kann, daß eine abnorme Körperbildung oder ein körperliches Gebrechen eine kürzere Lebensdauer bedingen werde, so ist um so mehr zu wünschen, daß die Erfahrung darüber gefragt werde, ob dieselben überhaupt und inwieweit Einfluß auf die Lebensdauer äußern. Hieher sind auch Verstümmelungen, Blindheit, Lahmheit, Taubheit ꝛc., Cretinismus zu rechnen. Daß das Geschlecht eine Verschiedenheit in der Lebensdauer bedingt, ist bekannt.

2) psychische Anlagen des einzelnen Individuums.

Daß die geistige Natur des Menschen mit seiner physischen in inniger Wechselwirkung steht, ist bekannt. Wenn nun auch unseren Blicken entgeht, wie das beide verknüpfende Band geschlungen ist, so kann doch nicht in Abrede gestellt werden, daß die geistige Kraft des Menschen die Körperkraft steigern und letztere oft bis zu ungewöhnlicher Thätigkeit erheben könne. Ein reizbarer, heftiger, unruhiger Character wird leichter seine Gesundheit

in Gefahr bringen, als ein ruhiger, gleichgiltiger, phlegmatischer. Schwermuth, trübe und finstere Stimmung wird niederschlagend und erlahmend auf Lebensthätigkeit einwirken. Es dürfte allerdings schwierig sein, hierüber Gesetze aufzufinden, dennoch dürfte der hier angedeutete Einfluß nicht geradezu geleugnet werden können. Am leichtesten wäre die hieher gehörige Frage zu entscheiden, inwiefern der Irrsinn und Wahnsinn Einfluß auf die Lebensdauer äußert?

3) die geistige Bildung des einzelnen Individuums.

Sollte man einen directen Einfluß der geistigen Bildung auf die Lebensdauer des einzelnen Individuums zu leugnen geneigt sein, so ist wohl ein indirecter gewiß nicht in Abrede zu stellen. Eine gleichmäßige Ausbildung der intellectuellen und moralischen Kräfte eines Menschen kann wohl nur günstigen Einfluß auf seine Lebensdauer haben. Sie schützt ihn vor Einseitigkeit und macht ihm die Sorge für körperliche Kraft zur Pflicht, weil nur in einem gesunden Körper ein starker Wille und kräftiger Geist wohnen kann. Hat er aber seine Geistes- und Körperkraft harmonisch ausgebildet, so werden sie sich gegenseitig tragen und unterstützen. Seine intellectuelle und moralische Ausbildung wird ihn zu einem brauchbaren Subjecte machen, das sich eine sichere und sorgenfreie Existenz bereiten kann. Sie wird ihn vor Uebereilungen und schlechten Handlungen, vor Aufregung der Leidenschaften schützen, welche die Kraft des Menschen schwächen und die Gesundheit untergraben. Bekanntlich haben heftige Gemüthsbewegung, Kummer, Sorge, Verdruß, Angst entnervende und abspannende Einwirkung auf die Gesundheit, während Thätigkeit, Vertrauen, Muth, Furcht- und Sorglosigkeit dieselbe stärken. Es ist aber gewiß nicht zu leugnen, daß ein intellectuell und moralisch durchgebildeter Mensch alle diese nachtheiligen Wirkungen von sich abhalten und die guten sich gewinnen werde. Daß aber eine von heftigen Gemüthsbewegungen angegriffene und gereizte Natur leichter der Einwirkung einer Krankheit unterliegt, ist bekannt. Sollte übrigens eine harmonisch durchgreifende intellectuelle und moralische Bildung nur dazu dienen, den in der neueren Zeit immer mehr um sich greifenden Selbstmord zu verhüten, so würde dies schon genügen, um die Richtigkeit des Gesagten darzuthun. Diese wird sich noch insbesondere durch das rechtfertigen, was unter der folgenden Nummer beigebracht werden soll.

4) die Lebensweise des einzelnen Individuums.

Von besonders wichtigem Einfluß auf die Lebensdauer ist die Lebensweise, welche ein Mensch in moralischer und physischer Beziehung führt. Ein unmoralisches Subject wird durch Ausschweifung, Unmäßigkeit im Genusse geistiger Getränke, Unmäßigkeit in Befriedigung der Leidenschaften und Triebe, Unregelmäßigkeit in der Ernährung des Körpers, theilweise Entbehrung und schnelle Befriedigung, Völlerei, Unreinlichkeit u. dergl. seine Ge-

sundheit und Körperkraft untergraben und dadurch sein Leben gefährden. Es ist eine bekannte Thatsache, daß Epidemien ihre Opfer aus den hier bezeichneten Subjecten suchen. Wird Jemand gar durch seine Lebensweise zu schlechten Handlungen, Lastern und Verbrechen hingerissen, so droht ihm Verlust der Freiheit, der Selbstständigkeit und Thatkraft u. s. w., also solche Zustände, welche nur ungünstig auf die Lebensdauer einwirken können, oder endlich sogar gewaltsamer Tod. Umgekehrt wird Mäßigkeit im Genusse der körperlichen Nahrung, der geistigen Getränke, regelmäßige Befriedigung der Triebe, Reinlichkeit u. dergl. nur einen guten Einfluß auf die Gesundheit und Lebensdauer haben.

b) Zu den äußeren Ursachen sind zu zählen:

1) örtliche und climatische Verhältnisse.

Nach den bisher an verschiedenen Orten gemachten Beobachtungen ist es gar nicht zweifelhaft, daß örtliche Verhältnisse einen bedeutenden Einfluß auf die Lebensdauer des einzelnen Individuums haben. Die Art der Beobachtung und die Schwierigkeit, bei den angestellten Beobachtungen allen möglichen Fehlern vorzubeugen, können nicht die einzige Ursache sein, woraus sich die nicht unbedeutenden Differenzen in der Sterblichkeitsordnung für die verschiedenen Orte erklären. Als hervortretende Thatsache zeigt sich, daß das Leben in den Städten, und besonders sehr volkreichen, eine ganz andere Sterblichkeitsordnung, als in minder volkreichen, und in diesen eine andere, als auf dem Lande, nachweis't. So erreichen nach Quetelet 5384 Städter, dagegen 5734 Landleute (männlichen Geschlechts), ferner 5916 Städter und 6082 Landleute (weiblichen Geschlechts) unter 10000 Lebenden das 10te Jahr. Auf gleiche Resultate deuten die in der neuesten Zeit von Gebhard herausgegebenen Tabellen, die sich auf die Sterbelisten des Königreichs Baiern gründen und woraus sich eine verschiedene Sterblichkeit für Einwohner größerer und kleinerer Städte, sowie für Bewohner des platten Landes ergiebt. Eine merkwürdige Erscheinung ist nach der von Quetelet mitgetheilten Tafel, daß unter den Bewohnern der Städte weiblichen Geschlechts bis zum 19ten Jahre eine größere Sterblichkeit herrscht, als bei denen auf dem Lande, und daß dagegen von diesem Jahre an umgekehrt eine größere Sterblichkeit unter den Einwohnern auf dem Lande, als unter den Städtern herrscht. Bei dem männlichen Geschlechte zeigt sich dieses Ueberspringen nicht. Es läßt sich die verschiedene Sterblichkeit in den Städten und auf dem Lande zum Theil auch durch die verschiedene Lebensweise (a Nr. 4) erklären, namentlich durch größere Immoralität, verderbte Sitten, Vernachlässigung der Säuglinge durch das Ammenwesen, schlechte Nahrung, schlechte und ungesunde Wohnung, Ueberfüllung der Wohnung und hiedurch schnelleres Ausbreiten ansteckender Krankheiten, schlechte Luft 2c.,

woraus der Tod eine reichliche Ernte zieht. Selbst die den Angaben von Quetelet entnommene Erscheinung über die Aenderung der Sterblichkeit unter dem weiblichen Geschlechte in den Städten und auf dem Lande läßt sich aus der Annahme erklären, daß das weibliche Geschlecht auf dem Lande zu härteren und anstrengenderen Arbeiten, als in der Stadt, verwendet wird. Dies genügt aber nicht, um die Thatsache zu erklären, daß die Sterblichkeit an verschiedenen Orten unter beinahe gleichen Verhältnissen verschieden ist. Man wird deswegen immer auf die Einwirkung örtlicher Verhältnisse hingewiesen. Diese wird um so wahrscheinlicher, wenn man einen fruchtbaren Boden einem unfruchtbaren, wenn man eine sumpfige Gegend einer trockenen, die Ebene dem Gebirge u. s. w. gegenüberstellt; und es ist in der That kaum einzusehen, daß man den Einfluß der eben genannten Verhältnisse auf Gesundheit des Menschen und seine Lebensdauer in Abrede stellen kann, wie Einige gethan haben. Es kann nicht unsere Absicht sein, die Einzelnheiten der eben angegebenen Momente zu erörtern, um das Gesagte zu unterstützen. Wir beschränken uns daher, auf das Vorkommen endemischer Krankheiten, auf den Einfluß der pontinischen Sümpfe u. dergl. hinzudeuten, was sich durch örtliche Verhältnisse wohl nur am einfachsten erklären läßt.

Nach unserer Ansicht verdienen auch die climatischen Verhältnisse Beachtung. Es liegen zwar über diesen Gegenstand zu wenige Beobachtungen vor, um ein Urtheil hierüber zu begründen, aber es ist nicht wohl zu bezweifeln, daß die Verschiedenheit der Climate Einfluß auf die Lebensdauer übt. Die Beschaffenheit der Luft, der Grad der Feuchtigkeit oder Trockenheit, vorherrschende Winde, Regenverhältnisse, höhere oder niedere Temperatur, häufige und starke Temperaturwechsel, hoher oder niederer Druck der Atmosphäre, Lage eines Ortes in den verschiedenen Breitengraden und seine Höhe über der Meeresfläche u. s. w. mögen wohl Einfluß auf die Sterblichkeit haben. Wie weit sich aber derselbe erstrecke, ist noch zu ermitteln. Im Norden: Rußland, Schweden, Norwegen, England finden sich viele Personen, die sehr alt werden, hundert und mehr Jahre leben, während die Anzahl derer, welche ein solches Alter erreichen, im mittleren und südlichen Europa viel geringer ist. Ob ein hohes Alter ein Vorzug des nordischen Clima's ist, oder ob es seinen Grund in der physischen Beschaffenheit (a Nr. 1) oder in der Lebensweise hat, kann jetzt seine Erledigung noch nicht finden, da noch keine Untersuchungen hierüber vorliegen. Das Erste ist in Abrede zu stellen, wenn sich die Nachrichten bestätigen, welche erst kürzlich in den Zeitungen mitgetheilt wurden, daß unter zwei und einer halben Million Negern, die als Sklaven in Amerika leben, eine größere Menge hundert Jahre und darüber alt wurden, als unter vierzehn Millionen Menschen

weißer Abkunft*). Es ist nicht zu leugnen, daß die Verfolgung dieses bis jetzt noch wenig beachteten Gegenstandes hohes Interesse gewähren möchte. Für die Heilkunde wäre sie gewiß von Bedeutung. Gesetzt, die Resultate der Beobachtungen führten auf das Vorhandensein eines Einflusses des Clima's auf die Lebensdauer, so wäre es die Aufgabe dieser Wissenschaft, die Ursachen, worauf er beruht, näher zu erforschen und die Mittel anzugeben, wodurch der schädliche Einfluß abgewendet und die Lebensdauer geschützt würde. Die Lösung dieser Aufgabe wäre ein Fortschritt der Wissenschaft und eine Wohlthat für die Menschheit. Quetelet hat in seinem Werke (über den Menschen) einzelne Notizen über den Einfluß der Climate und auch der Jahreszeiten auf Sterblichkeit beigebracht. Sie sind aber nicht von der Bedeutung, um ein Urtheil auf sie bauen zu können.

Zwar stellen Einige (Süßmilch und Casper) geradezu den Einfluß climatischer Verhältnisse auf die menschliche Lebensdauer in Abrede. Doch ist dieser Behauptung so lange nicht beizutreten, bis sie sich auf bessere Nachweisungen stützt. Süßmilch sagt (göttliche Ordnung, 2ter Theil, S. 287): »Die Climaten und die Verschiedenheit der Nahrungsmittel scheinen fast gar keinen Einfluß zu haben, daß sie eine Veränderung in dem Verhältnisse der Sterbenden in jedem Alter zu der Summe der Gestorbenen hervorbringen können. Bloß die Lebensart, die moralischen Umstände des Lebens, das Laster und die Tugend, die Weichlichkeit und die Arbeitsamkeit verursachen einen kleinen Unterschied zwischen den Sterbenden auf dem Lande und in großen Städten,« und gründet seine Behauptung besonders darauf, »daß die Benedictinermönche, die Nonnen und die Tontinisten in Paris nebst den Bauern in der Mark Brandenburg und denen in Schweden meistens einerlei Regeln der Sterblichkeit unterworfen sind.« Daß die gleichen Sterblichkeitsgesetze bei Mönchen und Tontinisten herrschen, läßt sich leicht aus den gleichen oder wenigstens ähnlichen Verhältnissen erklären, unter welchen sie leben. Ein solcher Zusammenhang ist aber weni-

---

*) Die einer Zeitung entnommene Notiz heißt so: »Aus einer von dem Brittischen Parlament jüngst veröffentlichten Uebersicht ergiebt sich, daß am Schlusse des Jahres 1840 die Zahl der Sklaven in den Vereinigten Staaten 2487213 Köpfe betrug, 1246408 männliche und 1240805 weibliche. Von dieser Zahl hatten 753 Männer und 480 Frauen ein Alter von 100 Jahren erreicht und bereits überschritten, während von der übrigen Bevölkerung von 14189108 Weißen nur 476 Männer und 315 Frauen ein gleiches Alter entweder erreicht oder bereits überschritten hatten. Außerdem gab es 386245 freie Neger, 186467 Männer und 199778 Frauen, von denen 286 Männer und 261 Frauen ein Alter von 100 Jahren erreicht hatten.« Als Beispiel eines hohen Alters unter den Negern wird noch angeführt, daß eine Negerin in einem Alter von 180 Jahren im südlichen Theile Nordamerika's gestorben sei.

ger in der Sterblichkeitsordnung für diese und die Bauern in der Mark und denen in Schweden abzusehen. Finden sich aber dennoch die gleichen Gesetze, so läßt sich hieraus, den bisher gewonnenen Resultaten gegenüber, vorerst nichts folgern, und man hat dies als Thatsache so lange hinzunehmen, bis sich zeigt, ob der Zufall oder andere Verhältnisse diese Uebereinstimmung bedingen. Casper (die wahrsch. Lebensdauer, pag. 73) theilt die Behauptung Süßmilch's, und »in noch größerer Ausdehnung, als Süßmilch sie ahnete,« und fügt bei: »ich hoffe, eben durch diese Untersuchungen (über die Lebensdauer) zu beweisen, daß der Mensch selbst, nicht sein Mutterboden, nicht das Clima, in dem er lebt, nur Er (als Collectivum genommen) der Herr seines Lebens ist und daß eine »Lebensverlängerungskunst« in diesem Sinne allerdings möglich, ja eine der höchsten Aufgaben der Staatskunst sei.« Als Beleg für seine noch weiter ausgedehnte Behauptung bringt er die Vergleichung der mittleren Lebensdauer in dem feuchten, sumpfigen, von Meeresluft umwehten Holland und der trockenen, sandigen Mark Brandenburg in Anwendung, die er eben deswegen als auffallende Extreme des Clima's und Bodens aufstellt. Er stellt 21 Altersstufen, die Zeit der Geburt, das 1ste, 3te, 5te Jahr, und von da an die Zeiträume von 5 zu 5 Jahren zusammen. In der von ihm gegebenen Zusammenstellung stimmt nur sechs Mal die Zahl der ganzen Jahre, ein einziges Mal unter diesen die Zehntheile des Jahres überein. In allen übrigen Fällen zeigt sich eine Verschiedenheit, die sich bis auf einen Zeitraum von vier Jahren erhebt. Aus einer einzigen, in den einzelnen Fällen so sehr differirenden Vergleichung ein allgemeines Gesetz erschließen und begründen zu wollen, scheint sehr gewagt. Hier kann nur eine entschiedenere Harmonie und eine größere Grundlage in der Zahl der Beobachtungen maßgebend sein. Sollen nun Beobachtungen zu weiteren Schlußfolgerungen dienen, so müssen sie auf einer sichern Basis beruhen. Dies scheint aber nach dem, was Süßmilch (1ster Theil, S. 223) hierüber sagt, durchaus nicht der Fall zu sein, denn er bemerkt, daß »nicht Listen und Zählungen angeführt werden,« worauf die beigebrachten Data beruhen. Die Beobachtungen, welche Casper mit einander vergleicht, sind aus sehr verschiedenen Zeiten genommen, während welcher die Sterblichkeitsordnung nach allen vorhandenen Angaben sich geändert hat. Ferner wird hier ein sumpfiges und feuchtes Land einem trockenen und sandigen Lande (Casper nennt sie selbst auffallende Extreme des Clima's und Bodens) entgegengestellt. In dieser Entgegenstellung liegt eine Unrichtigkeit, gerade weil beides Extreme sind. Es läßt sich ganz gut denken, daß zwei Extreme zu ganz gleichen Resultaten führen, was jedoch hier nicht einmal der Fall ist, und beide von dem Normalen verschieden sind. Jedes Extrem hätte mit seinem Gegensatze, das feuchte Clima und der sumpfige Boden mit einem nicht feuchten und

fruchtbaren, und eben so das sandige und trockene Land mit dem normalen verglichen werden sollen. Die mittlere Lebensdauer ist, wie sich später zeigen wird, ein aus einzelnen Elementen abgeleiteter Begriff. Es läßt sich nun leicht denken, daß die Elemente unter sich verschieden sind und doch zu einem und demselben Resultate führen. Gesetzt nun, man käme zu dem Resultate, daß unter bestimmten Voraussetzungen die climatischen und örtlichen Verhältnisse keinen Einfluß auf die mittlere Lebensdauer äußern, so wäre damit noch nicht der Beweis geliefert, daß die Sterblichkeitsordnung gleichfalls davon unabhängig wäre, da die Richtigkeit des umgekehrten Schlusses noch nicht nachgewiesen ist. Wenn nun Casper auf der Seite 73 der angef. Schrift mit solcher Entschiedenheit den Einfluß des Clima's und Bodens bekämpft und widerspricht, so ist uns schwer, Sinn und Bedeutung folgender Stelle, die sich auf der Seite 74 §. 26 findet, damit in Einklang zu bringen: »Die dem Preußischen Scepter unterworfenen Lande bieten in geographischer, nationeller, industrieller und anderer Beziehung solche Verschiedenheiten dar, daß es schwer wird, die Bewohner derselben unter den allgemeinen Gesichtspunkt ihrer Lebensdauer zusammenzufassen,« da diese Stelle mit der angeführten Behauptung in Widerspruch zu stehen scheint. Was ist unter geographischer Beziehung zu verstehen, wenn climatische und Bodenverhältnisse ausgeschlossen sind?

2) Beruf und Beschäftigung.

Der Beruf, dem ein Mensch lebt, oder die Beschäftigung, wodurch Jemand seine Existenz sichert, wird bedeutenden Einfluß auf die Gesundheit des Individuums und der Lebensdauer äußern, denn er kann dadurch in Verhältnisse gerathen, die sehr nachtheilig auf beide einwirken. Ueberblickt man die verschiedenen Berufsarten, denen sich die Menschen widmen, so liegt der Schluß nahe, daß ihre Ausübung manche Schwankungen in der Sterblichkeitsordnung und der Lebensdauer bedingen kann. Der Arzt wird durch seinen Beruf der Einwirkung ansteckender Krankheiten ausgesetzt, während der Geistliche und Staatsdiener dieser Gefahr weniger bloßgestellt ist. Die sitzende und wenig oder gar keine Bewegung erfordernde Lebensweise des Gelehrten und mancher Staatsdiener ꝛc. wird gewiß eine andere Wirkung auf Gesundheit und Lebensdauer haben, als der Beruf des Oekonomen, Forstmannes, Militairs ꝛc., der zur Bewegung und Aufenthalt in freier Luft auffordert. Die Ausübung der Gewerbe wird besondere Rücksicht verdienen, und es ist nicht zu erwarten, daß die so verschiedenen Beschäftigungen des Schneiders, Schuhmachers, des Webers u. s. w., des Gerbers, des Fleischers, des Steinhauers u. s. w., des Fabrikarbeiters, des Taglöhners, des Landmannes u. s. w. ohne allen Einfluß auf Gesundheit und Lebensdauer sein werden. Es liegen zwar schon einige hieher gehörige Arbeiten vor. So hat Rickmann die Sterblichkeitsverhältnisse von Districten,

worin Ackerbau getrieben wird, mit solchen verglichen, die von Manufacturen leben; Lombard eine Vergleichung von vielen Gewerben gegeben, und Casper Notizen über die Lebensdauer in verschiedenen Ständen, der Theologen, Aerzte, höheren Beamten, Militairs, Lehrer ꝛc., beigebracht. Die Masse der Thatsachen ist aber noch zu klein, um schon jetzt Gesetze daraus ableiten zu können. Diese Bemühungen sind dankbar hinzunehmen, und die weitere Verfolgung der hier angeregten Idee wird gewiß zu interessanten Resultaten führen.

3) Wohlstand.

Wenn der Wohlstand, worin der Einzelne lebt, auch nicht als das Mittel betrachtet werden kann, das Leben eines Menschen zu verlängern, so ist er doch wohl vor Allem dasjenige Mittel, um ein gut und mäßig geführtes Leben so lange als möglich zu erhalten. Wer im Wohlstande lebt, kann sich schonen, kann sich nach Anstrengungen und Abmühungen die nöthige Erholung gönnen, kann sich überhaupt leicht gegen schädliche Einflüsse des Clima's, des Temperaturwechsels ꝛc. schützen. Die Armuth, der Entbehrung und schweren Arbeit verfallen, in kalte, feuchte und ungesunde Wohnungen verbannt, bei schlechter Kleidung jeder Einwirkung der Kälte, der Witterung bloßgestellt, bei saurem Schweiße und kärglichem Tagelohn oft der nothwendigsten Lebensbedürfnisse entbehrend u. s. w., ist von aller Hülfe verlassen, welche der Wohlstand in reichem Maße bietet. So manche Erfahrungen bestätigen die hier ausgesprochene Behauptung. Die Epidemien finden eine reiche Ernte in den Wohnungen der Armuth, des Elends und des Hungers. Tontinisten und Rentenirer, überhaupt Leute des Wohlstandes haben nach allen hierüber bekannt gewordenen Thatsachen eine längere Lebensdauer, als Menschen aus der armen Classe. In Rücksicht auf diese Thatsachen wurde auch schon die Behauptung aufgestellt, daß die Größe der Lebensdauer einen Maßstab für den Wohlstand abgeben möge. Doch dürfte diese Behauptung ziemlich gewagt sein und möchte in manchen Fällen zu wunderlichen Consequenzen führen. Denn der Wohlstand als solcher verbürgt nicht eine längere Lebensdauer, sondern die zweckmäßige Verwendung der von ihm in reichlichem Maße dargebotenen Mittel. Die Abwege, worauf er führen kann, die Verweichlichung, Schwelgerei, Entnervung, Abstumpfung u. dergl., sind eben so viele Wege zu frühzeitigem Tode. Man könnte daher zuletzt zu dem ganz unerwarteten Schlusse gelangen, daß in den Hütten der Bewohner des Nordens und in den Schlafstätten der Negersklaven mehr Wohlstand herrsche, als in den gebildeten und wohlhabenden Ständen von Mitteleuropa, weil dort eine größere Lebensdauer als hier herrscht. Ben. d. Chateauneuf hat eine Vergleichung zwischen der Lebensdauer reicher und vom Glücke bevorzugter Personen und zwischen der armer Personen aufgestellt, welche die ausgesprochene Behauptung zu einer bedauerlichen Wahrheit machen.

4) Fortschritte der Civilisation in wissenschaftlicher, politischer, commercieller, gewerblicher Beziehung u. s. w.

Jeder Fortschritt in der Civilisation wird dem Menschengeschlechte eine angenehmere Existenz bereiten und dadurch ihm neue Mittel verschaffen, sein Leben möglichst lange zu erhalten. Die Hebung und Vervollkommnung der Gewerbe und der Industrie, die Förderung der commerciellen Verhältnisse wird ihm wohlfeilere Preise, größere Masse der Stoffe, bessere und gesundere Wohnungen schaffen, und wird dadurch auch dem weniger Bemittelten Genüsse geben, die er ohne sie nicht erhalten hätte. Die Entsumpfung feuchter Orte, die Urbarmachung unfruchtbarer Gegenden wird die Nahrungsstoffe vermehren; die Fortschritte der Heilkunde werden gute Dienste leisten; die Zeiten des Friedens, die Fortbildung in politischen Verhältnissen werden Wohlthätigkeitsanstalten, Sparcassen, Renten- und Lebensversicherungsanstalten u. s. w. gründen, welche ein angenehmes und langes Leben zu fristen im Stande sind.

Ob der eheliche Stand als solcher einen Einfluß auf die Lebensdauer habe, so zwar, daß sich verheirathete Personen einer größeren Lebensdauer zu erfreuen hätten, als unverheirathete, wie Manche behaupten, mag aus dem einfachen Grunde dahingestellt bleiben, weil wohl schwer zu ermitteln sein wird, wie viel Antheil die geregeltere Lebensweise hieran hat. Einer Prüfung möchte übrigens der Gedanke werth sein. Verfolgt man die hier berührte Idee weiter, so wird man zu der Behauptung geleitet, daß die Zunahme der Lebensdauer als Maßstab für den Fortschritt der Civilisation betrachtet werden könne.

§. 77.

Die im vorigen §. aufgeführten Punkte wurden deswegen etwas ausführlicher besprochen, weil sie die Grundlage abgeben, wornach die Beobachtungen bei Ermittelung des Gesetzes der Sterblichkeit im Menschengeschlechte angelegt und geleitet werden sollen. In keinem andern Zweige des Wissens tritt vielleicht mehr das Bedürfniß der Zusammenwirkung aller einzelnen Kräfte hervor, als in dem vorliegenden. Der Einzelne kann das Material, welches zur Beantwortung der angeregten Frage in der Ausdehnung nöthig ist, wie sie gemacht werden muß, nicht herbeischaffen und zugleich verarbeiten. Es müssen Viele an verschiedenen Orten und in verschiedenen Richtungen thätig sein, um das gewünschte Ziel zu erreichen. Daher ist vor Allem nöthig, daß man sich über die Grundzüge vereinige, nach welchen die Arbeiten im Einzelnen angelegt und ausgeführt werden sollen, um den gewünschten Zweck zu erreichen. Auf die Nothwendigkeit einer Verständigung sollen die im vorigen §. gemachten Bemerkungen hinweisen, damit nicht der Einzelne umsonst, weil planlos, arbeite. Es ist allerdings bis jetzt, Dank der

Mühe, welche so viele Gelehrte dieser Arbeit gewidmet haben, Vieles geschehen und vorbereitet. In gar vielen Fällen hat man jedoch die ersten Untersuchungen und Versuche vorerst nur überschritten. Das Material, welches zur Verarbeitung nöthig wird, kann nicht von dem Einzelnen, sondern muß von den Staaten beigeschafft werden, und es ist daher vor Allem nöthig, daß alle Volkszählungen, welche die Staaten von Zeit zu Zeit anordnen, in der Weise vorgenommen werden, daß sie den Stoff zur weiteren Verarbeitung abgeben, wobei die im vorigen §. aufgeführten Momente zur Berücksichtigung kommen.

Die unter a, Nr. 2 und 3 § 76 angeführten Rubriken, welche gewiß von Einwirkung auf die Lebensdauer sind, werden sich wohl kaum der Beobachtung unterwerfen lassen. Die Beobachtungen sind daher hauptsächlich auf a, Nr. 1 und 4 und b, Nr. 1, 2, 3 und 4 auszudehnen, und es dürfte daher vor Allem die Aufmerksamkeit bei Anlegung der Tabellen, welche zur Ermittelung des Sterblichkeitsgesetzes unter den Menschen dienen sollen, auf sie zu richten sein. Hiernach sind die Tabellen bei Volkszählungen so anzulegen, daß die Personen nach ihrem Geschlechte, Alter (Zahl der Lebenden und Zahl der Gestorbenen), Beruf, Beschäftigung, Gewerbe eingezeichnet werden, daß die örtlichen und climatischen Verhältnisse angegeben sind, Länge und Breite des Ortes, Höhe über der Meeresfläche, mittlerer Barometerstand, Temperatur ꝛc. Ein Schema für alle die hieraus sich ergebenden Rubriken ließe sich leicht entwerfen, so daß die nöthigen Einzeichnungen im Laufe eines Jahres an jedem einzelnen Orte leicht gewonnen und in tabellarische Uebersicht gebracht werden könnten. Die Fortführung solcher Tabellen durch eine hinreichende Reihe von Jahren müßte gewiß zu nicht unwichtigen Resultaten führen und die Entscheidung der Frage fördern. Hiebei ist hauptsächlich die Ermittelung des Sterblichkeitsgesetzes nach einzelnen Richtungen hin in's Auge zu fassen. Die Darstellung eines allgemeinen Gesetzes ist wohl gedenkbar. Sie ergiebt sich auch alsbald aus der Vereinigung aller speciellen. Es wäre aber nur ein Gesetz, in Zahlen ausgesprochen, das keine Anwendung fände, weil es im Einzelnen unbrauchbar und unwahr wäre und daher auch keine Bedeutung hätte.

§. 78.

Da nun das Schema festgestellt ist, nach dem man bei Fertigung der Tabellen zu verfahren hat, so wenden wir uns zur Darstellung der Methoden, welche man befolgen kann und zum Theil befolgt hat, um das Gesetz der Sterblichkeit in den bisher bezeichneten besonderen Richtungen zu ermitteln. Wir wählen dabei folgende Entwickelungsweise.

Die Zahl der Lebenden soll künftig durch A, und die der Gestorbenen durch M angezeigt werden, und zwar so, daß A_1 die Zahl der Individuen,

welche zwischen 0 und 1 Jahr; A_2 die Zahl der Individuen, welche zwischen 1 und 2 Jahre; A_3 die Zahl derjenigen, welche zwischen 2 und 3 Jahre alt sind u. s. w. andeute. Die nämliche Bezeichnung soll für M_1, M_2, M_3, ... beibehalten werden. Es bedeutet also M_1 die Zahl derjenigen, welche im Laufe des ersten, M_2 die Zahl derjenigen, welche im Laufe des zweiten Jahres gestorben sind u. s. f. Nennt man nun die Zahl aller derjenigen, welche im Laufe eines Jahres geboren wurden, A, und nimmt an, daß diese so absterben, daß von ihnen die Zahl A_1 am Ende des ersten Jahres, und daß von ihnen die Zahl A_2 am Ende des 2ten Jahres noch lebt u. s. w., und setzt die äußerste Grenze der menschlichen Lebensdauer auf 100 Jahre, so giebt folgende Reihe die Zahl derer an, welche in den verschiedenen Jahren von den in einem Jahre Geborenen (A) noch leben:

1) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, \ldots . A_{96}, A_{97}, A_{98}, A_{99}, A_{100}$

In dieser Reihe liegt das Sterblichkeitsgesetz. Wüßte man nämlich das Gesetz, wornach die Durchlebungen vor sich gehen, so wüßte man auch, in welcher Ordnung das Absterben geschieht, denn man könnte aus der Zahl der Ueberlebenden die Zahl der jeweils Gestorbenen ableiten. Dies Gesetz ist aber nicht bekannt, sondern soll gesucht werden. Um nun Methoden für seine Ableitung aufzufinden, nehme man ferner an, daß in irgend einem Jahre A Individuen geboren worden seien, die nach dem Gesetze 1 allmälig in 100 Jahren absterben, daß in dem folgenden Jahre die nämliche Zahl A geboren werde, die genau wieder nach dem nämlichen Gesetze abstirbt, und fahre so beliebig fort, so kann man hieraus ein Schema construiren, welches zeigt, wie die einzelnen Individuen, welche der Reihe nach in den verschiedenen Jahren in gleicher Anzahl geboren werden, sich nach ihrem Lebensalter durcheinander schieben. Dies verdeutlicht sich durch folgende Darstellung:

2)
$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \ldots . A_{96}, A_{97}, A_{98}, A_{99}, A_{100}$
$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \ldots . A_{95}, A_{96}, A_{97}, A_{98}, A_{99}, A_{100}$
$A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots . A_{94}, A_{95}, A_{96}, A_{97}, A_{98}, A_{99}, A_{100} \ldots$
$A_1, A_2, A_3 \ldots . A_{93}, A_{94}, A_{95}, A_{96}, A_{97}, A_{98}, A_{99} \ldots$
$A_1, A_2 \ldots . A_{92}, A_{93}, A_{94}, A_{95}, A_{96}, A_{97}, A_{98} \ldots$
$A_1 \ldots . A_{91}, A_{92}, A_{93}, A_{94}, A_{95}, A_{96}, A_{97} \ldots$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 \ldots$
$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \ldots$
$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \ldots$
$A_1, A_2, A_3, A_4 \ldots$
$A_1, A_2, A_3 \ldots$
$A_1, A_2 \ldots$
$A_1 \ldots$

Dieses Schema zeigt von der drittletzten Reihe an das Sterblichkeitsgesetz, so wie es in 1 angegeben ist, vollständig. Man kann nun das Schema nach der rechten Seite hin beliebig fortsetzen. Jede neu hinzutretende Vertikalreihe wird das nämliche Gesetz enthalten. Man kann aber auch nach der Linken hin das Schema ausfüllen, indem man die Reihen vervollständigt. Geschieht dies, so ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

3) A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 . . . . . A_{96}, A_{97}, A_{98}, A_{99}, A_{100}
A_{100}, A_1, A_2, A_3, A_4 . . . . . A_{95}, A_{96}, A_{97}, A_{98}, A_{99}
A_{99}, A_{100}, A_1, A_2, A_3 . . . . . A_{94}, A_{95}, A_{96}, A_{97}, A_{98}
A_{98}, A_{99}, A_{100}, A_1, A_2 . . . . . A_{93}, A_{94}, A_{95}, A_{96}, A_{97}
A_{97}, A_{98}, A_{99}, A_{100}, A_1 . . . . . A_{92}, A_{93}, A_{94}, A_{95}, A_{96}
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10} . . . . . A_1, A_2, A_3, A_4, A_5
A_5, A_6, A_7, A_8, A_9 . . . . . A_{100}, A_1, A_2, A_3, A_4
A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 . . . . . A_{99}, A_{100}, A_1, A_2, A_3
A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 . . . . . A_{98}, A_{99}, A_{100}, A_1, A_2
A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 . . . . . A_{97}, A_{98}, A_{99}, A_{100}, A_1

Die beiden Darstellungen 2 und 3 zeigen das nämliche Gesetz und fallen zusammen, wenn in ihnen alle Reihen vervollständigt sind. Die Horizontalreihen in beiden deuten an, wie das Ableben der Menschen im Laufe der Zeit vor sich geht. Die Vertikalreihen deuten dagegen an, in welcher Weise die Menschen verschiedenen Alters gleichzeitig untereinander leben. Dies führt zu folgendem nicht unwichtigen Satze:

4) Das Gesetz, welches angiebt, wie die Ueberlebungen unter einer Zahl gleichzeitig Geborner (A) stattfinden, fällt mit dem Gesetz zusammen, welches angiebt, wie die Menschen von den verschiedenen Lebensaltern gleichzeitig zusammen leben, unter der Voraussetzung, daß die Elemente, worauf die Reihe 1 gegründet ist, sich nicht ändern.

Das eben angegebene Gesetz gilt daher nur, wenn die Ordnung in der Sterblichkeit sich nicht ändert, und wenn jährlich die gleiche Zahl von Individuen geboren wird, also die Bevölkerung im Beharrungszustande bleibt.

Ganz ähnliche Gesetze ergeben sich, wenn man die Zahl der Sterbenden der Betrachtung zu Grunde legt. Wird die Zahl der in einem Jahre Geborenen wie oben durch A bezeichnet, so werden sie sämmtlich in einem Zeitraum von 100 Jahren sterben. Die Ordnung, worin nun das Absterben erfolgt, ist in folgender Reihe enthalten:

5) $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, \ldots\ldots M_{96}, M_{67}, M_{98}, M_{99}, M_{100}$

so zwar, daß in diesem Falle:

6) $A = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \ldots + M_{97} + M_{98} + M_{99} + M_{100}$

ist. Nun kann man auf ganz gleiche Weise, wie in 2 und 3 geschah, ein

Schema für die Sterbenden entwerfen. Hiedurch wird man zu folgender Darstellung geführt:

7)
$$\begin{array}{l}
M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 \ldots\ldots M_{96}, M_{97}, M_{98}, M_{99}, M_{100} \\
M_{100}, M_1, M_2, M_3, M_4 \ldots\ldots M_{95}, M_{96}, M_{97}, M_{98}, M_{99} \\
M_{99}, M_{100}, M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots M_{94}, M_{95}, M_{96}, M_{97}, M_{98} \\
M_{98}, M_{99}, M_{100}, M_1, M_2 \ldots\ldots M_{93}, M_{94}, M_{95}, M_{96}, M_{97} \\
M_{97}, M_{98}, M_{99}, M_{100}, M_1 \ldots\ldots M_{92}, M_{93}, M_{94}, M_{95}, M_{96} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
M_6, M_7, M_8, M_9, M_{10} \ldots\ldots M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 \\
M_5, M_6, M_7, M_8, M_9 \ldots\ldots M_{100}, M_1, M_2, M_3, M_4 \\
M_4, M_5, M_6, M_7, M_8 \ldots\ldots M_{99}, M_{100}, M_1, M_2, M_3 \\
M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 \ldots\ldots M_{98}, M_{99}, M_{100}, M_1, M_2 \\
M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 \ldots\ldots M_{97}, M_{98}, M_{99}, M_{100}, M_1
\end{array}$$

Die Horizontalreihen zeigen an, wie das Absterben in einem Zeitraum von 100 Jahren an A Individuen allmälig, die Vertikalreihen dagegen, in welcher Weise dies im Laufe eines Jahres gleichzeitig an derselben Zahl von Individuen (A) vor sich geht. Die Horizontalreihen und Vertikalreihen enthalten dasselbe Gesetz. Dies führt zu folgendem Satze:

8) Das Absterben irgend einer Anzahl gleichzeitig Geborner (A) erfolgt während der Periode einer ganzen Lebensdauer nach demselben Gesetz, in welchem das Absterben der nämlichen Zahl (A) gleichzeitig Lebender erfolgt.

Auch dieses Gesetz gilt unter den nämlichen Bedingungen, wie das in 4 aufgestellte. Es setzt also voraus, daß das Gesetz in der Sterblichkeitsordnung (5) unverändert bleibt, oder nicht wesentlich gestört wird, und daß die Zahl der Sterbenden der Zahl der Geburten gleich und die Bevölkerung im Beharrungszustande bleibt.

Man erkennt leicht, welcher Zusammenhang zwischen den Darstellungen 1, 2 und 3 und denen in 5 und 6 herrscht. Er ist folgender:

$$A_1 - A_2 = M_1,\ A_2 - A_3 = M_2,\ A_3 - A_4 = M_3, \ \ldots$$

oder allgemein:

$$9)\quad A_n - A_{n+1} = M_n$$

Es würde also genügen, nur eine von beiden Darstellungen festzuhalten, da man nach 9 von einer auf die andere übergehen kann. Doch möchte es gut sein, beide zu benutzen, da die eine die Controlle für die Richtigkeit der andern giebt.

Die in 1—8 mitgetheilten Gesetze gelten, wie bemerkt, nur unter den oben angegebenen Bedingungen, also für den Fall, wenn die Bevölkerung im Beharrungszustande ist und die Gesetze der Sterblichkeit sich nicht ändern. Sie lassen sich jedoch leicht auf den Fall ausdehnen, wenn Veränderungen in der Bevölkerung eintreten. Aendert sich daher die Zahl der jährlichen Geburten, so werden sich auch andere Darstellungen ergeben. Nimmt

man an, daß sich die Zahl der Geburten, A, jährlich beliebig ändere, und daß sie der Reihe nach übergehe in A, $\gamma_1 A$, $\gamma_2 A$, $\gamma_3 A$, ..., so wird diese Aenderung auch auf die Reihen 1 und 5 übergehen, und man erhält dann hiefür:

10) $\gamma_1 A_1, \gamma_1 A_2, \gamma_1 A_3, \gamma_1 A_4, \gamma_1 A_5, \ldots\ldots \gamma_1 A_{99}, \gamma_1 A_{100}$
$\gamma_2 A_1, \gamma_2 A_2, \gamma_2 A_3, \gamma_2 A_4, \gamma_2 A_5, \ldots\ldots \gamma_2 A_{99}, \gamma_2 A_{100}$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$

11) $\gamma_1 M_1, \gamma_1 M_2, \gamma_1 M_3, \gamma_1 M_4, \gamma_1 M_5, \ldots\ldots \gamma_1 M_{99}, \gamma_1 M_{100}$
$\gamma_2 M_1, \gamma_2 M_2, \gamma_2 M_3, \gamma_2 M_4, \gamma_2 M_6, \ldots\ldots \gamma_2 M_{99}, \gamma_2 M_{100}$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$

Denn es wird sich die Veränderung in der Zahl der Geburten auf die Ueberlebenden und auf die Absterbenden übertragen, und es werden, je nachdem mehr oder weniger geboren werden, im Verlaufe der Zeit mehr oder weniger leben und sterben, so wie das Gesetz der Sterblichkeit im normalen Zustande gebietet. Wendet man diese Bemerkungen auf das Schema 2 an, so leitet sich hieraus folgendes ab:

12) $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \ldots\ldots A_{97}, A_{98}, A_{99}, A_{100}$
$\gamma_1 A_1, \gamma_1 A_2, \gamma_1 A_3, \gamma_1 A_4 \ldots\ldots \gamma_1 A_{96}, \gamma_1 A_{97}, \gamma_1 A_{98}, \gamma_1 A_{99}, \gamma_1 A_{100}$
$\gamma_2 A_1, \gamma_2 A_2, \gamma_2 A_3 \ldots\ldots \gamma_2 A_{95}, \gamma_2 A_{96}, \gamma_2 A_{97}, \gamma_2 A_{98}, \gamma_2 A_{99}, \gamma_2 A_{100}$
$\gamma_3 A_1, \gamma_3 A_2 \ldots\ldots \gamma_3 A_{94}, \gamma_3 A_{95}, \gamma_3 A_{96}, \gamma_3 A_{97}, \gamma_3 A_{98}, \gamma_3 A_{99}$
$\gamma_4 A_1 \ldots\ldots \gamma_4 A_{93}, \gamma_4 A_{94}, \gamma_4 A_{95}, \gamma_4 A_{96}, \gamma_4 A_{97}, \gamma_4 A_{98}$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$\gamma_{96} A_1, \gamma_{96} A_2, \gamma_{96} A_3, \gamma_{96} A_4, \gamma_{96} A_5, \gamma_{96} A_6$
$\gamma_{97} A_1, \gamma_{97} A_2, \gamma_{97} A_3, \gamma_{97} A_4, \gamma_{97} A_5$
$\gamma_{98} A_1, \gamma_{98} A_2, \gamma_{98} A_3, \gamma_{98} A_4$
$\gamma_{99} A_1, \gamma_{99} A_2, \gamma_{99} A_3 \ldots$
$\gamma_{100} A_1, \gamma_{100} A_2 \ldots$
$\gamma_{101} A_1 \ldots$

13) $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 \ldots\ldots M_{97}, M_{98}, M_{99}, M_{100}$
$\gamma_1 M_1, \gamma_1 M_2, \gamma_1 M_3, \gamma_1 M_4 \ldots\ldots \gamma_1 M_{96}, \gamma_1 M_{97}, \gamma_1 M_{98}, \gamma_1 M_{99}, \gamma_1 M_{100}$
$\gamma_2 M_1, \gamma_2 M_2, \gamma_2 M_3 \ldots\ldots \gamma_2 M_{95}, \gamma_2 M_{96}, \gamma_2 M_{97}, \gamma_2 M_{98}, \gamma_2 M_{99} \ldots$
$\gamma_3 M_1, \gamma_3 M_2 \ldots\ldots \gamma_3 M_{94}, \gamma_3 M_{95}, \gamma_3 M_{96}, \gamma_3 M_{97}, \gamma_3 M_{98} \ldots$
$\gamma_4 M_1 \ldots\ldots \gamma_4 M_{93}, \gamma_4 M_{94}, \gamma_4 M_{95}, \gamma_4 M_{96}, \gamma_4 M_{97} \ldots$
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$\gamma_{96} M_1, \gamma_{96} M_2, \gamma_{96} M_3, \gamma_{96} M_4, \gamma_{96} M_5 \ldots$
$\gamma_{97} M_1, \gamma_{97} M_2, \gamma_{97} M_3, \gamma_{97} M_4 \ldots$
$\gamma_{98} M_1, \gamma_{98} M_2, \gamma_{98} M_3 \ldots$
$\gamma_{99} M_1, \gamma_{99} M_2 \ldots$
$\gamma_{100} M_1 \ldots$

Vergleicht man nun in den beiden Darstellungen 12 und 13 die Horizontalreihen mit den Vertikalreihen, so erkennt man leicht, daß beide ganz

verschiedenen Gesetzen unterliegen, daß also die in 4 und 8 aufgefundenen Gesetze sich nicht auf die Darstellungen 12 und 13 anwenden lassen. Hieraus rechtfertigt sich folgender Satz:

14) Ist die Bevölkerung nicht im Beharrungszustande, so zeigen nur die Horizontalreihen in 12 und 13 das Gesetz der Sterblichkeit, nicht aber die Vertikalreihen.

Alle die in diesem §. aufgefundenen Darstellungen und Gesetze gelten endlich unter der Voraussetzung, daß das Gesetz der Sterblichkeit selbst sich nicht ändere. Aendert sich aber dieses, wie z. B. durch den Einfluß der Kuhpockenimpfung geschah, so bleiben zwar die vorliegenden Schemata ihrer Anlage und Bedeutung nach in Kraft; die Gesetze selbst aber, die aus ihnen abgeleitet wurden, verlieren ihre Gültigkeit. Hieraus dürfte sich folgender Satz rechtfertigen:

15) Diejenigen Gesetze, welche vor einer Aenderung in der Sterblichkeitsordnung aufgefunden wurden, können keine Gültigkeit mehr nach derselben haben.

Dies möchte der Fall bei allen den Tabellen sein, welche vor der Kuhpockenimpfung für das Gesetz der Sterblichkeit aufgestellt wurden. Sie können nur noch historische Bedeutung haben, und können nicht wohl mehr in Anwendung kommen. Die Aufstellung neuer, richtig construirter Sterblichkeitstafeln ist daher von großer Bedeutung. Der Einfluß eines solchen Uebergangs ist natürlich von Wichtigkeit, denn die Wirkung tritt nicht auf einmal ein und dehnt sich plötzlich auf das ganze Menschengeschlecht aus, sondern schreitet nach Maaßgabe der Tabellen 12 und 13 allmälig von Jahr zu Jahr vorwärts und umfaßt erst nach vielen Jahren die ganze Bevölkerung. Das Gesagte gilt, jedoch nicht in so ausgedehntem Sinne, auch von Seuchen und Kriegsjahren. Ihre erste Einwirkung ist zwar auf einen bestimmten Zeitraum beschränkt. Sie ändern daher das Gesetz der Sterblichkeit im Allgemeinen nicht, stören es aber in seinem gewohnten Entwickelungsgang, ändern daher wenigstens auf die zunächst folgende Zeit, vielleicht auf die ganze Lebensdauer der Betroffenen, die Zahlenverhältnisse, welche die Träger des Gesetzes selbst sind.

§. 79.

Aus den im vorigen §. aufgestellten Sätzen ergeben sich nun leicht folgende Methoden zur Ermittelung des Sterblichkeisgesetzes und zugleich das Urtheil über ihre Richtigkeit:

a) Erste Methode nach 3 §. 78. Man ermittle die Zahl (A) aller an einem Orte oder in einem Bezirke gleichzeitig Lebender nach ihrem Alter, theile sie nach letzterem von Jahr zu Jahr in Classen, wodurch die Reihe

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \ldots\ldots A_{98}, A_{99}, A_{100}$$

entsteht, so geben die Zahlenverhältnisse dieser Reihe das Gesetz der Lebensdauer, also auch das der Sterblichkeit nach 5, 6 und 9 §. 78.

Diese Methode giebt nur unter den bei 3 §. 78 gemachten Voraussetzungen ein richtiges Resultat. Die Bevölkerung, auf welche sie angewendet werden soll, muß im Beharrungszustande sein nicht allein für die Zeit, worin sie angewendet wird, sondern auch für den ganzen Zeitraum, welcher die Lebensgrenze einschließt. Sie geht hiernach auf eine ferne Zeit zurück, nämlich auf die Geburt der längst Lebenden, und verlangt zugleich, daß sich im Laufe dieser Zeit das Gesetz der Sterblichkeit nicht geändert habe. Sind diese Bedingungen nicht vorhanden, so führt sie auf ein unrichtiges Resultat. Kann man nicht nachweisen, daß sie für die fragliche Zeit vorhanden waren, so führt sie auf ein unverbürgtes. Alle vorliegenden, hieher gehörigen Beobachtungen haben theils gezeigt, theils machen sie es ganz wahrscheinlich, daß die Bevölkerung durch eine lange Reihe von Jahren nicht im Beharrungszustande war. Daher dürften auch alle, auf diese Methode gegründete Beobachtungen keine richtige, jedenfalls keine zuverlässige Resultate geben. Wird sie dennoch auf eine Bevölkerung, welche nicht, oder doch nur eine Zeitlang im Beharrungszustande ist, angewendet, so muß sie auf ein falsches Gesetz führen. Man kann nun nach den im vorigen §. angegebenen Sätzen den Einfluß bemessen, welchen ihre Anwendung auf eine Bevölkerung äußert, die im Zustande der Bewegung ist. Wir nehmen an, die Bevölkerung sei im Zunehmen, und um die Aufgabe festzustellen, seit zehn Jahren im Zunehmen begriffen, so wird sich in Rücksicht auf die Darstellungen 10 und 12 §. 78 folgendes Schema für alle in einem bestimmten Zeitpunkt zusammen Lebende nach ihrem Alter geben:

1) $\gamma_{10} A_1, \gamma_9 A_2, \gamma_8 A_3, \gamma_7 A_4, \ldots \gamma_2 A_9, \gamma_1 A_{10}, A_{11}, A_{12}, \ldots\ldots A_{98}, A_{99} A_{100}$

Da die Bevölkerung im Zunehmen begriffen ist, so müssen auch die Coefficienten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ zunehmen. Es werden daher auch für die Zeit der Zunahme mehr Individuen unter der Zahl der Lebenden aufgeführt werden, als in dem Falle, wenn die Bevölkerung im Beharrungszustande ist. Die Zahlenverhältnisse stellen sich also in diesem Falle günstiger als bei dem Beharrungszustande. Nimmt die Bevölkerung ab, so nehmen auch die Coefficienten ab: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \ldots$ und es tritt das Gegentheil ein. Dies führt zu folgender Behauptung:

2) Wird das Gesetz für die Zahlenverhältnisse in der Reihe 1 §. 78 nach der unter a angegebenen Methode, also aus der Zahl der gleichzeitig Lebenden ermittelt, so zeigen sich zu große Resultate für die Zeit, worin die Bevölkerung im Zunehmen, zu kleine für diejenige, worin sie im Abnehmen begriffen, richtige für die Zeit, worin sie im Beharrungszustande war.

Zugleich erkennt man, daß die angeführte Methode dennoch auf ein richtiges Resultat führen wird, wenn die Coefficienten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \ldots$

welche die Größe der Zu- oder Abnahme in der Bevölkerung angeben und die ursprüngliche Zahl der Individuen bekannt wäre, als die Zunahme anfing. Man könnte dann die nöthigen Reductionen und Correctionen anbringen, um hiedurch ein richtiges Resultat zu erhalten. Da aber die nöthigen hieher bezüglichen Angaben aus den frühern Zeiten fehlen, so wird auf diesem Wege kaum wohl ein sicheres Resultat zu erzielen sein. Werden genaue Aufzeichnungen in dem hier angedeuteten Sinne gemacht, so können sie dazu dienen, künftig das richtige Gesetz der Durchlebungen aufzufinden.

b) Zweite Methode nach 7 §. 78.

Man verfertige ein genaues Verzeichniß über die Zahl derer, welche im Laufe eines Jahres an einem Orte oder in einer Gegend sterben, theile sie nach ihrem Alter von einem Jahre zum andern in Classen, wodurch die Reihe

$$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 \ldots\ldots M_{98}, M_{99}, M_{100}$$

entsteht, so ergiebt sich hieraus das Gesetz, wornach die in dem Verzeichnisse aufgeführte Zahl stirbt. Begreifen die Aufzeichnungen eines Jahres nicht eine hinlängliche Zahl von Individuen, so kann man das angegebene Verfahren mehrere Jahre fortsetzen, bis die Zahl der Verstorbenen eine solche Summe umfaßt, um ein verläßliches Resultat zu verbürgen. Hat man auf diese Weise die Zahl der Verstorbenen gefunden, so kann man hieraus auch die Zahl der Ueberlebenden finden, denn es ist aus 6 §. 78:

3) $A = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \ldots\ldots M_{98} + M_{99} + M_{100}$.

Ferner ist aus 9 §. 78:

4) $A_{n+1} = A_n - M_n$.

Hieraus gewinnt man folgende Ableitungen:

5)
$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 - M_1 \\ A_3 &= A_2 - M_2 \\ A_4 &= A_3 - M_3 \\ A_5 &= A_4 - M_4 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \end{aligned}$$

Diese Methode wurde zuerst von Halley angewendet, und bisher häufig benutzt. Sie gilt wie die vorige unter der Voraussetzung, daß die Bevölkerung nicht allein für die Zeit, in welcher sie gemacht wurde, sondern auch für den Zeitraum der ganzen Lebensdauer im Beharrungszustande ist, und daß das Sterblichkeitsgesetz im Laufe dieses Zeitraumes sich nicht geändert hat. In allen andern Fällen wird diese Methode, wenn sie dennoch angewendet wird, ein unrichtiges, wenigstens ein unverbürgtes Resultat liefern. Es ist aber kaum zu erwarten, daß die Bevölkerung während einer Dauer von 80—100 Jahren an einem Orte oder in einer Gegend im Beharrungszustande geblieben wäre oder bleiben werde. Daher ist auch diese Methode keineswegs praktisch, ob sie gleich häufig in Anwen-

dung kam. Ihre Anwendung veranlaßt jedoch keine besondere Schwierigkeiten, und da man die annähernden Resultate, worauf sie führt, für hinlänglich hielt, so mag dies wohl der Grund sein, daß sie häufig benutzt wurde. Halley hat die Todesfälle der Stadt Breslau in einem Zeitraume von fünf Jahren, während welcher die Bevölkerung dieser Stadt im Beharrungszustande war, seiner Rechnung zu Grunde gelegt und daraus eine Sterblichkeits-Tafel abgeleitet, gegen deren Brauchbarkeit schon Süßmilch in seinem Werke (2ter Thl. S. 326) gegründete Zweifel erhebt. Zudem umfaßt seine Tafel nur 5869 Todesfälle, welches eine zu kleine Zahl von Individuen sein dürfte, um dadurch ein allgemeines Gesetz begründen zu können.

Wendet man die im vorigen §. aufgestellten Sätze auf die angeführte Methode an, so kann man den Fehler erkennen, welcher durch das von ihr vorgeschriebene Verfahren in das Resultat eingeschoben wird. Der Einfachheit und der Vergleichung wegen gehen wir von den nämlichen Annahmen aus, welche gemacht wurden, um die Unrichtigkeit der unter a aufgestellten Methode zu zeigen. Wir setzen daher den Fall, daß eine Bevölkerung seit zehn Jahren im Zunehmen begriffen sei, während sie in allen frühern, die höchste Lebensgrenze umschließenden Jahren im Beharrungszustande war. Hiernach wird in Rücksicht auf 11 §. 78 und das Schema 7 das Gesetz, wornach die Sterbefälle in einem und demselben Jahre vor sich gehen, folgendes sein:

6) $\gamma_{10}M_1, \gamma_9M_2, \gamma_8M_3, \gamma_7M_4, \ldots \gamma_2M_9, \gamma_1M_{10}, M_{11}, M_{12}, \ldots M_{99}, M_{100}$

Ist nun die Bevölkerung im Zunehmen begriffen, so müssen auch die Coefficienten, welche die Zunahme andeuten, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \ldots$, wachsen. Es müssen sich daher für die Zeit der Zunahme die Todesfälle vermehren, und es werden daher für diese Zeit mehr Individuen unter den Todten aufgeführt werden, als aufgeführt worden wären, wenn die Bevölkerung im Beharrungszustande blieb. Die Zahlenverhältnisse stellen sich daher für diese Zeit größer, als im Beharrungszustande dar. Hiernach findet man unter dieser Voraussetzung ein günstigeres Resultat für die Sterblichkeit und ein ungünstigeres für die Lebensdauer. Nimmt aber die Bevölkerung ab, so nehmen auch die Coefficienten $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ ab, und es tritt das Gegentheil ein. Schwankt der Zustand der Bevölkerung, so müssen sich diese Schwankungen auch in dem Gesetze der Sterblichkeit zeigen. Diese Bemerkungen rechtfertigen folgenden Satz:

7) Wird das Gesetz für die Reihe 5 §. 78 (Gesetz der Sterblichkeit) nach der unter b angegebenen Methode, also aus der Zahl der in einem gegebenen Zeitraume Gestorbenen, ermittelt, so zeigen sich zu große Zahlenverhältnisse für die Zeit, worin die Bevölkerung im Zunehmen, zu kleine für die Zeit, worin sie im Abnehmen begriffen, richtige für die Zeit, worin sie im Beharrungszustande war.

Man kann nun dennoch richtige Verhältnisse erhalten, wenn die Coefficienten

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \ldots$ welche die Zu= und Abnahme angeben, bekannt sind, denn es lassen sich dann die nöthigen Reductionen anbringen, um die Zahlenverhältnisse, welche sich aus dem Zustande der Bewegung in der Bevölkerung ergeben, auf die im Beharrungszustande gültigen zurückzuführen.

Vergleicht man nun die in 2 und 7 aufgestellten Sätze miteinander, so führen sie scheinbar auf widersprechende Resultate, während sie sich gegenseitig ergänzen und auf ein und dasselbe Gesetz führen. Der Satz 2 bezieht sich auf Ueberlebungen, oder Lebensdauern der Individuen, der Satz 7 auf das Absterben derselben. Die Begriffe des Ueberlebens und des Absterbens sind offenbar nur verschiedene Ansichten einer und derselben Sache, bedingen und ergänzen sich gegenseitig, und der eine Begriff setzt den andern voraus und führt auf ihn. Der Satz 2 behauptet, daß sich die Ueberlebungen vergrößern, wenn die Bevölkerung zunimmt, der Satz 7, daß sich die Sterblichkeit vergrößert, wenn die Bevölkerung zunimmt, und umgekehrt. Jeder Satz für sich deutet auf den Gegensatz von dem, was der andere behauptet, denn wenn die Ueberlebungen in der That auf günstigere Resultate führten, so müßte, wenn aus ihnen allein das Gesetz für die Sterblichkeit abgeleitet werden sollte, die Sterblichkeit abnehmen, und umgekehrt. Wenn die Sterblichkeitsverhältnisse auf größere Zahlen führten, so müßte, wenn aus ihnen allein dieses Gesetz abgeleitet würde, die Sterblichkeit zunehmen und folglich die Lebensdauern oder Ueberlebungen abnehmen. Werden die beiden Sätze in dieser Getrenntheit aufgefaßt, so führen sie auf Sätze, die mit sich und mit den Sätzen 10 und 11 §. 78, aus denen sie abgeleitet wurden, im Widerspruch stehen. Da aber die Richtigkeit der Sätze in 10 und 11 nicht wohl in Zweifel gezogen werden kann, so dürfen die Sätze 2 und 7 nicht in ihrer Getrenntheit, denn in solcher sind sie unwahr und führen, wie bisher gezeigt wurde, auf unrichtige und deswegen unbrauchbare Resultate, sondern müssen zusammen bestehend und als gegenseitig sich ergänzend aufgefaßt und angewendet werden. Faßt man sie zusammen, so haben sie folgenden Inhalt:

8) Bleibt das Gesetz der Sterblichkeit ungeändert und ungestört, so ist mit Vergrößerung und Verkleinerung der Zahlen in den Ueberlebungen eine Vergrößerung und Verminderung in dem Absterben verbunden.

9) Die Zunahmen und Abnahmen in den Verhältnißzahlen der Ueberlebungen deuten für sich nicht auf Zunahme und Abnahme der Lebensdauer, oder auf Abnahme und Zunahme in der Sterblichkeit. Ebenso deuten die Zunahme und Abnahme in den Verhältnißzahlen der Sterbenden für sich nicht auf Zunahme und Abnahme in der Sterblichkeit oder auf Abnahme und Zunahme in der Lebensdauer.

10) Jede von den genannten Erscheinungen kann für sich bestehen, ohne daß der Schluß auf eine Aenderung in der Sterblichkeitsordnung begründet

wird. Aendern sich aber beide Erscheinungen gleichzeitig, so ist der Schluß auf eine Aenderung im Sterblichkeitsgesetze begründet.

Beide Erscheinungen ergänzen sich und dienen zu gegenseitiger Prüfung. Hiedurch ist man auf eine andere und folgende Methode zu Ermittelung des Sterblichkeitsgesetzes geführt.

c) Dritte Methode. Sie beruht auf gleichzeitiger Anwendung der Darstellungen 12 und 13 §. 78. Man ermittle die Zahl aller, welche im Laufe eines Jahres geboren wurden und welche aus den verschiedenen Lebensaltern zusammen gelebt haben, ermittle ferner die Zahl aller, welche in demselben Jahre gestorben sind, und bestimme hieraus die Verhältnißzahlen für die Sterblichkeit. Zu dem Ende wird nöthig, die Zahl aller, die im 1sten, 2ten, 3ten Jahre u. s. w., überhaupt in den verschiedenen Lebensjahren zusammen lebten, nach den Alterstufen zu ordnen, ebenso die Zahl der Gestorbenen und die hieraus sich ergebenden Zahlen zu vergleichen. Dies Verfahren setze man so lange fort, bis man zu hinlänglich großen Zahlen gekommen ist, welche ein sicheres Resultat verbürgen.

Die Anwendung dieser Methode gewährt ein richtiges Resultat, die Bevölkerung mag im Zustande der Beharrung oder der Bewegung sein. Ist sie im Zustande der Beharrung, so ist die Sache an und für sich klar. Ist sie im Zustande der Bewegung, so werden die Darstellungen 12 und 13 dazu dienen, die Behauptung zu rechtfertigen. Man nehme an, eine Bevölkerung sei für die ganze Periode der menschlichen Lebensdauer im Zustande der Bewegung, so geben die Darstellungen 12 und 13 an, wie die in einer bestimmten Zeit zusammenlebenden Menschen aus den verschiedenen Altersclassen untereinander gemischt sind. Hebt man daher die zwei correspondirenden Vertikalreihen aus 12 und 13 hervor und vergleicht sie mit einander, so erhält man folgende Zusammenstellung:

$$
\begin{array}{rlll}
11) & \gamma_1 A_{100} : \gamma_1 M_{100} & = A_{100} : & M_{100} \\
 & \gamma_2 A_{99} : \gamma_2 M_{99} & A_{99} : & M_{99} \\
 & \gamma_3 A_{98} : \gamma_3 M_{98} & A_{98} : & M_{98} \\
 & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad & \vdots \\
 & \gamma_{97} A_4 : \gamma_{97} M_4 & A_4 : & M_4 \\
 & \gamma_{98} A_3 : \gamma_{98} M_3 & A_3 : & M_3 \\
 & \gamma_{99} A_2 : \gamma_{99} M_2 & A_2 : & M_2 \\
 & \gamma_{100} A_1 : \gamma_{100} M_1 & A_1 : & M_1
\end{array}
$$

Man ist auf diesem Wege auf die Reihen 1 und 5 §. 78 gelangt, welche das Gesetz für die Lebensdauer und Sterblichkeit aussprechen, und man erkennt daher, daß die unter c angegebene Methode unabhängig von dem Einflusse ist, welcher durch irgend eine Veränderung in der Bewegung der Bevölkerung als solcher bedingt sein könnte.

Wie nun diese Methode in ihrer Anlage ein richtiges Resultat verbürgt, so zeigt sie zugleich auf die Elemente hin, welche ein unrichtiges Resultat verursachen können. Sie gilt nämlich nur unter der Voraussetzung, daß die in 1 und 5 §. 78 angegebenen Reihen unverändert bleiben. Dies ist der Fall, so lange sich die Sterblichkeitsordnung selbst nicht ändert. Aendert sich diese, so sind natürlich alle durch sie gefundenen Gesetze unrichtig und für die neue Ordnung unbrauchbar. Hier finden nun die in §. 76 gemachten Bemerkungen ihre Anwendung, und es kommt hier vor allem die Kuhpocken-Impfung, verheerende Krankheit, Kriegsjahre, Hungersnoth ꝛc. in Betrachtung. Da die Impfungen Einfluß auf die Sterblichkeit geäußert haben, so ist zu schließen, daß das hiedurch veränderte Gesetz der Sterblichkeit noch nicht vollständig hergestellt ist und so lange nicht hergestellt werden wird, bis alle Individuen, welche vor dieser Periode geboren wurden und noch leben, aus der Reihe der Lebenden verschwunden sind. Der Einfluß, welchen verheerende Krankheiten, Kriegsjahre ꝛc. haben, ist zwar dem ersten Angriffe nach nur vorübergehend. Eine Nachwirkung auf eine längere Zeit ist aber nicht nur gedenkbar, sondern sogar wahrscheinlich. Bekanntlich werden von verheerenden Krankheiten schwächliche Individuen vorerst angegriffen und hingerafft. Die Annahme liegt daher nahe, daß gerade diejenigen Individuen, welche bei regelmäßigem Verlauf der Sterblichkeit in den nächsten Jahren nach einander gestorben wären, zusammen der Einwirkung der Seuche erliegen. Die Folge wäre dann, daß die Todesfälle im Laufe der nächsten Zeit intermittiren und dadurch das Gesetz in der Sterblichkeit ändern. Genaue und zuverlässige Resultate wären sofort in der nächsten Zeit nicht zu erwarten. Man könnte jedoch gerade durch Fortsetzung der angeführten Methode die Nachwirkung der genannten Ursache ergründen. Auf ähnliche Weise wirken Hungerjahre. Die Kriegsjahre wirken insoferne anders ein, als gerade starke und gesunde Individuen genommen und einem gewaltsamen Tode ausgesetzt werden. Auswanderungen und Einwanderungen wirken gleichfalls ändernd ein. Alle diese besondern Ursachen dürften sich vielleicht durch fortgesetzte Beobachtung aus ihren Wirkungen erkennen lassen. Deswegen möchte sich aber die Anwendung gerade dieser Methode empfehlen, da sie ein sicheres Resultat verbürgt und die Ermittlung des Einflusses besonderer Ursachen in Aussicht stellt. Sie verlangt zwar doppelte Arbeit. Dies kann aber den von ihr zu erwartenden Vortheilen gegenüber nicht in Betrachtung kommen. Renten-Anstalten und Lebensversicherungs-Institute werden ein zu bestimmtem Zwecke sehr brauchbares Material liefern.

Wer zuerst diese Methode aufgestellt hat, ist mir unbekannt. Baily hat sie schon angegeben. Sie ist aber so einfach, und, wie sich aus den Entwickelungen dieses und des vorigen §. zeigt, so in der Natur der Sache ge-

gründet, daß man sich wundern muß, daß sie nicht schon längst hervorgehoben und angewendet wurde.

d) Vierte Methode. Sie beruht auf Verfolgung der in 2, 5, 10, 11, 12 und 13 §. 78 angegebenen Horizontalreihen. Man zeichne die Zahl aller in einem Jahre Geborenen auf und verfolge sie bis zur äußersten Lebensgrenze, zähle die Ueberlebenden und die in jedem Jahre Gestorbenen, so ergiebt sich hieraus das Gesetz für die Sterblichkeit.

Diese Methode verbürgt, wenn keine besondere Störungen im Absterben eintreffen, ein ganz richtiges Resultat. Die Anwendung dieser Methode dürfte aber auf solche Schwierigkeiten stoßen, die sie aus leicht zu begreifenden Gründen zur Unmöglichkeit machen.

§. 80.

Die Sterblichkeitstafeln sind gewöhnlich in verschiedene Fächer eingetheilt, in welchen das Alter oder die Zahl der Jahre, die Zahl der Lebenden, die Zahl der Sterbenden, die Summen der Lebenden von einem bestimmten Alter an, aufgezeichnet sind. Außerdem kommen auch manchmal Fächer vor, worin die wahrscheinliche Lebensdauer, die mittlere Lebensdauer, ferner die Zahlen angegeben sind, welche das Verhältniß der Anzahl der Lebenden zu einem Sterbenden bestimmen. Das Alter beginnt mit der Geburt und schreitet durch die verschiedenen Jahresfristen bis zur höchsten Lebensgrenze fort. Die Zahlen der Lebenden und Sterbenden hängen gewöhnlich so unter einander zusammen, daß folgende Gleichungen gelten:

$$1)\ A_n - A_{n+1} = M_n. \qquad 2)\ A_n - M_n = A_{n+1}.$$

$$3)\ A_n = A_{n+1} + M_n.$$

Man findet daher die Zahl der in einer Jahresfrist Sterbenden M_n, wenn man die Zahl derer, welche im nachfolgenden Jahre leben (A_{n+1}), von der Anzahl der im genannten Jahre Lebenden abzieht. Zieht man die Zahl der in einem Jahre Sterbenden M_n von der in einem Jahre Lebenden ab, so findet man die Zahl der im nachfolgenden Jahre Lebenden. Die Zahlen der in einem Jahre Lebenden (A_{n+1}) und der im vorhergehenden Gestorbenen (M_n) kommen der Zahl der im vorhergehenden Jahre Lebenden gleich. Man nimmt hiebei der Einfachheit wegen an, daß die in einem Jahre Lebenden zusammen das ganze Jahr durchleben, und daß auch die in einem Jahre Sterbenden zusammen am Ende des Jahres sterben. Dies ist in der Wirklichkeit nicht der Fall, denn das Absterben erfolgt allmälig im Laufe des Jahres.

Die aus der Beobachtung genommenen Zahlen bringt man gewöhnlich, um eine bequeme Uebersicht zu haben und die Vergleichung zu erleichtern, auf eine Normalzahl 1000 oder 10000 ꝛc. zurück und nimmt an, daß die Zahl der Geburten gerade 1000 oder 10000 gewesen seien, und berechnet

dann sofort nach einem bestimmten Coefficienten, oder einem Regel=detri=Ansatze die jedem Alter zugehörigen Zahlen, daß sie eine fortlaufende Scale für die genannte Grundzahl bilden, wodurch die Gleichungen 1—3 in Kraft bleiben. Bei Anwendung der unter c §. 79 angegebenen Methode werden sich die Zahlen nicht nach der fortlaufenden Scale ergeben, indem das Verhältniß zwischen den in einem Jahre Lebenden und den von ihnen Sterbenden für sich abgeschlossen nach 10 und 11 §. 79 in Betrachtung kommt. Der Zusammenhang kann aber leicht auf die genannte Weise hergestellt werden. Die Bedeutung der wahrscheinlichen und mittlern Lebensdauern wird sich im Folgenden ergeben.

Es sind diesem Werke folgende Sterblichkeitstafeln beigegeben: die für Berlin (Casper, die wahrscheinliche Lebensdauer), die für Baiern (Gebhard über Wittwen= und Waisen=Pensions=Anstalten), die für Belgien (Quetelet über den Menschen). Sie beruhen auf Beobachtungen aus der neuern Zeit. Ferner eine Zusammenstellung mehrerer ältern und neuern Sterblichkeitstafeln. Die Süßmilch'sche Sterblichkeitstafel möchte wohl von gar keiner Brauchbarkeit mehr sein, obgleich sie bisher eine der verbreitetsten war.

Ehe wir nun die hieher gehörigen Anwendungen machen, sollen hier zwei Bemerkungen stehen, die eine über Darstellung des Gesetzes des Todes durch eine mathematische Formel, die andere über die Art und Weise, wie die Bevölkerung anwächst, wenn sie im Zunehmen begriffen ist.

So verdienstlich und lobenswerth die Bemühungen sein mögen, das Gesetz des Todes durch eine mathematische Formel darzustellen, so wenig dürfte es nach den bisher gemachten Bemerkungen möglich sein, jetzt schon dieses Problem einer Auflösung zuzuführen. Noch kennt man das Gesetz der Sterblichkeit nicht genau genug, wie alle Vorarbeiten andeuten. Daher möchte es vorerst noch eine vergebliche Arbeit sein, ihm seine Eigenthümlichkeit abzulauschen. Das Gesetz selbst scheint sich in viele specielle zu zersplittern. Daher wird es nicht an der Aufstellung einer einzigen Formel genügen, um das Problem zu lösen, und es müßte für jedes besondere Gesetz eine besondere Formel aufgestellt werden. Zudem sind die bisher aufgestellten Formeln in der Weise zusammengesetzt, daß ihre Anwendung auf keine Erleichterung, wohl aber auf größere Arbeit führen dürfte. In diesen Bemerkungen ist wohl auch der Grund zu suchen, daß keine der bisher aufgefundenen Formeln Eingang und Anwendung fand, und ehe die nöthigen Vorarbeiten vorliegen, auch nicht finden wird, wenn es je gelingen sollte, eine allgemeine Formel hierüber aufzustellen.

Es ist eine Thatsache, daß die Bevölkerung in den meisten Ländern von Europa seit längerer Zeit im Zunehmen begriffen ist. Soll sich die Bevölkerung vermehren, so ist offenbar, daß dies nur durch Zunahme der Geburten

geschehen kann. Euler hat angenommen, daß die Zunahme der Geburten in einem geometrischen Verhältnisse vor sich gehe, so zwar, daß, wenn die Bevölkerung eines Jahres durch die Einheit und die Zunahme durch q (was einen ächten Bruch bedeutet und in Procenten dargestellt werden kann) ausgedrückt wird, die Größe der Bevölkerung im folgenden Jahre durch $(1+q)\ (1+q) = (1+q)^2$, die im darauf folgenden durch $(1+q)^3$ darzustellen ist. Diese Annahme entbehrt alles innern Grundes. Die Zahl der Geburten hängt offenbar von der Zahl der zeugenden Individuen ab. Nimmt man nun, abgesehen von allen Ursachen, welche auf die Zunahme der Geburten einwirken können, an, daß die Zahl den Geburten sich mehre, so kann an ein geometrisches Wachsen der Zahl der Geburten erst dann gedacht werden, wenn die Mehr-Gebornen selbst zu der Classe der zeugenden Individuen herangewachsen sind. Dies kann wohl erst nach Verfluß von 20—30 Jahren geschehen. Da aber die Zunahme der Bevölkerung offenbar an bestimmte von Außen bedingte Grenzen und namentlich an die Masse der Nahrungsmittel gebunden ist, so ist klar, daß die eben angeführte Methode, die Zunahme der Bevölkerung zu bestimmen, höchstens als eine Annahme betrachtet werden kann, und daß es schwer gelingen möchte, ein Gesetz über einen so manchen Einflüssen, Hemmnissen und Förderungen unterliegenden Gegenstand aufzustellen. Auch das von Quetelet (Ueber den Menschen, 7ter Abschnitt) aufgestellte Gesetz ist wohl nur als ein hieher gehöriger Versuch zu betrachten.

§. 81.

Die erste Frage, welche bei der Anwendung der Sterblichkeitstafeln auftritt, ist folgende: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person von dem Alter a noch n Jahre durchleben werde?

Im Folgenden soll in Harmonie mit den bisher gebrauchten Zeichen die Zahl der Personen, welche a Jahre alt sind und nach dem Gesetze einer bestimmten Sterblichkeitstafel zusammen leben, durch A_a und die Zahl derjenigen, welche $(a+n)$ Jahre alt sind und nach dieser Tafel zusammen leben, durch A_{a+n} bezeichnet werden. Hiernach wird A_{a+1}, A_{a+2}, . . . die Zahl der Personen bezeichnen, welche $a+1$, $a+2$, $a+3$, . . . Jahre alt sind und zusammen leben. Soll man nun die Wahrscheinlichkeit bestimmen, die jemand von dem Alter a hat, daß sein Leben noch ein Jahr dauern werde, so hat man nach §. 50 die Zahl der Fälle, welche angeben, wie viele Personen von dem Alter a das Alter $a+1$ erreichen werden, zu vergleichen, und letztere durch erstere zu messen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher:

$$w = \frac{A_{a+1}}{A_a}.$$

Soll die Wahrscheinlichkeit für eine Lebensdauer von noch zwei Jahren

ermittelt werden, so hat man die Zahl der Fälle derjenigen, die nach zwei Jahren noch leben, mit der von dem Alter a zu vergleichen. Es ist sofort:

$$w = \frac{A_{a+2}}{A_a}.$$

Setzt man diese Schlußweise fort, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person von dem Alter a noch n Jahre leben werde:

$$1)\quad w = \frac{A_{a+n}}{A_a}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine 30jährige Person in Belgien noch 10 Jahre leben werde, ist daher nach Quetelet $\frac{40889}{46758}$, in Berlin $\frac{24907}{29854}$, nach Süßmilch ist sie $\frac{374}{439}$ u. s. w. Diese Gleichung rechtfertigt sich auch so: die Wahrscheinlichkeit, daß jemand von dem Alter a noch n Jahre durchleben werde, beruht darauf, daß er vorerst das 1ste Jahr durchleben werde, daß er, wenn dies geschehen ist, das zweite Jahr durchleben werde, hierauf sofort das dritte u. s. w. und endlich das $n$te. Die Wahrscheinlichkeiten, der Reihe nach das $(a+1)$te, $(a+2)$te, $(a+3)$te Jahr ꝛc. zu durchleben, sind:

$$\frac{A_{a+1}}{A_a}, \frac{A_{a+2}}{A_{a+1}}, \frac{A_{a+3}}{A_{a+2}}, \frac{A_{a+4}}{A_{a+3}}, \ldots \frac{A_{a+n}}{A_{a+n-1}}.$$

Hieraus ist nach 6 §. 50 S. 123 die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$2)\quad w = \frac{A_{a+1}}{A_a} \cdot \frac{A_{a+2}}{A_{a+1}} \cdot \frac{A_{a+3}}{A_{a+2}} \ldots\ldots \frac{A_{a+n}}{A_{a+n-1}} = \frac{A_{a+n}}{A_a}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß jemand von dem Alter a diese Jahre nicht durchleben, also in dem $n$ten Jahre oder früher sterben werde, ist nach 4 §. 50:

$$3)\quad w_1 = 1 - \frac{A_{a+n}}{A_a} = \frac{A_a - A_{a+n}}{A_a}.$$

Auf gleiche Weise bestimmt sich die Wahrscheinlichkeit, daß jemand von dem Alter a im $n$ten Jahre (nicht früher, nicht später) sterben werde. Man hat nämlich das Verhältniß, welches zwischen der Zahl derjenigen Individuen, welche im $a$ten Jahre leben, und derjenigen, welche gerade im $n$ten Jahre sterben, anzugeben. Nennt man nun die Zahl derjenigen, welche im $n$ten Jahre sterben, M_{a+n}, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$4)\quad w = \frac{M_{a+n}}{A_a}.$$

Zu dem nämlichen Resultate wird man gelangen, wenn man bemerkt, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit darauf beruht, daß jemand von dem Alter a die $(n-1)$ ersten Jahre durchleben müsse, um gerade im $n$ten Jahre (nicht früher, nicht später) zu sterben. Es ist sofort nach 6 §. 50:

$$5)\quad w = \frac{A_{a+1}}{A_a} \cdot \frac{A_{a+2}}{A_{a+1}} \cdot \frac{A_{a+3}}{A_{a+2}} \ldots\ldots \frac{M_{a+n}}{A_{a+n-1}} = \frac{M_{a+n}}{A_a}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß Jemand nicht gerade im *n*ten Jahre, sondern in einem andern, also früher oder später, sterben werde, ist:

$$6)\quad w_1 = 1 - \frac{M_{a+n}}{A_a} = \frac{A_a - M_{a+n}}{A_a}.$$

Die bisher gefundenen Gleichungen beziehen sich nur auf eine Person. Sie lassen sich aber leicht von einer auf mehrere ausdehnen, die dem gleichen Alter *a* angehören. Bezeichnet man die Zahl der Personen, welche dem Alter *a* angehören, durch Z_a, so ist die muthmaßliche Anzahl derjenigen, welche im *n*ten Jahre noch leben, nach 1:

$$7)\quad A = Z_a \frac{A_{a+n}}{A_a};$$

die Zahl derjenigen, welche innerhalb dieser Zeit gestorben sein werden, ist nach 3:

$$8)\quad A = Z_a \left(1 - \frac{A_{a+n}}{A_n}\right);$$

die Zahl derjenigen, welche muthmaßlich gerade im *n*ten Jahre sterben werden, nach 5:

$$9)\quad A = Z_a \cdot \frac{M_{a+n}}{A_a};$$

die Zahl derjenigen, welche nicht im *n*ten Jahre, sondern früher oder später sterben werden, nach 6:

$$10)\quad A = Z_a \left(1 - \frac{M_{a+n}}{A_a}\right).$$

Betrachtet man die Gleichungen 1 und 4 für sich und setzt in ihnen der Reihe nach 1, 2, 3 .... (die Zahl der Jahre bis zur äußersten Lebensgrenze) statt *n*, so erhält man folgende Darstellungen:

$$11)\quad \frac{A_{a+1}}{A_a}, \frac{A_{a+2}}{A_a}, \frac{A_{a+3}}{A_a}, \frac{A_{a+4}}{A_a}, \frac{A_{a+5}}{A_a}, \ldots\ldots$$

$$12)\quad \frac{M_{a+1}}{A_a}, \frac{M_{a+2}}{A_a}, \frac{M_{a+3}}{A_a}, \frac{M_{a+4}}{A_a}, \frac{M_{a+5}}{A_a}, \ldots\ldots$$

Beide Reihen beziehen sich in ihrer Bedeutung auf eine Person, und die erste stellt gleichsam das Gesetz dar, wornach die Lebenskraft des einzelnen Menschen abnimmt und erlahmt, also eine Scale für diese, die zweite aber den Maßstab der Gefahr vor, womit die Lebenskraft bedroht ist.

In den bisherigen Bestimmungen haben wir keinen Unterschied zwischen der Hoffnung auf Lebensdauer hinsichtlich des Geschlechts oder sonstiger Verhältnisse gemacht. Wird dies verlangt, so wird sich derselbe leicht aus den Sterblichkeitstafeln ergeben, insoweit in denselben hierauf Rücksicht genommen ist.

§. 82.

Die im vorigen §. beantworteten Fragen lassen sich ohne Schwierigkeit auf eine Person von jedem andern Alter (b) übertragen. Nun kann man zwei Personen, die entweder das nämliche oder ein verschiedenes Alter haben, mit einander in Beziehung bringen. Dadurch werden sich dann weitere Ableitungen machen lassen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine a- und eine $b$jährige Person n Jahre mit einander leben werden? Die Wahrscheinlichkeit ist eine bedingte, denn sie setzt voraus, daß nicht nur die $a$jährige, sondern auch die $b$jährige n Jahre durchleben werde. Bezeichnet man nun die Zahl der $b$jährigen Personen durch A_b, so hat man aus 6 §. 50 und 1 §. 81 für dieselbe:

$$1)\quad w = \frac{A_{a+n} \,.\, A_{b+n}}{A_a \,.\, A_b}.$$

Soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß beide zugleich im Laufe des $n$ten Jahres (nicht früher, nicht später) sterben werden, so ist aus 4 §. 81:

$$2)\quad w = \frac{M_{a+n} \,.\, M_{b+n}}{A_a \,.\, A_b}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß beide zusammen nicht n Jahre durchleben, sondern daß wenigstens eine schon früher gestorben sein werde, ist aus 1:

$$3)\quad w = 1 - \frac{A_{a+n} \,.\, A_{b+n}}{A_a \,.\, A_b}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß beide nicht im Laufe des $n$ten Jahres, sondern daß in einem früheren oder späteren Jahre wenigstens eine oder auch beide sterben werden, ist aus 2:

$$4)\quad w = 1 - \frac{M_{a+n} \,.\, M_{b+n}}{A_a \,.\, A_b}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden Personen im $n$ten Jahre nicht mehr leben, also schon früher gestorben sein werden, ist aus 3 §. 81:

$$5)\quad w = \left(1 - \frac{A_{a+n}}{A_a}\right)\left(1 - \frac{A_{b+n}}{A_b}\right).$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß von zwei Personen die $a$jährige im $n$ten Jahre noch leben und die $b$jährige todt sein werde, ist aus 1 und 3:

$$6)\quad w = \frac{A_{a+n}}{A_a}\left(1 - \frac{A_{b+n}}{A_b}\right).$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß von zwei Personen die $b$jährige im $n$ten Jahre noch leben und die $a$jährige todt sein werde, ist aus 1 und 3:

$$7)\quad w = \frac{A_{b+n}}{A_b}\left(1 - \frac{A_{a+n}}{A_a}\right).$$

Die Richtigkeit der in 1 — 6 gemachten Schlüsse ergiebt sich leicht. Bei

zwei Personen, deren Zusammenleben während n Jahren in Betrachtung kommt, sind folgende Fälle gedenkbar: entweder leben beide im Laufe des $n$ten Jahres noch, oder eine ist todt, oder beide sind todt. Einer der genannten Fälle muß eintreten. Die Summe der bezüglichen Wahrscheinlichkeiten muß daher der Einheit gleichkommen. Zählt man daher die in 1, 5, 6 und 7 gegebenen Darstellungen zusammen, so müssen sie, wenn die Sätze, worauf sie gegründet wurden, wahr sind, der Einheit gleich sein. Nun ist:

$$8)\quad w = \frac{A_{a+n}\,A_{b+n}}{A_a\;A_b} + \frac{A_{a+n}}{A_a}\left(1-\frac{A_{b+n}}{A_b}\right) + \frac{A_{b+n}}{A_b}\left(1-\frac{A_{a+n}}{A_a}\right)$$
$$+\left(1-\frac{A_{a+n}}{A_a}\right)\left(1-\frac{A_{b+n}}{A_b}\right) = 1.$$

Hiernach sind die in 1 — 6 gewonnenen Resultate richtig.

Die Wahrscheinlichkeit soll bestimmt werden, daß von zwei Personen, wovon die eine a, die andere b Jahre alt ist, die $a$jährige im $n$ten Jahre sterben, die $b$jährige aber noch r Jahre fortleben werde. Zerlegt man die Bedeutung der Aufgabe, so setzt sie voraus, daß beide Personen $(n-1)$ Jahre zusammenleben werden, daß die $a$jährige Person, wenn dies geschehen ist, im $n$ten Jahre sterben, die $b$jährige aber nicht nur das $n$te Jahr, sondern auch noch r Jahre nach diesem durchleben werde. Wird das Gesagte in Formeln dargestellt, so ist:

$$w = \frac{A_{a+n-1}\,A_{b+n-1}}{A_a\;A_b}\cdot\frac{M_{a+n}}{A_{a+n-1}}\cdot\frac{A_{b+n}}{A_{b+n-1}}\cdot\frac{A_{b+n+1}}{A_{b+n}}\cdot\frac{A_{b+n+2}}{A_{b+n+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{b+n+r}}{A_{b+n+r-1}}$$

Hiernach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$9)\quad w = \frac{M_{a+n}\,.\,A_{b+n+r}}{A_a\;.\;A_b}$$

Das Gesagte läßt sich leicht auf drei und mehr zusammenlebende Personen ausdehnen und gilt deswegen, wie sich leicht ergiebt, allgemein. Kommen nun k Personen in Frage, von denen eine a, die andere b, die dritte c, . . . die $k$te k Jahre alt ist, und soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß sie zusammen n Jahre durchleben werden, so müssen nach 1 §. 81 die Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden, daß jede einzelne Person noch n Jahre durchleben werde, und dann müssen die gefundenen Resultate mit einander vervielfacht werden. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist sofort:

$$10)\quad w = \frac{A_{a+n}\,.\,A_{b+n}\,.\,A_{c+n}\,\ldots\,A_{k+n}}{A_a\,.\,A_b\,.\,A_c\,\ldots\,A_k}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß sämmtliche Personen im Laufe des $n$ten Jahres sterben werden, ist:

$$11)\quad w = \frac{M_{a+n}\,.\,M_{b+n}\,.\,M_{c+n}\,\ldots\,M_{k+n}}{A_a\,.\,A_b\,.\,A_c\,\ldots\,A_k}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß nicht alle zusammen n Jahre durchleben wer-

den, sondern daß wenigstens eine von ihnen schon früher gestorben sein werde, ist aus 11:

$$12)\quad w = 1 - \frac{M_{a+n} \,.\, M_{b+n} \,.\, M_{c+n} \,.\,.\,.\,.\, M_{k+n}}{A_a \,.\, A_b \,.\, A_c \,.\,.\,.\,.\, A_k}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß keine von den obengenannten Personen im $n$ten Jahre, sondern daß alle früher oder später sterben werden, ist aus 11:

$$13)\quad w = 1 - \frac{M_{a+n} \,.\, M_{b+n} \,.\, M_{c+n} \,.\,.\,.\,.\, M_{k+n}}{A_a \,.\, A_b \,.\, A_c \,.\,.\,.\,.\, A_k}$$

Soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß sämmtliche k Personen nach n Jahren nicht mehr leben, sondern im $n$ten Jahre oder schon früher gestorben sein werden, so hat man die Gleichung 3 §. 81 auf jede einzelne Person anzuwenden und die hiedurch entstehenden Resultate mit einander zu vervielfachen. Hiedurch wird:

$$14)\quad w = \left(1 - \frac{A_{a+n}}{A_a}\right)\left(1 - \frac{A_{b+n}}{A_b}\right)\left(1 - \frac{A_{c+n}}{A_c}\right).\,.\,.\,.\,.\left(1 - \frac{A_{k+n}}{A_k}\right)$$

Setzt man in dieser Darstellung $\frac{A_{a+n}}{A_c} = a_1$, $\frac{A_{b+n}}{A_b} = a_2$, $\frac{A_{c+n}}{A_c}$

$= a_2$, . . . $\frac{A_{k+n}}{A_k} = a_k$, so läßt sich dieselbe in folgende überführen:

$$(1 - a_1)(1 - a_2)(1 - a_3)(1 - a_4)(1 - a_5) \,.\,.\,.\,.\,(1 - a_k)$$

$$= 1 - a_1 + a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 a_4 - \,.\,.\,.\,.\,.$$

$$a_2 \quad a_1 a_3 \quad a_1 a_2 a_4 \quad a_1 a_2 a_3 a_5$$

$$a_3 \quad a_1 a_4 \quad a_1 a_2 a_5 \quad a_1 a_2 a_3 a_6$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_k \quad a_{k-1} a_k \quad a_{k-2} a_{k-1} a_k \quad a_{k-3} a_{k-2} a_{k-1} a_k$$

$$= 1 - C^1 + C^2 - C^3 + C^4 - C^5 \,.\,.\,.\,.\,(-)^k C^k$$

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a_k)$$

wenn man die Entwickelungen von §. 77, S. 133 der Algebra benutzt. Hierin sollen C^1, C^2, C^3, C^4 . . . . die Gruppen der Verbindungen ohne Wiederholungen aus den untergeschriebenen Elementen a_1, a_2, a_3 . . . a_k zur ersten (C^1), zur zweiten (C^2), zur dritten Classe (C^3) u. s. w. bedeuten. Wendet man die vorstehenden Gleichungen an, so läßt sich 14 auch so darstellen:

$$15)\quad w = 1 - C^1 + C^2 - C^3 + C^4 - C^5 \,.\,.\,.\,.\,(-)^k C^k$$

$$\left(\frac{A_{a+n}}{A_a},\ \frac{A_{b+n}}{A_b},\ \frac{A_{c+n}}{A_c},\ \frac{A_{d+n}}{A_d},\ .\,.\,.\,.\,\frac{A_{k+n}}{A_k}\right)$$

oder kürzer so:

$$16)\quad w = \Sigma_0^{\,k} (-)^m C \left(\frac{A_{a+n}}{A_a},\ \frac{A_{b+n}}{A_a},\ \frac{A_{c+n}}{A_c},\ .\,.\,.\,.\,\frac{A_{k+n}}{A_k}\right)^m$$

worin Σ_0^k andeutet, daß ſtatt m allmälig die Werthe 0, 1, 2, 3 . . . . k geſetzt und dann die hiedurch angezeigten Geſchäfte ausgeführt werden ſollen. Die Elemente, woraus die Gruppen der Verbindungen ohne Wiederholungen zu den verſchiedenen Claſſen gebildet werden ſollen, ſind in dem vorſtehenden Falle die Brüche $\frac{A_{a+n}}{A_a}$, $\frac{A_{b+n}}{A_b}$, $\frac{A_{c+n}}{A_c}$, . . .

Die Wahrſcheinlichkeit, daß das entgegengeſetzte Ereigniß eintreten werde, oder daß nicht alle ſchon früher geſtorben ſind, ſondern die eine oder die andere Perſon, oder auch mehrere, alſo wenigſtens eine noch n Jahre durchleben werde, ergiebt ſich, wenn 14 von der Einheit abgezogen wird. Hiernach iſt:

17) $$w = 1 - \left(1 - \frac{A_{a+n}}{A_a}\right)\left(1 - \frac{A_{b+n}}{A_b}\right)\left(1 - \frac{A_{c+n}}{A_c}\right) \ldots . \left(1 - \frac{A_{k\ n}}{A_k}\right)$$

oder, wenn die Darſtellungen 15 und 16 benutzt werden,

18) $$w = C^1 - C^2 + C^3 - C^4 + \ldots . (-)^{k-1} C^k \left(\frac{A_{a+n}}{A_a} , \frac{A_{b+n}}{A_b} , \frac{A_{c+n}}{A_c} , \ldots . \frac{A_{k+n}}{A_k}\right)$$

$$= \Sigma_1^k (-)^{m-1} C \left(\frac{A_{a+n}}{A_a} , \frac{A_{b+n}}{A_b} , \frac{A_{c+n}}{A_c} , \ldots . \frac{A_{k+n}}{A_k}\right)^m$$

In der zweiten Form von 18 müſſen allmälig die Werthe 1, 2, 3 .... k ſtatt m geſetzt werden. In den Darſtellungen, welche in dieſem und dem vorhergehenden §. gegeben wurden, kommt theilweiſe die Zahl der in einem Jahre Verſtorbenen vor. Dieſe Zahlen ſind nicht immer in den Sterblichkeitstafeln angegeben. Man kann jedoch die in dieſem Falle nöthig werdenden Werthe durch die Zahl der Lebenden erſetzen, wenn man die Gleichungen des §. 80 benutzt. Durch Einführung der dort angezeigten Gleichungen gewinnt man ſofort andere und folgende Darſtellungen.

Die Wahrſcheinlichkeit, daß Jemand von dem Alter a gerade im $n$ten Jahre ſterben werde, iſt dann aus 4 §. 81:

19) $$w = \frac{A_{a+n} - A_{a+n+1}}{A_a} = \frac{A_{a+n}}{A_a}\left(1 - \frac{A_{a+n+1}}{A_{a+n}}\right)$$

Die Wahrſcheinlichkeit, daß Jemand nicht im $n$ten Jahre, ſondern in einem andern, alſo früher oder ſpäter, ſterben werde, iſt dann aus 6 §. 81:

20) $$w = 1 - \frac{A_{a+n} - A_{a+n+1}}{A_a} = \frac{A_a - A_{a+n} + A_{a+n+1}}{A_a}$$

Die Zahl derjenigen, welche muthmaßlich im $n$ten Jahre ſterben werden, iſt nach 9 §. 81:

21) $$A = Z_a \frac{A_{a+n} - A_{a+n+1}}{A_a} = \frac{Z_a A_{a+n}}{A_a}\left(1 - \frac{A_{a+n+1}}{A_{a+n}}\right)$$

Die Zahl derjenigen, welche nicht im $n$ten Jahre, ſondern früher oder ſpäter ſterben werden, iſt nach 10 §. 81:

$$22)\quad A = Z_a\left(1 - \frac{A_{a+n} - A_{a+n+1}}{A_a}\right) = Z_a\,\frac{A_a - A_{a+n} + A_{a+n+1}}{A_a}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß k Personen, von denen die eine a, die andere b, die dritte c u. s. w., die $k$te k Jahre alt ist, gerade im Laufe des $n$ten Jahres sterben werden, ist aus 11 dieses §.:

$$23)\quad w = \frac{(A_{a+n} - A_{a+n+1})(A_{b+n} - A_{b+n+1})(A_{c+n} - A_{c+n+1}) \ldots (A_{k+n} - A_{k+n+1})}{A_a \;.\; A_b \;.\; A_c \;.\;.\;.\;.\;.\; A_k}$$

Diese Darstellung läßt sich nach Maßgabe der Gleichung 19 unter eine andere Form setzen, wenn man die Ausdrücke A_{a+n}, A_{b+n}, A_{c+n} . . . . . aus den einzelnen Factoren ausscheidet. Die Gleichung 23 erhält dann folgende Form:

$$24)\quad w = \frac{A_{a+n} \cdot A_{b+n} \cdot A_{c+n} \ldots A_{k+n}}{A_a \cdot A_b \cdot A_c \ldots . A_k}\left(1 - \frac{A_{a+n+1}}{A_{a+n}}\right)\left(1 - \frac{A_{b+n+1}}{A_{b+n}}\right) \ldots .$$
$$\ldots\ldots\left(1 - \frac{A_{i+n+1}}{A_{i+n}}\right)\left(1 - \frac{A_{k+n+1}}{A_{k+n}}\right)$$

Diese Darstellung läßt sich auch im Einklange mit 15 und 16 so geben:

$$25)\quad w = \frac{A_{a+n} \cdot A_{b+n} \ldots A_{k+n}}{A_a \cdot A_b \cdot A_c \ldots A_k}\,\Sigma_0^{\,k}\,(-)^m C\left(\frac{A_{a+n+1}}{A_{a+n}}, \frac{A_{b+n+1}}{A_{b+n}}, \ldots \frac{A_{k+n+1}}{A_{k+n}}\right)^m$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß keine von den genannten Personen im $n$ten Jahre, sondern daß alle früher oder später sterben werden, ist aus 13 dieses §.:

$$26)\quad w = 1 - \frac{A_{a+n} \cdot A_{b+n} \cdot A_{c+n} \ldots A_{k+n}}{A_a \cdot A_b \cdot A_c \ldots A_k}\left(1 - \frac{A_{a+n+1}}{A_{a+n}}\right)\left(1 - \frac{A_{b+n+1}}{A_{b+n}}\right) \ldots$$
$$\ldots . \left(1 - \frac{A_{i+n+1}}{A_{i+n}}\right)\left(1 - \frac{A_{k+n+1}}{A_{k+n}}\right)$$
$$= 1 - \frac{A_{a+n} \cdot A_{b+n} \ldots A_{k+n}}{A_a \cdot A_b \ldots A_k}\,\Sigma_0^{\,k}\,(-)^m C\left(\frac{A_{a+n+1}}{A_{a+n}}, \frac{A_{b+n+1}}{A_{b+n}}, \ldots \frac{A_{k+n+1}}{A_{k+n}}\right)^m$$

Die in 19 — 26 aufgestellten Gleichungen zeigen, wie die Wahrscheinlichkeiten des Absterbens auf die Wahrscheinlichkeiten der Durchlebungen zurückgeführt werden können, und daß also nicht unumgänglich nöthig wird, besondere Rubriken für die Zahl der Sterbenden in den Sterblichkeitstafeln anzugeben.

Man kann nun aus den bisher gefundenen Gleichungen noch weitere Ableitungen machen. Soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß von m Personen, von denen die erste a, die zweite b, die dritte c, ... die $m$te m Jahre alt ist, nach n Jahren die g ersten gestorben sein werden und die übrigen noch leben, so hat man die Gleichung 14 mit 10 bei den erforderlichen Veränderungen zu verbinden, und es ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$27)\quad w = \left(1 - \frac{A_{a+n}}{A_a}\right)\left(1 - \frac{A_{b+n}}{A_b}\right)\ldots\left(1 - \frac{A_{g+n}}{A_g}\right)\frac{A_{h+n}\,.\,A_{i+n}\ldots A_{m+n}}{A_h\,.\,A_i\ldots A_m}$$

$$= \frac{A_{h+n}\,.\,A_{i+n}\ldots A_{m+n}}{A_h\,.\,A_i\ldots A_m}\,\Sigma_0^{\,g}\,(-)^g\,C\left(\frac{A_{a+n}}{A_a}, \frac{A_{b+n}}{A_b}, \frac{A_{c+n}}{A_c}, \ldots \frac{A_{g+n}}{A_g}\right)^g$$

Die hier gefundenen Gleichungen gelten von dem wahrscheinlichen Zusammenleben oder Absterben von je zwei, drei u. s. w. Personen. Sie lassen sich leicht auf die doppelte, dreifache u. s. w. Zahl der zusammenlebenden Personen ausdehnen. Es wird nur nöthig sein, die gefundenen Gleichungen mit der fraglichen Anzahl von Personen zu vervielfachen.

Bezeichnet man daher die Anzahl von je zwei Personen, von denen die einen a, die anderen b Jahre alt sind, und die sich in irgend einer Absicht vereinigt haben, durch Z_2, so wird die Anzahl derjenigen Paare von ihnen, die nach n Jahren muthmaßlich noch leben werden, durch folgende Gleichung nach 1 bestimmt sein:

$$28)\quad A = Z_2\frac{A_{a+n}\,.\,A_{b+n}}{A_a\,.\,A_b}$$

Die muthmaßliche Anzahl der im Laufe des $n$ten Jahres sterbenden Paare wird nach 2 sein:

$$29)\quad A = Z_2\frac{M_{a+n}\,.\,M_{b+n}}{A_a\,.\,A_b} = Z_2\frac{A_{a+n}\,.\,A_{b+n}}{A_a\,.\,A_b}\left(1 - \frac{A_{a+n+1}}{A_{a+n}}\right)\left(1 - \frac{A_{b+n+1}}{A_{b+n}}\right)$$

Die muthmaßliche Anzahl derjenigen, welche dem Alter a angehören, und diejenigen, welche dem Alter b angehören, überleben werden, ist aus 6:

$$30)\quad A = Z_2\frac{A_{a+n}}{A_a}\left(1 - \frac{A_{b+n}}{A_b}\right)$$

Die muthmaßliche Zahl der ausgestorbenen Paare ist aus 5:

$$31)\quad A = Z_2\left(1 - \frac{A_{a+n}}{A_a}\right)\left(1 - \frac{A_{b+n}}{A_b}\right)$$

Kommen m zu einem Zwecke vereinigte Personen in Betrachtung, so ist aus den Gleichungen 10 u. ff. die muthmaßliche Anzahl der Zusammenlebenden, der Gestorbenen, der Ausgestorbenen ꝛc.:

$$32)\quad A = Z_k\frac{A_{a+n}\,.\,A_{b+n}\,.\,A_{c+n}\ldots A_{k+n}}{A_a\,.\,A_b\,.\,A_c\ldots A_k}$$

$$33)\quad A = Z_k\frac{M_{a+n}\,.\,M_{b+n}\,.\,M_{c+n}\ldots M_{k+n}}{A_a\,.\,A_b\,.\,A_c\ldots A_k}$$

$$34)\quad A = Z_k\left(1 - \frac{A_{a+n}}{A_a}\right)\left(1 - \frac{A_{b+n}}{A_b}\right)\left(1 - \frac{A_{c+n}}{A_c}\right)\ldots\left(1 - \frac{A_{k+n}}{A_k}\right)$$

$$= Z_k\,\Sigma_0^{\,k}\,(-)^m\,C\left(\frac{A_{a+n}}{A_a}, \frac{A_{b+n}}{A_b}, \frac{A_{c+n}}{A_c}, \ldots\ldots \frac{A_{k+n}}{A_k}\right)^m$$

u. s. w. Die hier mitgetheilten Gleichungen lassen sich leicht auf die Dauer der Ehen und ihre Auflösung anwenden, denn man hat in diesem Falle die erforderlichen Werthe für A_{a+n}, A_{b+n} aus den Sterblichkeitstafeln, worin die Durchlebungen für das männliche und weibliche Geschlecht angegeben sind, einzuführen.

§. 83.

Unter wahrscheinlicher Lebensdauer versteht man denjenigen Zeitraum oder die Anzahl der Jahre, welche zu durchleben die Wahrscheinlichkeit $= 1/2$ ist. Halley hat diesen Begriff eingeführt. Die Grenze dieses Zeitraums schließt daher alle verschiedenen Stufen der Wahrscheinlichkeit in sich, welche größer als $1/2$ sind, und schließt alle diejenigen aus, welche kleiner als $1/2$ sind. Man kann demnach sagen, daß es für eine Person wahrscheinlicher ist, bis zu der genannten Grenze zu leben, als nicht zu leben. Die wahrscheinliche Lebensdauer wird nach den verschiedenen Altersstufen, welchen die einzelnen Personen angehören, verschieden sein, und wird von dem Verhältniß abhängen, wornach die Zahl der einem bestimmten Alter zugehörigen, noch lebenden Personen auf die Hälfte zurückgekommen sein wird. Bezeichnet man nun, wie früher, die Zahl der dem Alter a zugehörigen Personen durch A_a, die Zahl derjenigen, welche hievon die Hälfte ausmacht, durch A_{a+x}, so bestimmt sich die wahrscheinliche Lebensdauer einer Person von dem Alter a durch folgende Gleichung:

$$1) \quad 1/2 = \frac{A_{a+x}}{A_a}$$

oder auch:

$$2) \quad \frac{A_a}{2} = A_{a+x}$$

Es beruht hiernach die Bestimmung der wahrscheinlichen Lebensdauer auf der Auffuchung der Zahl A_{a+x} in einer Sterblichkeitstafel, welche die Eigenschaft hat, daß $A_{a+x} = 1/2\, A_a$ ist. Hat man nun diese Zahl gefunden, so kennt man auch die Zahl der Jahre, welche die bezeichnete Anzahl von Personen (A_{a+x}) noch zu durchleben haben wird. Aus dem Ueberschuß der Zahl der Jahre über die ursprüngliche ergiebt sich die Größe der wahrscheinlichen Lebensdauer. Nennt man nun die Zahl der gefundenen Jahre $a + x = s$ und die Zahl der ursprünglichen gegebenen Lebensjahre a, die wahrscheinliche Lebensdauer $w\,D$, so ergiebt sich letztere durch die Gleichung:

$$3) \quad w\,D = s - a = (a + x) - a.$$

In manchen Sterblichkeitstafeln ist die wahrscheinliche Lebensdauer nicht nach der Gleichung 3, also direct, angegeben, sondern nur die Zahl der Jahre $(a + x)$ oder das Lebensalter angezeigt, in welchem die Zahl der in

einem bestimmten Alter Lebenden (A_a) auf die Hälfte herabgekommen ist. Man hat daher aus dem so angedeuteten Lebensalter und dem ursprünglich gegebenen nach 3 die wahrscheinliche Lebensdauer erst abzuleiten. Auf die wahrscheinliche Lebensdauer haben nicht nur die verschiedenen Altersstufen, wie schon oben bemerkt wurde, sondern auch alle die Verhältnisse Einfluß, welche nach §. 76 die Gesetze der Sterblichkeit zu bedingen vermögen. Dies zeigt sich leicht, wenn man die verschiedenen Sterblichkeitstafeln zur Ermittelung der wahrscheinlichen Lebensdauer benutzt. So ist die wahrscheinliche Lebensdauer für einen 5 Monate alten Knaben auf dem platten Lande in Belgien nahe zu 40 Jahre und 7 Monate, denn die Zahl der 5 Monate alten Knaben ist 8187, und die Zahl der 41 Jahre alten Männer auf dem platten Lande ist 4090, und beide Zahlen kommen dem Verhältnisse von 2 : 1 sehr nahe. Die wahrscheinliche Lebensdauer eines 5 Monate alten Knaben, der in einer der belgischen Städte geboren ist, beträgt dagegen nur 34 Jahre und 7 Monate; für ein Mädchen desselben Alters ist sie in den Städten nahe zu 38 Jahre 7 Monate, auf dem Lande ungefähr 37 Jahre u. s. w. Andere Tafeln geben andere Resultate. Die wahrscheinliche Lebensdauer eines 1jährigen Knaben ist nach der Sterblichkeitstafel in Berlin 37,8 Jahre, eines 1jährigen Mädchens 39,5 Jahre ꝛc. Bei Bestimmung der wahrscheinlichen Lebensdauer wird es sich selten treffen, daß von der Zahl der Personen, welche einem bestimmten Alter zugehören, genau die Hälfte unter den in der Sterblichkeitstafel angegebenen Zahlen zu finden ist. Gewöhnlich wird die Hälfte der gesuchten Zahl ($\frac{1}{2} A_a$) zwischen zwei Zahlen fallen, welche zwei auf einander folgenden Lebensjahren entsprechen. Es wird daher auch die Zeit, welche der wahrscheinlichen Lebensdauer entspricht, zwischen den beiden correspondirenden Jahren liegen. Ein einfaches Interpolationsverfahren wird hinreichen, um den Zeittheil eines Jahres, welcher der sich ergebenden Differenz entspricht, zu bestimmen und bei Ermittelung der wahrscheinlichen Lebensdauer in Anrechnung zu bringen.

Die Interpolation läßt sich am einfachsten ausführen, wenn man annimmt, daß die Sterblichkeit innerhalb einer Jahresfrist gleichförmig vor sich geht. Dies wird um so eher geschehen können, da diese Zeitfrist nicht groß ist und das Absterben der einzelnen Individuen in späteren Jahren regelmäßiger, als in den früheren, vor sich geht und es sich bei Bestimmung der wahrscheinlichen Lebensdauer doch nur um annähernde Resultate handelt. Nennt man nun die beiden auf einander folgenden Zahlen der Sterblichkeitstafel, zwischen welche die Hälfte ($\frac{1}{2} A_a$) der gegebenen Zahl fällt, A_{a+x} und A_{a+x+1}, und t den aliquoten Theil des Jahres, welcher der erhaltenen Differenz entspricht, so ergiebt sich nach dem Gesagten folgende Proportion:

$$A_{a+x} - A_{a+x+1} : A_{a+x} - \tfrac{1}{2} A_a = 1 \text{ Jahr} : t \text{ten Theil eines Jahres,}$$

und man hat hieraus zur Bestimmung des gesuchten Bruchtheils:

$$4)\quad t = \frac{A_{a+x} - \frac{1}{2} A_a}{A_{a+x} - A_{a+x+1}} = \frac{A_{a+x} - \frac{1}{2} A_a}{M_{a+x}}$$

Es gilt daher für die genauere Bestimmung der wahrscheinlichen Lebensdauer folgende Gleichung:

$$5)\quad w\,D = (a+x) - a + \frac{A_{a+x} - \frac{1}{2} A_a}{A_{a+x} - A_{a+x+1}}$$

Um diese Methode zu verdeutlichen, soll die wahrscheinliche Lebensdauer eines Individuums nach der Süßmilch'schen Tabelle bestimmt werden, welches das 5te Lebensjahr betritt. Die Zahl der 4jährigen Individuen ist $A_a = 593$, hievon die Hälfte ist 296,5. Diese Zahl fällt zwischen 300 $= A_{a+x}$ und 291 $= A_{a+x+1}$. Nun gehört 300 der Zahl derjenigen Individuen zu, welche das 51ste Jahr betreten haben, also 50 Jahre alt sind. Es ist sofort die gesuchte wahrscheinliche Lebensdauer nach 5:

$$w\,D = 50 - 4 + \frac{300 - 296{,}5}{300 - 291} = 46 + \frac{3{,}5}{9} = 46{,}388\ldots \text{ Jahre.}$$

§. 84.

Kommt man auf die im vorigen §. aufgestellte Annahme von einem gleichförmigen Absterben innerhalb Jahresfrist zurück, so läßt die berührte Interpolationsmethode sich auf noch weitere Anwendungen ausdehnen.

Man kann nämlich eine Jahresfrist in r gleiche Theile theilen und dann fragen, nach welchen Formeln das Absterben der Individuen unter dieser Voraussetzung vor sich geht? Bezeichnet man nun, wie bisher, die Zahl derjenigen, welche innerhalb einer Jahresfrist, also zwischen dem $a$ten und $(a+1)$ten Jahre sterben, durch M_a, so ist aus 9 §. 78:

$$1)\quad M_a = A_a - A_{a+1}.$$

Geht nun das Absterben allmälig und gleichförmig vor sich, so wird in dem $r$ten Theile einer Jahresfrist auch der $r$te Theil aller innerhalb dieser Frist Sterbenden sterben. Dies führt zu folgender Bestimmung:

$$2)\quad \frac{M_a}{r} = \frac{A_a - A_{a+1}}{r}$$

Wenn nun im Laufe eines jeden solchen Jahresabschnitts die in 2 angegebene Zahl von Individuen stirbt, so wird am Ende des ersten Zeitabschnitts die einfache Zahl, nämlich $\frac{M_a}{r}$, am Ende des zweiten Abschnitts die doppelte, am Ende des dritten die dreifache Zahl u. s. w. gestorben sein. Hiernach stellen sich die Anzahlen, welche angeben, wie viele Individuen am Ende der verschiedenen Zeitabschnitte gestorben sein werden, durch folgende Reihe dar:

3) $\frac{M_a}{r}, \frac{2M_a}{r}, \frac{3M_a}{r}, \frac{4M_a}{r}, \ldots \frac{(r-2)M_a}{r}, \frac{(r-1)M_a}{r}, M_a.$

oder auch durch folgende, wenn die zweite Form in 2 angewendet wird:

4) $\frac{A_a - A_{a+1}}{r}, \frac{2(A_a - A_{a+1})}{r}, \frac{3(A_a - A_{a+1})}{r}, \ldots \frac{(r-1)(A_a - A_{a+1})}{r}, A_a - A_{a+1}.$

Diese Darstellungen verschaffen die Mittel, auch die Zahl derjenigen zu bestimmen, welche im Laufe der verschiedenen Abschnitte eines Jahres noch leben. Es wird zu dem Ende nur nöthig, von der Anzahl derjenigen, welche am Anfange eines Jahres zusammen leben, die Zahl derjenigen abzuziehen, welche während der vorhergehenden Zeitabschnitte gestorben sind. Die Zahl der im ersten Zeitabschnitte noch Lebenden ist hiernach A_a.

Die Zahl der im zweiten Abschnitte Lebenden ergiebt sich, wenn von der Zahl aller zu Anfange des Jahres Lebenden die Zahl der im ersten Abschnitte Gestorbenen abgezogen wird. Es ist sofort:

$$A_{a+\frac{2}{r}} = A_a - \frac{M_a}{r} = A_a - \frac{A_a - A_{a+1}}{r}$$

$$= \frac{(r-1)A_a + A_{a+1}}{r}$$

Die Zahl der im dritten Abschnitte Lebenden ergiebt sich, wenn von A_a die Zahl derjenigen abgezogen wird, welche in den beiden vorhergehenden Abschnitten gestorben sind, und ist:

$$A_{a+\frac{3}{r}} = A_a - \frac{2M_a}{r} = A_a - \frac{2(A_a - A_{a+1})}{r}$$

$$= \frac{(r-2)A_a + 2A_{a+1}}{r}$$

Die Zahl der im vierten Zeitabschnitte Lebenden ist sofort:

$$A_{a+\frac{4}{r}} = A_a - \frac{3M_a}{r} = A_a - \frac{3(A_a - A_{a+1})}{r}$$

$$= \frac{(r-3)A_a + 3A_{a+1}}{r}$$

Hiernach ist die Zahl der im $m$ten Zeitabschnitt eines Jahres zusammen Lebenden durch folgende zwei Formeln bestimmt:

5) $A_{a+\frac{m}{r}} = A_a - \frac{(m-1)M_a}{r}$; 6) $A_{a+\frac{m}{r}} = \frac{(r-m+1)A_a + (m-1)A_{a+1}}{r}$

Diejenigen, welche im $m$ten Zeitabschnitte eines Jahres zusammenleben, haben den $(m-1)$ten Zeitabschnitt und die früheren durchlebt. Daher ist die Zahl derjenigen, welche den $(m-1)$ten Zeitabschnitt eines in r Theile eingetheilten Jahres durchlebt haben, auch durch 5 und 6 bestimmt. Setzt

man nun $m+1$ ſtatt m in 5 und 6, ſo gewinnt man zur Beſtimmung der Zahl derjenigen, welche den $m$ten Zeitabſchnitt eines in r gleiche Abſchnitte getheilten Jahres durchlebt haben, folgende Gleichungen:

$$7)\quad A_{a+\frac{m}{r}} = A_a - \frac{m M_a}{r}\;;\quad 8)\quad A_{a+\frac{m}{r}} = \frac{(r-m)A_a + m A_{a+1}}{r}$$

Daß dieſe Gleichungen auch für ſpätere Zeitfriſten gelten, iſt leicht erſichtlich. Aus 7 und 8 hat man denn:

$$9)\quad A_{a+n+\frac{m}{r}} = A_{a+n} - \frac{m M_{a+n}}{r}$$

$$10)\quad A_{a+n+\frac{m}{r}} = \frac{(r-m)A_{a+n} + m A_{a+n+1}}{r}$$

Hieraus laſſen ſich noch weitere Anwendungen machen. Man ſoll die Wahrſcheinlichkeit beſtimmen, daß eine Perſon von dem Alter a noch den $\left(\frac{m}{r}\right)$ten Zeitabſchnitt des laufenden Jahres durchleben werde. Die geſuchte Wahrſcheinlichkeit ergiebt ſich aus 7 und 8, wenn man die Zahl der dieſen Zeitabſchnitt durchlebenden Perſonen durch die zu Anfang des laufenden Jahres Lebenden theilt. Sie iſt:

$$11)\quad w = \frac{A_{a+\frac{m}{r}}}{A_a} = 1 - \frac{m M_a}{r A_a} = \frac{r A_a - m M_a}{r A_a}$$
$$= \frac{(r-m)A_a + m A_{a+1}}{r A_a} = 1 - \frac{m}{r} + \frac{m A_{a+1}}{r A_a}$$

Man ſoll die Wahrſcheinlichkeit beſtimmen, daß eine $a$jährige Perſon noch $\left(n+\frac{m}{r}\right)$ Jahre durchleben werde. Die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt aus 9 und 10:

$$12)\quad w = \frac{A_{a+n+\frac{m}{r}}}{A_a} = \frac{A_{a+n}}{A_a} - \frac{m M_{a+n}}{r A_a}$$
$$= \frac{(r-m)A_{a+n} + m A_{a+n+1}}{r A_a}$$

Mit dieſen Gleichungen laſſen ſich nun alle Fragen über die Wahrſcheinlichkeit der Lebensdauer in Rückſicht auf irgend eine Zahl von Jahren und Abſchnitten eines Jahres beantworten, wie es bei ganzen Jahren §. 81 und 82 geſchehen iſt. Die Wahrſcheinlichkeit, daß Jemand von dem Alter a den $\frac{m}{r}$ten Theil des laufenden Jahres nicht überleben, ſondern vorher ſterben werde, iſt aus 11:

$$13)\quad w_1 = 1 - \frac{A_{a+\frac{m}{r}}}{A_a} = \frac{mM_a}{rA_a} = 1 - \frac{(r-m)A + mA_{a+1}}{rA_a}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß Jemand von dem Alter a die Zeit von $\left(n + \frac{m}{r}\right)$ Jahren nicht durchleben, sondern früher sterben werde, ist aus 12:

$$14)\quad w = 1 - \frac{A_{a+n+\frac{m}{r}}}{A_a} = 1 - \frac{A_{a+n}}{A_a} + \frac{mM_{a+n}}{rA_a}$$

$$= 1 - \frac{(r-m)\,A_{a+n} + mA_{a+n+1}}{rA_a}$$

u. s. w. Das Gesagte läßt sich leicht auf zwei oder mehrere zusammenlebende Personen ausdehnen. Besondere Fälle ergeben sich leicht. So ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Person von dem Alter a noch $n + 1/4$, $n + 1/2$, $n + 3/4$ Jahre durchleben werde, aus 12:

$$15)\quad w = \frac{A_{a+n}}{A_a} - \frac{M_{a+n}}{4A_a} = \frac{3A_{a+n} + A_{a+n+1}}{4A_a}$$

$$w = \frac{A_{a+n}}{A_a} - \frac{M_{a+n}}{2A_a} = \frac{A_{a+n} + A_{a+n+1}}{2A_a}$$

$$w = \frac{A_{a+n}}{A_a} - \frac{3M_{a+n}}{4A_a} = \frac{A_{a+n} + 3A_{a+n+1}}{4A_a}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß Jemand gerade in dem $\left(\frac{m}{r}\right)$ten Theile eines Jahres sterben werde (nicht früher, nicht später), ist:

$$16)\quad w = \frac{1}{r}\,\frac{M_a}{A_a}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß Jemand von dem Alter a gerade in dem $\left(\frac{m}{r}\right)$ten Theile des $(n+1)$ten Jahres sterben werde, ist:

$$17)\quad w = \frac{M_{a+n}}{rA_a} \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichungen dieses §. gelten, wie bemerkt, nur unter der Voraussetzung der gleichförmigen Sterblichkeit innerhalb Jahresfrist. Die in §. 76 niedergelegten Erörterungen machen es wahrscheinlich, daß dies in der Wirklichkeit nicht stattfinden wird. Quetelet giebt in seinem Werke (1stes Buch 5ter Abschnitt VI) eine Tabelle, um den Einfluß der Jahreszeit auf die Sterblichkeit nachzuweisen, die hier eine Stelle finden soll.

Monate 1815 — 1826.	Todesfälle		Verhältniß	
	Städte.	Plattes Land.	Städte.	Plattes Land.
Januar . . .	59892	116129	1,158	1,212
Februar . . .	56267	114758	1,088	1,198
März	54277	114244	1,050	1,192
April	51818	107264	1,002	1,120
Mai	48911	93814	0,946	0,978
Juni.	46607	84464	0,901	0,882
Juli	45212	77555	0,874	0,809
Auguſt. . . .	47032	78802	0,910	0,822
September .	50191	85131	0,971	0,888
October . . .	51649	89514	0,999	0,934
November . .	52908	89585	1,024	0,935
December . .	55631	98705	1,076	1,030
Mittel	51700	95822	1,000	1,000

Namentlich ſcheint die Kälte einen ungünſtigen Einfluß auf die Lebenskraft zu äußern. Dies tritt beſonders ſtark auf dem Lande hervor und kommt vielleicht daher, daß dort die Mittel fehlen, um ſich gegen die ſchädliche Einwirkung derſelben zu ſchützen. Jedoch ſind die Schwankungen, welche durch den Einfluß der Jahreszeiten herbeigeführt werden, im Ganzen nicht ſo bedeutend, daß man daraus einen Grund für gänzliche Verwerfung der Annahme einer gleichförmigen Sterblichkeit innerhalb Jahresfriſt hernehmen ſollte, denn die vorſtehende Tabelle zeigt, daß der hieraus ſich ergebende Fehler bei dieſem Zeitraum zu keiner bedeutenden Unrichtigkeit führen wird.

§. 85.

Wie im Früheren der Werth der Erwartung in Beziehung auf ein phyſiſches Gut, zu deſſen Beſitz man gelangen kann, beſtimmt wurde, ſo kann man nun die hierüber aufgeſtellten Geſetze anwenden, um den Werth der Erwartung in Beziehung auf die noch zu hoffende Lebensdauer anzugeben. Das Leben ſelbſt iſt als ein phyſiſches Gut zu betrachten. Man kann daher fragen, wie groß iſt der Werth der Erwartung für Jemand, der a Jahre alt iſt, in Beziehung auf dieſes Gut? und kann den Werth dieſer Erwartung oder die Hoffnung auf Lebensdauer in Zahlen angeben.

Soll nun der Werth des noch zu hoffenden Lebens für eine $a$jährige Perſon bemeſſen werden, ſo hat man, um richtige Reſultate zu gewinnen, ge-

nau die Schlußweise einzuhalten, welche früher bei Untersuchung ähnlicher Fälle angewendet wurde. Man hat daher alle Fälle, welche hier in Betrachtung kommen und die Lebensdauer bedingen können, aufzuzählen, die Wahrscheinlichkeiten für sie zu bestimmen, letztere mit dem zu erwartenden Gute nach 2 §. 55 in Verbindung zu bringen, und alle sofort erhaltenen Resultate zusammen zu zählen.

Das Leben einer $a$jährigen Person kann nun folgenden Wechselfällen unterliegen. Sie stirbt entweder im ersten, oder im zweiten, oder im dritten Jahre u. s. w., oder im Jahre der menschlichen Lebensgrenze. Die Wahrscheinlichkeiten, welche diesen Wechselfällen entsprechen, ergeben sich aus 4 §. 81 und sind folgende:

$$1)\quad \frac{M_a}{A_a}\,,\ \frac{M_{a+1}}{A_a}\,,\ \frac{M_{a+2}}{A_a}\,,\ \frac{M_{a+3}}{A_a}\ \ldots\ \frac{M_{a+u}}{A_a}\,.$$

Hierin drückt das erste Glied $\frac{M_a}{A_a}$ die Wahrscheinlichkeit aus, im Laufe des ersten Jahres oder des Jahres zu sterben, welches das Alter der fraglichen Person angiebt, und $\frac{M_{a+u}}{A_a}$ die Wahrscheinlichkeit, im Jahre der Lebensgrenze zu sterben. Die zwischenliegenden Glieder gehören den verschiedenen Altersstufen an. Die Ausdrücke in 1 gehen eigentlich von der Voraussetzung aus, daß das Absterben auf einmal und zu Ende des in Frage stehenden Jahres geschieht. Dies ist aber in der Wirklichkeit nicht der Fall, und es ist einleuchtend, daß das Absterben in jedem Augenblicke einer Jahresfrist, also zu Anfang oder zu Ende des Jahres u. s. w. vor sich gehen kann. Kommt man nun hiebei auf die Annahme einer gleichförmigen Sterblichkeit innerhalb Jahresfrist zurück, so rechtfertigt sich hieraus die weitere Folgerung, die Zeit des Ablebens in die Mitte des Jahres und daher die Lebensdauer eines im Laufe eines Jahres sterbenden Individuums auf die Hälfte des fraglichen Jahres zu bestimmen. Hiernach ist die Lebensdauer einer $a$jährigen Person auf ein halbes Jahr festzustellen, wenn sie im Laufe des ersten Jahres, auf $(1+\frac{1}{2})$ Jahr, wenn sie im Laufe des zweiten Jahres, auf $(2+\frac{1}{2})$ Jahre, wenn sie im Laufe des dritten Jahres stirbt u. s. w., also auf $(n-1+\frac{1}{2})$ Jahre, wenn sie im Laufe des $n$ten Jahres stirbt. Hiernach sind die Lebensdauern, welche den in 1 angegebenen Wahrscheinlichkeiten entsprechen, auf folgende Weise in Jahren anzudeuten:

$$2)\quad \frac{1}{2}\,,\ \frac{3}{2}\,,\ \frac{5}{2}\,,\ \frac{7}{2}\,,\ \frac{9}{2}\ \ldots\ \frac{2n-1}{2}\,,\ \frac{2n+1}{2}\,,\ \ldots\ \frac{2u+1}{2}\,.$$

Diese Zahlen geben nun den Werth der zu erwartenden physischen Güter an. Um nun den Werth der Erwartung auf die Lebensdauer für eine $a$jährige Person zu erhalten, hat man die correspondirenden Glieder in 1

und 2 mit einander nach 2 §. 55 zu verbinden und zusammenzuzählen. Geschieht dies, so erhält man folgende Darstellung:

$$3)\quad E = \frac{M_a + 3M_{a+1} + 5M_{a+2} \ldots (2n+1)M_{a+n} \ldots . + (2u+1)M_{a+u}}{2A_a}$$

Auf das nämliche Resultat würde man gekommen sein, wenn man von den Durchlebungen ausgegangen wäre, um den Werth der Erwartung auf Lebensdauer zu ermitteln. Eine $a$jährige Person kann nämlich entweder das 1ste, oder das 2te, oder das 3te, oder alle Jahre bis zur äußersten Lebensgrenze durchleben. Das Durchleben eines Jahres ist aber kein vollendeter Begriff, denn wenn jemand z. B. das 1ste Jahr durchlebt hat, so kann er auch das 2te, das 3te ꝛc., überhaupt jedes nachfolgende durchleben. Es muß daher, um dem Begriff des Durchlebens Gehalt zu geben, ein Schluß des Lebens in jedem einzelnen Falle angenommen werden. Geschieht dies, so kommt man auf die oben angegebene Entwickelung zurück, welche auf der gewiß richtigen Voraussetzung beruht, daß das Leben eines Menschen in jedem Jahre enden könne, und in irgend einem enden müsse.

Man kann die Darstellung 3 auch umformen, wenn man die Gleichung 9 §. 78 zu Hülfe nimmt und nach den in 3 enthaltenen Ausdrücken 0, 1, 2, ... u statt n setzt. Dadurch erhält man aus der Gleichung 3 folgende:

$$4)\quad E = \frac{1}{2A_a}\Big(A_a - A_{a+1} + 3A_{a+1} - 3A_{a+2} + 5A_{a+2} - 5A_{a+3} + \\ + 7A_{a+3} \ldots\ldots\ldots - (2n-1)A_{a+n} + (2n+1)A_{a+n} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots - (2u-1)A_{a+u} + (2u+1)A_{a+u} - (2u+1)A_{a+u+1}\Big).$$

Denn jedes Glied im Zähler 3 läßt sich in zwei andere zerlegen, wovon das eine positiv und das andere negativ ist. Das negative Glied kommt immer zweimal weniger vor als das darauf folgende positive, wie sich aus der vorstehenden Darstellung ergiebt. Führt man die angezeigten Geschäfte aus und bemerkt, daß $A_{a+u+1} = 0$, da in dem Jahre, welches der Lebensgrenze folgt, kein Individuum mehr von den in Frage stehenden lebt, so ergiebt sich aus 4 folgende Darstellung:

$$5)\quad E = \tfrac{1}{2} + \frac{A_{a+1} + A_{a+2} + A_{a+3} + A_{a+4} + \ldots\ldots A_{a+u}}{A_a}.$$

Die Gleichung läßt sich auch noch auf folgende Art umformen. Zählt man nämlich $\frac{1}{2}$ oder was dasselbe ist $\frac{A_a}{2A_a}$ zu und ab und schreibt $\frac{A_a}{2A_a}$ statt $\frac{1}{2}$, so entsteht aus 5:

$$E = \frac{A_a}{2A_a} + \frac{A_a}{2A_a} + \frac{A_{a+1} + A_{a+2} + A_{a+3} \ldots\ldots}{A_a} - \frac{A_a}{2A_a}$$

und diese Gleichung geht über in

$$6)\quad E = \frac{A_a + A_{a+1} + A_{a+2} + A_{a+3} + \ldots . A_{a+u}}{A_a} - 1/2.$$

Die Gleichungen 3, 5 und 6 haben einerlei Inhalt. Sie geben den Werth der Erwartung auf Lebensdauer für eine *a*jährige Person an. Daß diese Gleichungen auf ein richtiges Resultat führen, möchte wohl durch die Grundlage und die Schlußweise, auf der sie ruhen, verbürgt sein. Sie werden eben so richtig sein, als es diejenigen sind, welche im 5ten und 6ten Kapitel gewonnen wurden, denn sie sind aus den nämlichen Principien abgeleitet, stehen und fallen also mit jenen. Sollen nun die Erwartungswerthe für die Lebensdauer einer Person in den verschiedenen Altersstufen nach irgend einer Sterblichkeitstafel ermittelt werden, so kann dies nach 6 leicht geschehen, wenn man mit der Zahl derjenigen, welche bis zur höchsten Lebensgrenze leben, beginnt, von dieser durch die verschiedenen Altersstufen herabsteigt, die Zahl aller derjenigen, welche in den nachfolgenden Jahren leben, zusammenzählt, mit der zuletzt zugezählten Zahl (A_a) in die erhaltene Summe theilt und von dem gewonnenen Resultat $1/2$ abzieht. Der Rest giebt den gesuchten Erwartungswerth. Nennt man nun die Zahl der im letzten Lebensjahre Lebenden A_u, und die Zahl derjenigen, welche in den zunächst vorhergehenden leben, A_{u-1}, A_{u-2}, . . . so hat man folgende besondere Formeln zur Bestimmung der Erwartungswerthe für die Lebensdauern aus 6:

$$7)\quad E = \frac{A_u}{A_u} - 1/2 = 1/2$$

$$E = \frac{A_{u-1} + A_u}{A_{u-1}} - 1/2$$

$$E = \frac{A_{u-2} + A_{u-1} + A_u}{A_{u-2}} - 1/2$$

u. s. w. Hiernach hat man die Zahl der Lebenden in irgend einer Sterblichkeitstafel von unten nach oben bis zu jedem Alter zu summiren, die Summe durch die nebenstehende Zahl der Lebenden zu theilen, hievon 0,5 abzuziehen, wodurch sofort der jedem Alter zugehörige Erwartungswerth auf Lebensdauer entsteht.

Die hier gegebenen Entwickelungen sind deswegen näher begründet, damit sich der Leser von der Richtigkeit der gemachten Schlüsse überzeugen und über die Bedeutung der hieher bezüglichen Bemerkungen ein Urtheil fällen kann.

Man bezeichnet den hier entwickelten Begriff gewöhnlich durch den Ausdruck: mittlere Lebensdauer, und die meisten schreiben Deparcieux die Einführung dieses Begriffs zu. Schon Nic. Bernoulli hat jedoch die Sache angeregt (Actor. Eruditor. Supplem. Tom. IV. pag. 159), aber keine Formel hierüber aufgestellt. Die Schrift von Deparcieux

(essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine etc. Par. 1746), ist mir nicht zur Hand, um sie mit den übrigen Schriften vergleichen zu können. Indem ich mich nun hierüber auf die Angaben Anderer berufe, bemerke ich, daß man über den Begriff der mittern Lebensdauer keineswegs einig zu sein, ja sich theilweise mißverstanden zu haben scheint. Süßmilch sagt (Göttliche Ordnung 2ter Thl. pag. 343 u. ff.): »Die mittlere Dauer des Lebens nennt und findet man, wenn man die Summe aller Jahre, die eine gewisse Anzahl Personen gelebt hat, addiret und nachher durch die Zahl der Personen dividiret. Der Quotient ist die mittlere Zahl der Jahre, die ein jeder gelebt hat und gelebt haben würde, wenn ihre Lebensjahre alle gleich gewesen wären, z. E. wenn von 3 Personen die eine 3, die andere 5, die dritte 7 Jahre gelebt hätte, so würde die Summe der von ihnen durchlebten Jahre 15 betragen, und ein jeder würde 5 Jahre bekommen, und dieses wird das mittlere Alter genannt.«

Man sieht, daß Süßmilch keinen klaren Begriff von der mittlern Lebensdauer hatte, denn er spricht zuerst nur von der Zahl der durchlebten Jahre, dann von der Zahl der zu durchlebenden. Die von ihm gegebene Definition ist nicht allein unklar, sondern unrichtig, denn der Quotient aus der Zahl der durchlebten Jahre und der Personenzahl hat diesen Inhalt nicht und giebt nur das fragliche Alter an. Diesem Irrthum ist es auch zuzuschreiben, daß Süßmilch (pag. 346 u. ff.) sogar die wahrscheinliche und mittlere Lebensdauer für gleichbedeutend hält. Schon Lambert (Beiträge zur Mathematik, 3ter Thl. pag. 497 u. ff.) hat auf das Schwankende in den Ansichten hierüber aufmerksam gemacht und den Unterschied zwischen wahrscheinlicher und mittlerer Lebensdauer hervorgehoben. Demungeachtet vermißt man in manchen hierher gehörigen neuern Schriften die nöthige Schärfe und Genauigkeit in der Begriffsbestimmung. Der fragliche Begriff wird in diesen entweder historisch entwickelt oder so definirt, daß die mittlere Lebensdauer diejenige Zahl von Jahren bedeutet, welche jede einzelne Person von einem bestimmten Alter zu durchleben hätte, wenn die Zahl der Jahre, welche alle diesem Alter Zugehörige zu durchleben haben, gleichheitlich unter alle vertheilt würde.

Soll nun diese Definition in einer Formel ausgedrückt werden, und geht man hiebei von dem *a*ten Lebensjahre aus und bezeichnet die Zahl der Personen, welche nach einer bestimmten Sterblichkeitstafel in den spätern Lebensjahren zusammen leben, wie bisher, durch:

$$A_a, A_{a+1}, A_{a+2}, A_{a+3}, \ldots . A_{a+u}$$

so lebt jede von den Personen A_a ein Jahr, eben so jede von den Personen A_{a+1} ein Jahr und so fort, zusammen also durchleben sie ($A_a + A_{a+1} + A_{a+2} \ldots .$) Jahre. Es kommt daher auf jede von den im *a*ten Jahre lebenden Personen durchschnittlich:

$$8)\quad D = \frac{A_a + A_{a+1} + A_{a+2} + \ldots . A_{a+u}}{A_a}$$

Jahre. Diese Formel stimmt aber ihrem Inhalte nach mit 4, 5 oder 6 nicht zusammen und giebt den Werth um $^1/_2$ zu hoch an.

Man erkennt nun leicht, daß der eben entwickelte Begriff von mittlere Lebensdauer (8) kein ursprünglicher, in der Sache selbst begründeter und selbstständiger ist, sondern daß er aus der Formel 6 abgeleitet wurde. Die Formel 6 wurde zu dem Ende von einer andern Ansicht, als der ursprünglich ihr zu Grunde liegenden aufgefaßt, und daher vermißt man zugleich in dieser Begriffsbestimmung den nothwendigen innern Zusammenhang. Manche zählen dem in 8 angedeuteten Werth die Zahl der bereits durchlebten Jahre zu; dadurch erhält der Begriff noch ein neues Element, und die hieraus sich ergebende Formel ist:

$$9)\quad D = a + \frac{A_a + A_{a+1} + A_{a+2} \ldots . A_{a+u}}{A_a}$$

Diese Gleichung stellt die mittlere Zahl der Jahre dar, welche eine Person von dem Alter a im Ganzen zu durchleben Hoffnung hat. Um die mittlere Lebensdauer zu finden, hat man sofort die Zahl der durchlebten Jahre von dem erhaltenen Resultate abzuziehen. Die Anwendung der Formel 9 macht daher mehr Mühe als die übrigen.

Nach den hier angeführten Ansichten findet sich in den verschiedenen Sterblichkeitstafeln die mittlere Lebensdauer aufgeführt. Casper hat in seiner Schrift (die wahrscheinliche Lebensdauer pag. 14 §. 5) den Begriff von der mittlern Lebensdauer ganz nach dem Vorgange von Süßmilch mit Belassung der von jenem aufgenommenen und oben hervorgehobenen Unrichtigkeiten wiedergegeben. Dies Versehen ist sogar in die von ihm für Berlin aufgestellte Mortalitätstafel übergegangen, worin die Col. D. die Ueberschrift: „Summe der durchlebten Jahre“ führt. Obgleich C. den Begriff von mittlerer Lebensdauer nicht richtig bestimmt, so sind doch die Werthe, welche über das mittlere Alter in der von ihm mitgetheilten Tafel angegeben sind, richtig, also nach der Formel 6 berechnet, wie sich aus dem Inhalte der Vorrede und einer Vergleichung mit den von mir berechneten Werthen ergiebt. Die von Gebhard über mittlere Lebensdauer angegebenen Werthe bedürfen einer Berichtigung (s. Taf. VI u. Vorrede). Littrow bringt in seiner Schrift (Anleitung zur Berechnung der Lebensrenten und Wittwenpensionen pag. 13) die Formel 5 in Anwendung u. s. w.

Die Berechnung der mittlern Lebensdauer ist für jeden besonders gegebenen Fall nicht ohne Arbeit, wovon man sich bei Anwendung der vorstehenden Formeln leicht überzeugt. Dehnt man die Arbeit aber sogleich auf eine ganze Sterblichkeitstafel aus, so kann man von einer Summe zur andern aufsteigen, und man hat kaum mehr Mühe, die mittlere Lebensdauer für ein eben gebornes Kind, als die für alle Altersstufen zu ermitteln.

In dem Wunsche, dieser Weitläufigkeit zu entgehen, ist der Grund zu den Vorschlägen zu suchen, den Werth der mittlern Lebensdauer auf kürzerm Wege zu geben. Casper führt §. 6 pag. 16 hieher gehörige Notizen an. Einige wollen die mittlere Lebensdauer durch das arithmetische Mittel zwischen der Verhältnißzahl der Bevölkerung zu der Zahl der Geburten und der Todesfälle darstellen. Nennt man die Gesammtzahl der Bevölkerung V, die Zahl der in ihr vorkommenden Geburten G, der Sterbefälle S, so wäre hiernach die mittlere Lebensdauer:

$$10)\quad D = \tfrac{1}{2}\left(\frac{V}{G} + \frac{V}{S}\right).$$

Andere wollen die wahrscheinliche Lebensdauer der Verhältnißzahl der Sterbefälle gleichsetzen. Man sieht, daß alle diese Versuche dem Reiche der Vermuthung angehören und eines innern Halts entbehren. Sollten die aus ihnen sich ergebenden Resultate auch in der That mit den aus den Formeln 3—6 abgeleiteten übereinstimmen, so kann dies nur dem Zufall zuzuschreiben sein. Ein innerer Grund des Zusammenhangs dürfte wohl schwer anzugeben sein. Zudem erstrecken sich alle diese Vorschläge nur auf Bestimmung der mittlern Lebensdauer im Augenblicke der Geburt; für jede andere Altersstufe sind sie unanwendbar. Der letztere Vorschlag hebt die Hälfte der in 10 aufgestellten Hypothese (das zweite Glied, welches die Verhältnißzahl der Bevölkerung zu der Anzahl der Geburten bezeichnet) hervor.

Nachdem sich nun Casper mit Recht nach dem Vorgange von Francis d'Ivernois gegen das Aufstellen solcher Hypothesen, die vorerst jedes innern Grundes entbehren, ausgesprochen, und namentlich auf die Unhaltbarkeit des in 10 aufgestellten Satzes aufmerksam gemacht hat, so kehrt er doch wieder auf ihn §. 7 pag. 18 zurück, eignet sich die andere Hälfte der Hypothese 10 als Eigenthum an und stellt sie als einen Satz »von ungemeiner Wichtigkeit für die Bevölkerungslehre« auf. Seine Thesis, den eben verworfenen gegenüber stellend, fährt er fort: »Dagegen wird, bei einer nur einigermaßen stationären Bevölkerung, wie ich gefunden habe, das Verhältniß der Geburten zur Bevölkerung fast genau die mittlere Lebensdauer (bei der Geburt) ausdrücken.« Dieser Satz stellt sich in Zeichen so dar:

$$11)\quad D = \frac{V}{G}.$$

Alles was so eben gegen die gemachten Versuche bemerkt wurde, gilt auch gegen die Thesis Casper's. Auffallend ist, daß Casper die Widersprüche, worein er, auf diese Annahme sich stützend, gerathen ist, nicht bemerkt hat, was ihm bei einiger Aufmerksamkeit gewiß nicht entgangen wäre. Er sagt nämlich, daß dieser Satz bei einer nur einigermaßen stationären

Bevölkerung gelte und fährt dann fort: »Bestätigt er sich, so müssen das Geburtsverhältniß und die mittlere Lebensdauer in gleichem Verhältnisse steigen und fallen, d. h. wo ersteres steigt, wo mehr und mehr Kinder auf eine gegebene Bevölkerung geboren werden, da wird die mittlere Lebensdauer eben so gleichmäßig kürzer werden.« Dies erklärt er, um Mißverständnisse abzuhalten, an einem Beispiele und sagt dann: »Hieraus geht auf den ersten Blick hervor, was wir unten durch Thatsachen aus mehreren europäischen Ländern beweisen werden, daß, wenn auch nicht der einzelne Mensch, doch das Collectivum seine Lebensdauer (durch Vermehrung oder Verminderung der Zeugungen) gewissermaßen in seiner Hand hat.«

Gilt die von Casper aufgestellte Thesis, wie er voraussetzt, bei einer stationären Bevölkerung, so gilt sie gerade bei einer Bevölkerung im Zustande der Bewegung nicht, und daß sie bei letzterer nicht gilt, sagt C. deutlich, da er sie nur bei stationärer Bevölkerung beobachtet zu haben behauptet. Dennoch trägt er sie ohne Bedenken auf die im Bewegungszustande befindliche Bevölkerung über, und kommt gar zu der ungewöhnlichen Behauptung, daß der Mensch als Collectivum Herr seiner Lebensdauer sei. Nimmt man, um das Auffallende dieser Behauptung zu zeigen, an, daß die Bevölkerung eines Landes in V Individuen bestehe und daß die Zahl der jährlichen Geburten G betrage, so dürften sich sämmtliche zeugungsfähige Personen verabreden, dahin zu arbeiten, daß von nun an nur die Hälfte, der dritte Theil u. s. w. geboren würde. Dadurch würde auf einmal die mittlere Lebensdauer auf das Doppelte, Dreifache u. s. w. erhöht werden, was wohl gewiß auf eine Unhaltbarkeit führt. Auf eine Thatsache ist weiter aufmerksam zu machen, daß seit geraumer Zeit die Bevölkerung Europa's im Zunehmen begriffen ist, und daß zugleich die mittlere Lebensdauer sich gehoben hat. Beide Erscheinungen können nach Casper's Behauptung nicht zusammen bestehen, denn nach ihm muß die mittlere Lebensdauer fallen, wenn die Zahl der Geburten steigt. Sie bestehen aber doch zusammen und widerlegen auf ganz einfache Weise die angeführte Thesis. Die Idee der Uebervölkerung, die Casper hier vielleicht vor Augen hatte, ist ein abnormer Zustand, der durch Gewalt oder Mangel an hinreichendem Nahrungsmittel das Leben einzelner Individuen gefährdet und dadurch die Lebensdauer verkürzt, und kann gerade deswegen nicht bei Beantwortung der berührten Fragen und Feststellung der hier einschlagenden Gesetze als Grundlage dienen.

Um den Inhalt der Gleichungen 3, 5 und 6 vollständig zu rechtfertigen, bleibt noch nachzuweisen übrig, daß die Zeit des Ablebens eines Individuums in die Mitte eines Jahres unter der Annahme einer gleichförmigen Sterblichkeit während einer Jahresfrist zu setzen sei, denn unter dieser Voraus-

setzung wurden die genannten Formeln aufgefunden. Wir zeigen dies auf folgende Weise:

Das Ableben eines Individuums kann in jedem Augenblicke einer Jahresfrist geschehen. Der Augenblick, worin dasselbe vor sich geht, sei am Schlusse des Zeitraums x; so wird sich die Wahrscheinlichkeit, daß es gerade in demselben erfolge, nach 16 §. 84 durch $\frac{M_a}{A_a} \partial x$ ausdrücken lassen. In diesem Falle durchlebt jemand die Zeit x. Der Werth der Erwartung, den Zeitraum x zu durchleben und gerade am Schlusse desselben zu sterben, ist daher nach 1 §. 55:

$$E = \frac{x M_a}{A_a} \partial x.$$

Um nun den Erwartungswerth für alle Zeiträume, die im Laufe eines Jahres möglich sind, zu erhalten, hat man das vorstehende Differenzial zu integriren und zwar zwischen den Grenzen von 0 bis 1, denn x bezieht sich in dem vorliegenden Falle auf eine Jahresfrist und kann sich höchstens auf die Dauer einer solchen erstrecken. Der fragliche Erwartungswerth ist daher:

$$12) \quad \int_0^1 \frac{M_a}{A_a} x \partial x = \frac{M_a}{2A_a}.$$

Das Gesagte läßt sich leicht auf jedes andere Jahr übertragen. Die Wahrscheinlichkeit, im Laufe des $(n+1)$ten Jahre zu sterben, ist daher für eine $a$jährige Person:

$$13) \quad \int_0^1 \frac{M_{a+n}}{A_a} x \partial x = \frac{M_{a+n}}{2 A_a}$$

unter der Voraussetzung, daß das Absterben während einer Jahresfrist gleichförmig vor sich geht. Geht nun das Sterben in der genannten Weise vor sich, und vertritt die Mitte des Jahres die Summe aller möglichen Zeitpunkte, welche im Laufe desselben möglich sind, so führen auch die Gleichungen 3—6 auf richtige Resultate, denn sie beruhen auf dieser Voraussetzung, und die Lebensdauer einer $a$jährigen Person, die im Laufe des $(n+1)$ten Jahres sterben soll, ist auf $(2n+1)$ halbe Jahre zu setzen.

Achtes Kapitel.

Berechnung der Leibrenten, Lebensversicherungen, Wittwenpensionen u. s. w.

§. 86.

Eine Person von dem Alter a will sich eine Leibrente (d. i. eine Rente, welche ihr jährlich, so lange sie lebt, ausgezahlt wird, und deren Auszahlung nach ihrem Tode aufhört) kaufen. Welches ist der gegenwärtige Werth dieser Rente, wenn die Auszahlung der Rente mit dem Ende des Jahres beginnt, worin sie gekauft wird?

Wir behalten die im vorigen Kapitel angenommenen Bezeichnungen bei, nennen die zu kaufende Leibrente K und theilen zwei Arten, den Werth einer Leibrente zu berechnen, mit.

Erste Methode. Die Bestimmung des gegenwärtigen Werthes einer solchen Rente beruht darauf, daß man den Werth einer jeden Jahreszahlung auf den der Gegenwart zurückbringt. Hiezu wird nöthig, daß man weiß, wie oft die Rente ausgezahlt werden muß. Wäre nun das Jahr bekannt, in welchem eine Person sterben wird, so wäre die Berechnung leicht, denn die Beantwortung dieser Frage fiele mit der Bestimmung des gegenwärtigen Werthes einer Rente zusammen, welche während einer Reihe von Jahren fällig ist, und man hätte nach §. 27 den Werth folgender Reihe:

$$\frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}0p^2} + \frac{K}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots \frac{K}{1{,}0p^n}$$

anzugeben. Nun ist aber der Zeitpunkt des Todes einer $a$jährigen Person unbestimmt. Daher kann hier nur nach Gründen der Wahrscheinlichkeit geschlossen werden. Der Käufer kann die Rente durch alle Jahre, welche er bis zur äußersten Lebensgrenze zu durchleben Hoffnung hat, genießen, und doch ist ihm ihr Genuß nicht auf ein einziges Jahr sicher. Er wird daher den Genuß der Rente für das erste Jahr nur mit einer Wahrscheinlichkeit erwarten können, welche von der Hoffnung, das erste Jahr zu durchleben, abhängt. Eben so wird er den Genuß der Rente im zweiten Jahre nur mit einer Wahrscheinlichkeit erwarten können, welche von der Hoffnung, auch dieses Jahr zu durchleben, abhängt. Dasselbe gilt von der Rente des dritten, vierten Jahres u. s. w., überhaupt von allen, möglicherweise von

ihm zu durchlebenden Jahren. Diese Bemerkungen müssen in die Rechnung aufgenommen werden, denn hiernach wird sich der gegenwärtige Werth der Leibrente modificiren. Es kommt nämlich hier nicht der volle Werth jeder Jahresrente, sondern der Erwartungswerth §. 55 und außerdem noch der Rabatt in Betracht, denn jede künftig fällige Jahresrente muß auf die Gegenwart zurückgebracht werden. Nennt man nun die gegenwärtigen Werthe, welche der in den verschiedenen Jahren auszuzahlenden Rente zukommen, der Reihe nach R_1, R_2, R_3 . . . . . R_n, so hat man, um den Werth von R_1 zu bestimmen, den Werth der Rente K mit der Wahrscheinlichkeit, das erste Jahr zu durchleben (1 §. 81 S. 235), zu vervielfachen, woraus sich nach 1 §. 55 der Erwartungswerth ergiebt, und diesen auf ein Jahr zu rabattiren. Hiernach ist:

$$R_1 = \frac{K.A_{a+1}}{A_a} \times \frac{1}{1{,}0\,p} = \frac{K.A_{a+1}}{1{,}0\,p\,.\,A_a}$$

Um den gegenwärtigen Werth der zweiten Jahres-Rente zu erhalten, hat man K mit der Wahrscheinlichkeit, das zweite Jahr zu durchleben, zu vervielfachen und den hiedurch entstandenen Erwartungswerth auf zwei Jahre zu rabattiren. Es ist:

$$R_2 = \frac{K.A_{a+2}}{A_a} \times \frac{1}{1{,}0\,p^2} = \frac{K.A_{a+2}}{1{,}0\,p^2\,A_a}.$$

Eben so ist:

$$R_3 = \frac{K.A_{a+3}}{1{,}0\,p^3\,A_a}.$$

Diese Schlußweise führt sich nun durch alle Jahre bis zur äußersten Lebensgrenze fort. Nennt man nun die Zahl der Jahre, welche jemand von dem Alter a bis zur äußersten Lebensgrenze noch zu durchleben hat, u, so ergiebt sich durch Zusammenzählung aller so erhaltenen Werthe folgende Darstellung:

$$1)\quad L_a = \frac{K.A_{a+1}}{1{,}0\,p\,A_a} + \frac{K.A_{a+2}}{1{,}0\,p^2.A_a} + \frac{K.A_{a+3}}{1{,}0\,p^3\,.\,A_a} + \frac{K.A_{a+4}}{1{,}0\,p^4\,.\,A_a}$$
$$\ldots\ldots \frac{K.A_{a+u-1}}{1{,}0\,p^{u-1}\,A_a} + \frac{K.A_{a+u}}{1{,}0\,p^u\,A_a}$$

wenn L_a den Werth einer Leibrente für eine $a$jährige Person auf die ganze Lebensdauer bezeichnet. Man kann diese Reihe auch so umformen, wenn man K, A_a und $1{,}0\,p$ ausscheidet:

$$2)\quad L_a = \frac{K}{1{,}0pA_a}\left[A_{a+1} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+4}}{1{,}0p^4} \ldots\ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^{u-1}}\right]$$

Zweite Methode. Man kann die vorliegende Aufgabe auch so darstellen: Aus einer Anzahl von Personen von dem Alter a, die durch A_a bezeichnet werden soll, wünscht jede eine Leibrente K zu kaufen. Sie vereinigen sich zu diesem Zwecke. Es soll eine Gesellschaft zur Ausführung

dieses Planes gegründet werden. Wie groß ist die Summe, welche jeder von den Käufern beitragen muß, um das Unternehmen ausführbar zu machen?

Die Aufgabe läßt sich dadurch beantworten, daß man die Summe bestimmt, welche die Gesellschaft nöthig hat, um allen Verpflichtungen, die sie im Laufe der Zeit zu befriedigen übernimmt, nachkommen zu können. Diese lernt man auf folgende Weise kennen. Von A_a zu einem Zwecke zusammentretenden Personen werden nicht alle bis zur äußersten Grenze am Leben bleiben. Sie werden nach einander sterben, und zwar so, daß die Zahl der die verschiedenen Jahre Durchlebenden nach §. 78 durch folgende Reihe aus der Sterblichkeitstafel angedeutet ist:

$$A_{a+1}, A_{a+2}, A_{a+3}, A_{a+4}, \ldots\ldots A_{a+u}.$$

Jede von den überlebenden Personen will nun jährlich die Summe K ausgezahlt haben. Hiernach hat die Casse folgende Ausgaben im Laufe der Zeit zu decken:

$$K.A_{a+1}, K.A_{a+2}, K.A_{a+3}, K.A_{a+4}, \ldots\ldots K.A_{a+u}.$$

Die Gesellschaft muß sich daher in den Besitz eines Kapitals setzen, daß sie am Ende des ersten Jahres $K.A_{a+1}$, am Ende des zweiten $K.A_{a+2}$, am Ende des dritten Jahres $K.A_{a+3}$ auszuzahlen, und ihre Zahlungen ohne Unterbrechung fortzusetzen im Stande ist. Dieses Kapital muß sie gegenwärtig von den Theilnehmern erheben. Man hat daher den Werth der vorstehenden Summen nach §. 28 auf die Gegenwart bei dem Zinsfuß (p) zurückzubringen. Nennt man ihn R, so ist sofort:

$$3)\quad R = \frac{K\,A_{a+1}}{1{,}0\,p} + \frac{K\,A_{a+2}}{1{,}0\,p^2} + \frac{K\,A_{a+3}}{1{,}0\,p^3} + \ldots\ldots \frac{K\,A_{a+u}}{1{,}0\,p^u}$$

Diese Summe wird die Bedürfnisse der Casse decken. Sie ist von sämmtlichen Theilnehmern, deren Zahl A_a ist, zu erheben. Berechnet man die Größe des Antheils, welche der einzelne Theilnehmer zu tragen hat, so ist R durch A_a zu theilen. Hiernach ist der Werth einer Leibrente in dem vorliegenden Falle:

$$4)\quad L_a = \frac{K}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{1{,}0\,p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0\,p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0\,p^3} + \ldots\ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0\,p^u}\right]$$

Der Werth dieser Gleichung ist genau derselbe, welcher in 1 oder 2 gefunden wurde.

Soll der Werth einer Leibrente ermittelt werden, welche so lange an zwei Personen, von denen die eine a, die andere b Jahre alt ist, ausgezahlt wird, als beide zusammenleben, so wird derselbe leicht nach der ersten Methode angegeben werden können. Die Auszahlung einer jeden Jahresrente hängt davon ab, daß beide Personen das fragliche Jahr durchleben. Man hat daher den Werth einer jeden Jahresrente mit der Wahrscheinlichkeit zu verbinden, daß beide Personen dieses Jahr durchleben werden, und dann

den hiedurch entstehenden Werth der Erwartung auf die Gegenwart zurückzubringen. Die Vereinigung aller auf diesem Wege gewonnenen Werthe giebt den der Leibrente. Die Wahrscheinlichkeiten, daß beide Personen die verschiedenen Jahre bis zur äußersten Grenze zusammen durchleben werden, sind aus 1 §. 82 S. 237:

$$\frac{A_{a+1}\,A_{b+1}}{A_a\;A_b}\;,\quad \frac{A_{a+2}\,A_{b+2}}{A_a\;A_b}\;,\quad \frac{A_{a+3}\,A_{b+3}}{A_a\;A_b}\;,\quad \ldots\ldots\;\frac{A_{a+u}\,A_{b+u}}{A_b\;A_b}$$

Ist, wie hier vorausgesetzt wird, die $a$jährige Person die ältere, so bedeutet u die Zahl der Jahre, welche zwischen dem $a$ten und letzten Lebensjahre liegen. Nach diesen Bemerkungen ist der gegenwärtige Werth der am Ende des ersten Jahres auszuzahlenden Rente:

$$R_1 = \frac{K.\,A_{a+1}\,A_{b+1}}{1{,}0\,p\;A_a\,A_b}.$$

Der gegenwärtige Werth der am Ende des zweiten Jahres auszuzahlenden Rente ist:

$$R_2 = \frac{K.\,A_{a+2}\,A_{b+2}}{1{,}0\,p^2\;A_a\,.\,A_b}$$

u. s. w. Wird diese Schlußweise fortgesetzt, so ist der Werth der fraglichen Rente, die durch L_{ab} bezeichnet werden soll:

$$5)\quad L_{ab} = \frac{K}{A_a\;A_b}\left(\frac{A_{a+1}\,A_{b+1}}{1{,}0\,p} + \frac{A_{a+2}\,A_{b+2}}{1{,}0\,p^2} + \frac{A_{a+3}\,A_{b+3}}{1{,}0\,p^3} + \ldots\ldots \frac{A_{a+u-1}\,A_{b+u-1}}{1{,}0\,p^{u-1}} + \frac{A_{a+u}\,A_{b+u}}{1{,}0\,p^u}\right)$$

Daß diese Darstellung auch für gleichalterige Personen gilt, ist leicht ersichtlich. Sie geht dann in folgende über:

$$6)\quad L_{ab} = \frac{K}{(A_a)^2}\left(\frac{(A_{a+1})^2}{1{,}0\,p} + \frac{(A_{a+2})^2}{1{,}0\,p^2} + \frac{(A_{a+3})^2}{1{,}0\,p^3} + \ldots\ldots \frac{(A_{a+u})^2}{1{,}0\,p^u}\right)$$

Auf gleiche Weise läßt sich auch der Werth einer Leibrente, welche auf die Zeit des Zusammenlebens von k Personen, verschiedenen oder gleichen Alters, gilt, bestimmen. Man hat hiernach:

$$7)\quad L_{ab\ldots.k} = \frac{1}{A_a\,A_{b\ldots.}\,A_k}\left[\frac{A_{a+1}\,A_{b+1}\ldots\ldots A_{k+1}}{1{,}0\,p} + \frac{A_{a+2}\,A_{b+2}\ldots\ldots A_{k+2}}{1{,}0\,p^2} + \frac{A_{a+3}\,A_{b+3}\ldots\ldots A_{k+3}}{1{,}0\,p^3}\;\vdots\right]$$

Diese Reihe bricht ab, wenn man bis zur äußersten Lebensgrenze bei irgend einer der fraglichen Personen gelangt ist.

Die zweite oben angegebene Methode zu Bestimmung des Werthes einer Leibrente läßt sich anwenden, sobald die Gesetze aus einer Sterblichkeitstafel bekannt sind, wornach sich das Zusammenleben von je zwei oder drei Personen u. s. w. auflöst.

§. 87.

Soll nun der Werth einer zu kaufenden Leibrente für einen bestimmten Fall berechnet werden, so wird nöthig, die Werthe der einzelnen Glieder in einer der im vorigen §. angegebenen Reihen zu ermitteln und sie in eine Summe zu vereinigen. Die Ausführung der in den entwickelten Formeln angedeuteten Geschäfte ist, wie sich leicht erachten läßt, nicht ohne Mühe und Weitläufigkeit. Es bleibt aber nichts übrig, als im vorkommenden Falle sich dieser Arbeit zu unterziehen. Dabei werden sich jedoch manche Abkürzungen und Erleichterungen in Ausführung der Geschäfte anbringen lassen. Dies wird namentlich dann geschehen können, wenn die in dem vorigen §. aufgefundenen Gleichungen, die in einer unabhängigen Bildungsweise dargestellt sind, auf eine zurücklaufende Form übergeführt werden, wie sich aus dem Folgenden zeigen wird.

Wir wählen hiezu die Gleichung 2 oder 4 §. 86 und stellen die Glieder dieser Reihe in umgekehrter Ordnung dar. Hiedurch wird:

$$1)\quad L_a = \left(\frac{A_{a+u}}{1{,}0\,p^u} + \frac{A_{a+u-1}}{1{,}0\,p^{u-1}} + \frac{A_{a+u-2}}{1{,}0\,p^{u-2}} + \frac{A_{a+u-3}}{1{,}0\,p^{u-3}} + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots\ldots \frac{A_{a+3}}{1{,}0\,p^3} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0\,p^2} + \frac{A_{a+1}}{1{,}0\,p}\right)\frac{K}{A_a}$$

Man kann in dieser Darstellung ganz die Art der Rabattirung anwenden, wie sie in §. 27 und §. 66 S. 175 angewendet wurde. Geschieht dies, so geht 1 über in

$$2)\quad L_a = \Big(\Big(\Big(\ldots\ldots\Big(\Big(\Big(\frac{A_{a+u}}{1{,}0\,p} + A_{a+u-1}\Big)\frac{1}{1{,}0\,p} + A_{a+u-2}\Big)\frac{1}{1{,}0\,p} + A_{a+u-3}\Big)\frac{1}{1{,}0\,p}\ldots$$
$$\ldots\ldots A_{a+3}\Big)\frac{1}{1{,}0\,p} + A_{a+2}\Big)\frac{1}{1{,}0\,p} + A_{a+1}\Big)\frac{K}{A_a . 1{,}0\,p}$$

Hieraus entnimmt sich folgendes Verfahren. Man theile die Zahl der im letzten Lebensjahre Lebenden durch $1{,}0\,p$, zähle hiezu die Zahl derjenigen, welche das vorletzte Lebensjahr durchleben, theile die so erhaltene Summe durch $1{,}0\,p$, zähle zu dem erhaltenen Quotienten die Zahl derjenigen, welche das drittletzte Lebensjahr durchleben, theile die so erhaltene Summe durch $1{,}0\,p$ und fahre so fort, bis man auf das Glied A_{a+1} gekommen ist. Die so erhaltene Summe theile man durch $1{,}0\,p$, ferner durch die Zahl der Personen A_a, welche dem Alter a nach der zu Grunde gelegten Sterblich-

keitstafel zugehören, und vervielfache dann den entstandenen Quotienten durch K, so ist hiedurch der Werth der Leibrente bestimmt. Dies Verfahren kann man auf alle Altersstufen anwenden, und so allmälig nach einer Sterblichkeitstabelle die Werthe der Leibrenten für Personen jedes Alters und Geschlechts berechnen. Die besondern Fälle, worauf die Anwendung der Gleichung 2 hiernach führt, sind folgende:

$$3)\quad L_{u-1} = \frac{A_u\ K}{A_{u-1}\,1{,}0p}$$

$$L_{u-2} = \left(\frac{A_u}{1{,}0\,p} + A_{u-1}\right)\frac{K}{A_{u-2}\,1{,}0p}$$

$$L_{u-3} = \left(\left(\frac{A_u}{1{,}0\,p} + A_{u-1}\right)\frac{1}{1{,}0p} + A_{u-2}\right)\frac{K}{A_{u-3}\,1{,}0\,p}$$

u. s. w. Man sieht hieraus, daß man die Werthe, welche zur Berechnung von L_{u-2} dienen, auch zur Berechnung von L_{u-3}, und die, welche zur Berechnung von L_{u-3} dienen, zur Berechnung von L_{u-4} benutzen kann u. s. w. Soll z. B. für einen 90jährigen Mann der Werth einer Leibrente von 100 Fl. bei 4 Proc. berechnet werden, so ist derselbe, nach der Tabelle von Finlaison (8te Tafel):

$$L_{90} = \frac{100}{11}\left(\frac{7}{1{,}04} + \frac{4}{1{,}04^2} + \frac{3}{1{,}04^3} + \frac{1}{1{,}04^4}\right)$$

$$= \left(\left(\left(\frac{1}{1{,}04} + 3\right)\frac{1}{1{,}04} + 4\right)\frac{1}{1{,}04} + 7\right)\frac{100}{11\,.\,1{,}04}$$

Nach der ersten Form erhält man aus der 3ten Tafel:

$7\,.\,0{,}9615385$	$= 6{,}7307695$	$= 13{,}9507877$
$+\ 4\,.\,0{,}9245562$	$3{,}6982248$	
$+\ 3\,.\,0{,}8889964$	$2{,}6669892$	
$+\ 1\,.\,0{,}8548042$	$0{,}8548042$	

Wird dieses Resultat mit 11 getheilt und mit 100 vervielfacht, so erhält man $L_{90} = 126{,}82534$ Fl. Wird die zweite Methode benutzt, so ist:

$$\left(\frac{1}{1{,}04} + 3\right)\frac{1}{1{,}04} = \frac{1}{1{,}04}\,.\,3{,}96153846\ldots = 3{,}809171597\ldots$$

$$\left(\left(\frac{1}{1{,}04} + 3\right)\frac{1}{1{,}04} + 4\right)\frac{1}{1{,}04} = \frac{1}{1{,}04}\,.\,7{,}80917159\ldots = 7{,}50881865\ldots$$

$$\left(\left(\left(\frac{1}{1{,}04} + 3\right)\frac{1}{1{,}04} + 4\right)\frac{1}{1{,}04} + 7\right)\frac{100}{11.1{,}04} = \frac{100}{11.1{,}04}\,.\,14{,}50881865 =$$

$126{,}8253\ldots$ Fl.

Zugleich erhält man aus der letzten Methode auch noch folgende Werthe:

$$L_{91} = \frac{100}{7}\,.\,7{,}50881865\ldots = 107{,}26883\ldots \text{ Fl.}$$

$$L_{92} = \frac{100}{4} \,.\, 3{,}8091715\,.. = 95{,}22928\ldots \text{ Fl.}$$

$$L_{93} = \frac{100}{3} \,.\, 0{,}961538\ldots = 32{,}05121\ldots \text{ Fl.}$$

Es ist zu bemerken, daß man bei Anwendung der in 2 angegebenen Darstellungsweise die Division durch 1,04 auf viele Decimalstellen fortsetzen muß, wenn der Werth von Leibrenten für jüngere Personen ermittelt werden soll. Dies verursacht natürlich viele Arbeit. Dieser Arbeit beugt man vor, wenn man statt dieser Rechnung Logarithmen gebraucht. Man erhält dann immer sieben Decimalstellen.

Eine andere zurücklaufende Bildungsweise ergiebt sich auf folgende Art. Man kann die Gleichung 2 §. 86 unter folgende Form setzen:

$$4)\quad L_a = \frac{A_{a+1}\,K}{A_a.1{,}0p}\left[1 + \frac{A_{a+2}}{A_{a+1}.1{,}0p} + \frac{A_{a+3}}{A_{a+1}.1{,}0p^2} + \ldots\ldots \frac{A_{a+u}}{A_{a+1}.1{,}0p^{u-1}}\right]$$

$$= \frac{A_{a+1}\,K}{A_a.1;0p}\left[1 + \frac{1}{A_{a+1}}\left(\frac{A_{a+2}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0\,p^2} + \ldots\ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0\,p^{u-1}}\right)\right]$$

Nun drückt offenbar nach 4 §. 86 die in der Klammer eingeschlossene Reihe den Werth einer Leibrente einer Person von $(a+1)$ Jahren aus, deren Werth auf die Einheit zurückgebracht wurde, denn es ist:

$$L_{a+1} = \frac{1}{A_{a+1}}\left(\frac{A_{a+2}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+4}}{1{,}0\,p^3} + \ldots\ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0\,p^{u-1}}\right)$$

Führt man diesen Werth in die Gleichung 4 ein, und bringt den Werth einer Leibrente überhaupt auf die Einheit zurück, so erhält man hieraus folgende Darstellung:

$$5)\quad L_a = \frac{A_{a+1}}{A\ .1{,}0\,p}\,(1 + L_{a+1})$$

Diese Gleichung zeigt, wie der Werth einer Leibrente für eine $a$jährige Person aus dem Werth einer Leibrente abgeleitet wird, die für eine $(a+1)$ jährige gilt. Die vorstehende Gleichung verliert nichts an Allgemeinheit, indem man von dem Werthe einer auf die Einheit zurückgebrachten Leibrente leicht auf jeden andern Werth (K) übergehen kann. Wendet man 5 auf den vorliegenden Fall an, so ist:

$$L_{90} = \frac{7}{11\,.\,1{,}04}\,(1 + L_{91}) = \frac{7\,.\,2{,}0726883\,..}{11\,.\,1{,}04} = 1{,}268253\ldots \text{ Fl.}$$

Endlich kann man die Gleichung 4 §. 86 auch so umformen, daß man allen Gliedern der Reihe nach den Nenner $1{,}0p^u$ giebt. Dadurch entsteht:

$$6)\quad L_a = \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}\,.\,1{,}0\,p^{u-1}}{1{,}0\,p^u} + \frac{A_{a+2}.1{,}0\,p^{u-2}}{1{,}0\,p^u} + \frac{A_{a+3}.1{,}0p^{u-3}}{1{,}0\,p^u} + \ldots\ldots \frac{A_{a+u-1}\,.\,1{,}0p}{1{,}0\,p^u} + \frac{A_{a+u}}{1{,}0\,p^u}\right).$$

oder, wenn der allen Gliedern gemeinschaftliche Nenner ausgeschieden wird:

$$7)\quad L_a = \frac{K}{A_a\, 1{,}0p^u}(A_{a+1}\, 1{,}0p^{u-1} + A_{a+2}\, 1{,}0p^{u-2} + A_{a+3}\, 1{,}0p^{u-3} + \ldots\ldots A_{a+u-1}\, 1{,}0\,p + A_{a+u}).$$

Diese Darstellung läßt sich sehr zweckmäßig benutzen, denn man kann die nöthigen Werthe für die Potenzen von $1{,}0\,p$ aus den Tafeln nehmen, sie mit den Zahlen vervielfachen, welche eine bestimmte Sterblichkeitstafel an die Hand giebt, mit dem höchsten Lebensjahr anfangen, von ihm von Jahr zu Jahr auf die frühern übergehen und die so erhaltene Summe jeweils mit A_a und der entsprechenden Potenz von $1{,}0\,p$ theilen. Dadurch erhält man allmälig die Werthe der Leibrenten für die verschiedenen Altersstufen nach einer bestimmten Sterblichkeits-Tabelle.

Man kann nun auch umgekehrt den Werth einer Leibrente für eine $(a+1)$jährige Person aus dem Werth einer Leibrente für eine $a$jährige nach der Gleichung 5 ableiten. Es ist dann durch eine einfache Umformung:

$$8)\quad L_{a+1} = \frac{A_a \,.\, 1{,}0\,p}{A_{a+1}}\, L_a \;-\; 1.$$

Sollen nun die Werthe der Leibrenten für eine bestimmte Sterblichkeitstafel berechnet werden, so wird es am zweckmäßigsten sein, besondere Rubriken, wie für die Berechnung der mittlern Lebensdauer, anzusetzen, darein allmälig die Zahlenwerthe, wie sie sich nach den Gleichungen 2 und 7 ergeben, einzutragen und die nöthigen Rechnungen auszuführen.

Da die Ausführung der Rechnung so viele Mühe macht, so hat es nicht an Versuchen gefehlt, die Rechnung auf einfachere Formeln zurückzuführen. Morgan (Doctrine of Annuities and Assurances), Moivre (Doctrine of Chances) u. A. haben hieher gehörige Vorschläge gemacht. Die Anwendung der von ihnen vorgeschlagenen Methoden führt nur auf Näherungswerthe und giebt die Resultate nicht genau an. Es würde zu weit führen, hierüber das Nöthige beizubringen. Es ist in den angeführten Schriften und dann in den Werken von Tetens (Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften) und Baily (Theorie der Lebensrenten ꝛc. Weimar 1839) nachzusehen.

Die Richtigkeit der in diesem und dem vorigen § entwickelten Formeln beruht einerseits auf den im 5ten Kapitel, andererseits auf den in §. 28—31 aufgestellten Sätzen. Wäre nicht nachgewiesen, daß in den vorliegenden Fällen die Rabattirung mit Zinses-Zinsen angewendet werden müsse, so würden die hier entwickelten Gleichungen der nöthigen Basis entbehren

Die Werth-Berechnung der Leibrenten wurde unter der Voraussetzung gemacht, daß die Einzahlungen der Mitglieder pünktlich auf die festgesetzte Zeit geschehe und daß die eingezahlten Summen sogleich wieder zinstragend angelegt werden. Beides wird nicht immer geschehen. Da die Käufer von

Leibrenten nicht so häufig sind und daher nicht alle an dem Orte leben, wo die Verwaltung der Anstalt sich befindet, so wird die Einzahlung auf einen bestimmten Zeitpunkt schwer durchzuführen sein. Die Anlage des eingehenden Kapitals wird aus diesem Grunde nicht sicher eingehalten werden können, und die Casse wird einen Ausfall haben. Um den Ausfall zu verhüten, muß die Werthberechnung der Leibrente auf einen spätern Zeitpunkt, als die Gegenwart (etwa ein Jahr später) zurückgeführt werden. Mit Rücksicht hierauf erhält man aus 4 §. 86 S. 260:

$$9)\quad L_a = \frac{K}{A_a}\left(A_{a+1} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+4}}{1{,}0p^3} + \cdots \frac{A_{a+u}}{1{,}0\,p^{u-1}}\right)$$

oder aus 5 dieses §.:

$$10)\quad L_a = \frac{A_{a+1}}{A_a}\,(1 + L_{a+1})$$

wenn der Werth der Leibrente auf die Einheit zurückgebracht wird. Aus 7 ist:

$$11)\quad L_a = \frac{K}{A_a 1{,}0p^{u-1}}\,(A_{a+1}\,1{,}0\,p^{u-1} + A_{a+2}\,1{,}0\,p^{u-2} + A_{a+3}\,1{,}0\,p^{u-3} \ldots\ldots A_{a+u-1}\,1{,}0\,p + A_{a+u})$$

Ferner verursacht die Leitung und Verwaltung der Anstalt Auslagen. Sie müssen auf irgend eine Weise gedeckt werden. Nimmt man an, was am einfachsten ist, daß die jährlichen Verwaltungskosten gleich groß sind und die Summe D erfordern, so ergiebt sich aus 3 §. 86 S. 260 leicht der gegenwärtige Werth des Bedürfnisses der Casse:

$$12)\quad R = \frac{K.A_{a+1}+D}{1{,}0\,p} + \frac{K.A_{a+2}+D}{1{,}0\,p^2} + \frac{K.A_{a+3}+D}{1{,}0\,p^3} + \ldots\ldots \frac{K.A_{a+u-1}+D}{1{,}0\,p^{u-1}} + \frac{K.A_{a+u}+D}{1{,}0\,p}$$

Diese Darstellung zerfällt in zwei Reihen. Der Werth der einen fällt mit 3 §. 86 zusammen, der Werth der andern mit 1 §. 27. Von dem ganzen Bedürfniß hat eine Person den (A_a)ten Theil zu tragen. Hiernach ist der Werth der fraglichen Leibrente:

$$13)\quad L_a = \frac{K}{A_a}\left[\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \cdots \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u}\right] + \frac{D}{A_a}\;\frac{1-1{,}0\,p^n}{0{,}0\,p}$$

Sind die Verwaltungskosten ungleich und zum Voraus bekannt, oder werden sie von Procenten abhängig gemacht, so bietet dies bei der Entwickelung der nöthigen Formeln keine Schwierigkeit. Soll ein Reservefond gebildet werden, um die Anstalt gegen unvorhergesehene Fälle oder mögli-

chen Schaden zu schützen, so kann dies durch ein Eintrittsgeld, oder durch jährliche Zuflüsse geschehen, welche dem Bedürfniß angepaßt und leicht nach den bisherigen Bemerkungen in den Calcul aufgenommen werden können.

§. 88.

Eine Leibrente, die nach Verfluß einer bestimmten Anzahl von Jahren anfängt und bis an das Lebensende fortdauert, soll eine aufgeschobene; eine Leibrente, die nach Jahresfrist beginnt, eine bestimmte Anzahl von Jahren dauert und dann aufhört, soll eine aufhörende; eine Leibrente, die erst nach Verfluß einer bestimmten Anzahl von Jahren beginnt, eine beliebige Zahl von Jahren dauert und dann aufhört, soll eine temporäre heißen.

Es wird nun nach den in den beiden vorigen §§. gegebenen Entwickelungen leicht sein, den gegenwärtigen Werth für jede von den genannten Arten von Leibrenten zu bestimmen. Soll der Werth einer Leibrente berechnet werden, welche nach n Jahren, also mit dem Ende des $(n+1)$ten Jahres beginnen und bis zu dem Tode einer $a$jährigen Person dauern soll, so hat man die Schlüsse, welche in einer der §. 86 angegebenen Methoden niedergelegt wurden, wiederholt anzuwenden. Damit die $a$jährige Person in den Genuß der ersten Rente gelange, muß sie $(n+1)$ Jahre durchleben, um in den Genuß der zweiten zu gelangen, ein Jahr weiter u. s. w. Diese Schlüsse sind bis an die äußerste Lebensgrenze fortzusetzen.

Man hat demnach den Werth der zu beziehenden Leibrente aus den Wahrscheinlichkeiten, die fraglichen Jahre zu durchleben, abzuleiten und die hieraus sich ergebenden Erwartungswerthe auf die Gegenwart zurückzuführen, also auf $(n+1)$ und mehr Jahre zu rabattiren. Es tritt der in 11 und 12 §. 30 betrachtete Fall ein. Es verlangt einerseits die Consequenz, andererseits stimmt mit dieser Forderung die Einrichtung derartiger Anstalten überein, der Werthberechnung Zinses-Zinsen zu Grund zu legen. Diese Bemerkungen führen zu folgender Gleichung für den gegenwärtigen Werth einer aufgeschobenen Leibrente, welche durch $L_{a,n}$ bezeichnet werden soll:

$$1)\quad L_{a,n} = \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_{a+n+1}}{1{,}0p^{n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{1{,}0p^{n+2}} + \frac{A_{a+n+3}}{1{,}0p^{n+3}} + \ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0\,p^{u}}\right)$$

$$= \frac{K}{A_a\,1{,}0\,p^{n}}\left(\frac{A_{a+n+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+n+2}}{1{,}0p^{2}} + \frac{A_{a+n+3}}{1{,}0p^{3}} + \ldots \frac{A_{a+u,}}{1{,}0p^{u-n}}\right)$$

Auf diese Darstellung lassen sich alle Umformungen anwenden, welche in §. 87 angegeben wurden, was keiner weitern Schwierigkeit unterliegt. Man kann sie jedoch auch so umändern:

$$L_{a,n} = \frac{K.A_{a+n}}{A_a\,1{,}0\,p^n} \cdot \frac{1}{A_{a+n}} \left(\frac{A_{a+n+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+n+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+n+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \frac{A_{a+u-1}}{1{,}0p^{u-n-1}} + \frac{A_{a+u}}{1{,}0\,p^{u-n}} \right)$$

Diese Reihe giebt die lebenslängliche Leibrente für eine $(a+n)$jährige Person an. Durch Einführung dieses Werthes hat man:

$$2)\quad L_{a,n} = \frac{A_{a+n}}{A_a 1{,}0p^n}\, L_{a+n}$$

Hiernach ist der Werth einer aufgeschobenen Leibrente auf den einer vollständigen zurückgebracht. Diese Gleichung erleichtert die Arbeit bedeutend.

Eine Leibrente soll m Jahre dauern und dann aufhören. Welches ist ihr gegenwärtiger Werth? Der Werth einer aufhörenden Leibrente ergiebt sich aus §. 86 ganz leicht, denn es ist klar, daß er durch die m ersten Glieder der Reihe 4 §. 86 bedingt ist. Bezeichnet man nun eine Leibrente, die mit dem Ende des laufenden Werthes beginnt und m Jahre dauert, durch $L_{a\,;\,1,m}$, so ist hiernach:

$$3)\quad L_{a\,;\,1,m} = \frac{K}{A_a} \left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{A_{a+m}}{1{,}0\,p^m} \right)$$

Diese Darstellung läßt sich auch so umformen:

$$4)\quad L_{a\,;\,1,m} = \frac{K}{A_a} \left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{A_{a+m}}{1{,}0\,p^m} + \frac{A_{a+m+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{A_{a+m+2}}{1{,}0p^{m+2}} \ldots \right)$$

$$- \frac{K}{A_a} \left(\frac{A_{a+m+1}}{1{,}0p^{m+1}} + \frac{A_{a+m+2}}{1{,}0p^{m+2}} + \ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u} \right)$$

Die zweite Reihe läßt sich auch so geben:

$$\frac{A_{a+m}}{A_a.1{,}0p^m} \cdot \frac{K}{A_{a+m}} \left(\frac{A_{a+m+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+m+2}}{1{,}0\,p^2} + \frac{A_{a+m+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0\,p^{u-m}} \right)$$

$$= \frac{A_{a+m}}{A_a.\,1{,}0p^m}\; L_{a+m}$$

denn die eingeklammerte Reihe giebt offenbar nach 4 §. 86 den Werth einer Leibrente für eine $(a+m)$jährige Person an. Führt man diesen Werth in 4 ein und bemerkt, daß die erste Reihe in 4 den Werth einer Leibrente für eine $a$jährige Person nach 4 §. 86 angiebt, so ergiebt sich folgende Darstellung für den gegenwärtigen Werth einer aufhörenden Leibrente:

$$5)\quad L_{a\,;\,1,m} = L_a - \frac{A_{a+m}}{A_a\,1{,}0\,p^m}\, L_{a+m}$$

Eine Leibrente soll am Ende des $(n+1)$ten Jahres beginnen und r Jahre dauern. Welches ist ihr gegenwärtiger Werth? Um den Werth

einer temporären Leibrente zu bestimmen, hat man aus 4 §. 86 vom $(n+1)$ten Gliede an r Glieder zu nehmen und ihren Werth auf die Gegenwart zurückzuführen. Bezeichnet man nun den Werth einer temporären Leibrente für eine $a$jährige Person durch $L_{a;n,r}$, so hat man hiernach:

$$6)\quad L_{a;n,r} = \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_{a+n+1}}{1{,}0p^{n+1}} + \frac{A_{a+n+2}}{1{,}0p^{n+2}} + \ldots \frac{A_{a+n+r}}{1{,}0p^{n+r}}\right)$$

Diese Darstellung läßt sich so umformen:

$$7)\quad L_{a;n,r} = \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u}\right)$$
$$- \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}\right)$$
$$- \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_{a+n+r+1}}{1{,}0p^{n+r+1}} + \frac{A_{a+n+r+2}}{1{,}0p^{n+r+2}} + \ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u}\right)$$

Die zweite Reihe giebt den Werth einer aufhörenden Leibrente nach 3 an. Die dritte Reihe giebt den Werth einer auf $(n+r)$ Jahre aufgeschobenen Leibrente für eine $a$jährige Person nach 1 an. Setzt man daher $n+r$ statt n in 2, so ist:

$$\frac{A_{a+n+r}}{A_a\ 1{,}0p^{n+r}}\ \frac{K}{A_{a+n+r}}\left(\frac{A_{a+n+r+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+n+r+2}}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^{u-r-n}}\right)$$
$$= \frac{A_{a+n+r}}{A_a\ 1{,}0p^{n+r}}\ L_{a+n+r.}$$

Werden die angezeigten Werthe in 7 eingeführt, so entsteht:

$$8)\quad L_{a;n,r} = L_a - L_{a;1,n} - \frac{A_{a+n+r}}{A_a\ 1{,}0p^{n+r}} \cdot L_{a+n+r}$$

oder auch, wenn der Werth aus 5 statt $L_{a;1,n}$ eingeführt, also n statt m gesetzt wird:

$$9)\quad L_{a;n,r} = \frac{A_{a+n}}{A_a\ 1{,}0p^n} L_{a+n} - \frac{A_{a+n+r}}{A_a\ 1{,}0p^{n+r}} L_{a+n+r.}$$

Die Gleichungen 2, 5 und 9 zeigen, wie die Werthe der aufgeschobenen, aufhörenden und temporären Leibrenten aus denen der vollständigen abgeleitet werden. Die Gleichung 9 ist allgemeiner als 4 §. 86. Letztere läßt sich aus dieser ableiten, wenn die Rente sogleich beginnen und bis an das Lebensende fortdauern soll. Dann geht das negative Glied in 0, und 9 geht in die Gleichung 4 §. 86 S. 260 über.

§. 89.

Die in §. 88 dargestellten Gleichungen haben zur Aufgabe, den Werth der Leibrente zu bestimmen, welche von einer einzigen Person erwor-

ben werden soll. Es kann sich aber auch um die Bestimmung des Werthes solcher Leibrenten handeln, welche von dem Zusammenleben zweier Personen abhängen und die entweder auf die ganze Dauer desselben, oder unter der Bedingung des Zusammenlebens für eine beschränkte Zeit ausgezahlt werden sollen. In §. 86 S. 261 wurde gezeigt, wie der Werth einer Leibrente für die ganze Dauer des Zusammenlebens einer a- und $b$jährigen Person bestimmt wird. Wir verweisen daher auf das dort Gesagte.

Es bleibt nun noch übrig, den Werth solcher Leibrenten zu bestimmen, die in ihrem Anfang oder in ihrer Dauer, oder in beiden zugleich beschränkt sind, und nur unter der Bedingung ausgezahlt werden, als zwei oder mehrere Personen von bestimmtem Alter in einer beschränkten Zeit noch zusammenleben. Hier handelt es sich also um Ermittlung des Werthes der aufgeschobenen, aufhörenden und temporären Leibrenten. Das hiebei zu beobachtende Verfahren schließt sich an das in §. 86 S. 261 und das im vorigen §. angegebene an und besteht in einer Verbindung beider. Soll nun der Werth einer Leibrente bestimmt werden, die nach Verfluß von n Jahren beginnen und so lange dauern soll, als eine a- und $b$jährige Person zusammenleben, so hat man aus der Reihe 5 §. 86 S. 261 alle Glieder vom $(n+1)$ten an herauszuheben. Soll der Werth einer Leibrente bestimmt werden, welche höchstens m Jahre und unter der Bedingung gezahlt wird, daß eine a- und $b$jährige Person noch zusammenleben, so hat man die m ersten Glieder der genannten Reihe hervorzuheben. Bei Bestimmung des Werthes einer temporären r Jahre dauernden Leibrente sind r Glieder hervorzuheben. Hiernach ist der Werth einer aufgeschobenen Leibrente:

$$1) L_{ab,n} = \frac{K A_{a+n+1} A_{b+n+1}}{A_a A_b \,.\, 1{,}0p^{n+1}} + \frac{K A_{a+n+2} A_{b+n+2}}{A_a A_b \,.\, 1{,}0p^{n+2}} + \frac{K A_{a+n+3} A_{b+n+3}}{A_a A_b \,.\, 1{,}0p^{n+3}} + \ldots.$$

$$= \frac{K}{A_a A_b \,.\, 1{,}0p^n} \Sigma_1^{\,u} \frac{A_{a+n+x} A_{b+n+x}}{1{,}0p^x}$$

Hierin ist allmälig 1, 2, 3 . . . . u statt x zu setzen. Die Darstellung läßt sich auch so geben:

$$2) \quad L_{ab,n} = \frac{A_{a+n} A_{b+n}}{A_a A_b \, 1{,}0p^n} L_{(a+n)(b+n)}.$$

Hierin bedeutet $L_{(a+n)(b+n)}$ eine Leibrente für die Dauer des Zusammenlebens zweier Personen von dem Alter $(a+n)$ und $(b+n)$. Der Werth einer aufhörenden Leibrente ist:

$$3) \quad L_{ab;1,m} = \frac{K \,.\, A_{a+1} A_{b+1}}{A_a \,.\, A_b \,.\, 1{,}0p} + \frac{K \,.\, A_{a+2} A_{b+2}}{A_a \,.\, A_b \,.\, 1{,}0p^2} + \ldots. \frac{K \,.\, A_{a+m} A_{b+m}}{A_a A_b \,.\, 1{,}0p^m}$$

$$= \frac{K}{A_a \,.\, A_b} \Sigma_1^{\,m} \frac{A_{a+x} A_{b+x}}{1{,}0p^x} \,.$$

Man kann den Werth dieser Reihe nach dem Vorgange von 5 §. 88 auf lebenslängliche Leibrenten zurückführen. Es entsteht dann:

$$4)\quad L_{ab\,;\,1,\,m} = L_{ab} - \frac{A_{a+m}\,A_{b+m}}{A_a\,A_b\,1{,}0p^m}\,L_{(a+m)\,(b+m)}.$$

Der Werth einer temporären Leibrente ist:

$$5)\quad L_{ab\,;\,n,\,r} = \frac{K\,A_{a+n+1}\,A_{b+n+1}}{A_a\,A_b\,1{,}0p^{n+1}} + \frac{K\,A_{a+n+2}\,A_{b+n+2}}{A_a\,A_b\,1{,}0p^{n+2}} + \ldots\ldots \frac{A_{a+n+r}A_{b+n+r}}{A_a\,A_b\,1{,}0p^{n+r}}$$

$$= \frac{K}{A_a\,A_b\,.\,1{,}0p^n}\,\Sigma_1^{\,r}\,\frac{A_{a+n+x}\,A_{b+n+x}}{1{,}0p^x}$$

Führt man sie auf lebenslängliche Leibrenten zurück, so ist:

$$6)\quad L_{ab\,;\,n,\,r} = \frac{A_{a+n}\,A_{b+n}}{A_a\,A_b\,1{,}0p^n}\,L_{(a+n)\,(b+n)} - \frac{A_{a+n+r}\,A_{b+n+r}}{A_a\,A_b\,.\,1{,}0p^{n+r}}L_{(a+n+r)(b+n+r)}$$

Diese Darstellungen lassen sich leicht in's Allgemeine auf die Werthbestimmung der Leibrenten übertragen, welche von dem Zusammenleben von h Personen abhängen, die dem Alter $a, b, c \ldots h$ zugehören. Man erhält:

$$7)\quad L_{a\,b\,c\ldots\,h} = \frac{K}{A_a\,A_b\,A_c\,\ldots\,A_h}\,\Sigma_{1^u}\,\frac{A_{a+x}\,A_{b+x}\,\ldots A_{h+}}{1{,}0p^x}$$

Der Werth einer aufgeschobenen Leibrente ist:

$$8)\quad L_{\,b\,c\ldots\,h} = \frac{K}{A_a\,A_b\ldots A_h\,.\,1{,}0p^n}\,\Sigma_1^{\,u}\,\frac{A_{a+n+x}\,A_{b+n+x}\ldots A_{h+n+x}}{1{,}0p^x}$$

$$= \frac{A_{a+n}\,A_{b+n}\,\ldots\,A_{h+n}}{A_a\,A_b\ldots A_h\,.\,1{,}0p^n}\,L_{(a+n)\,(b+n)\ldots(h+n)}$$

Der Werth einer aufhörenden Leibrente ist:

$$9)\quad L_{a\,b\,c\ldots\,h\,;\,1,\,m} = \frac{K}{A_a\,A_b..A_h}\,\Sigma_1^{\,m}\,\frac{A_{a+x}\,A_{b+x}\ldots A_{h+x}}{1{,}0p^x}$$

$$= L_{a\,b\,c\ldots\,h} - \frac{A_{a+m}\,A_{b+m}\ldots A_{h+m}}{A_a\,A_b\ldots A_h\,.\,1{,}0p^m}\,L_{(a+m)\,(b+m)\,..\,(h+m)}$$

Der Werth einer temporären Leibrente ist:

$$10)\quad L_{a\,b\,c\,\ldots\,h\,;\,n,\,r} = \frac{K}{A_a\,A_b\ldots A_h\,.\,1{,}0p^n}\,\Sigma_1^{\,r}\,\frac{A_{a+n+x}\,A_{b+n+x}\ldots A_{h+n+x}}{1{,}0p^x}$$

$$= \frac{A_{a+n}\,A_{b+n}\ldots A_{h+n}}{A_a\,A_b\ldots A_h\;1{,}0p^n}\,L_{(a+n)\;(b+n)\ldots\,(h+n)}$$

$$- \frac{A_{a+n+r}\,A_{b+n+r}\ldots A_{h+n+r}}{A_a\,A_b\ldots A_h\;1{,}0p^{n+r}}\,L_{(a+n+r)\,(b+n+r)\ldots\,(h+n+r)}$$

Die in §. 87 angegebenen zurücklaufenden Berechnungsmethoden lassen sich, wie man leicht erkennt, auch auf die hier mitgetheilten Gleichungen anwenden.

§. 90.

Aus den in §. 86 — 88 mitgetheilten Gleichungen lassen sich nun weitere Ableitungen machen, von denen hier folgende mitgetheilt werden sollen.

Eine Person, welche a Jahre alt ist, kann über eine Summe S verfügen. Sie will sich eine Leibrente kaufen, welche von dem Ende des laufenden Jahres an ausgezahlt werden und bis zur äußersten Lebensgrenze dauern soll. Wie groß ist die Leibrente, welche sie dafür bei dem Zinsfuß p erhalten wird?

Hat man Tafeln, worin die Werthe der Leibrenten für jedes Alter bei dem Zinsfuße p berechnet sind, so ergiebt sich die Beantwortung der vorliegenden Frage leicht, denn man hat nur eine Vergleichung zwischen dem Werth, welchen eine Leibrente für eine $a$jährige Person hat (L_a), und der Leibrente (K) anzustellen und von dem Verhältnisse beider auf die Summe S und der ihr zugehörigen Leibrente (x) überzugehen. Dies führt zu folgender Proportion nach 4:

$$L_a : K = S : x.$$

$$\text{Also: } 1)\quad x = \frac{K \,.\, S}{L_a}$$

Sind aber die hiezu nöthigen Elemente nicht bekannt, so wird eine der Gleichungen 2 oder 4 §. 86 dienen, um die Frage zu beantworten. Es handelt sich nämlich darum, den Werth der jährlichen Rente kennen zu lernen, welche man erhält, wenn die ihr gegenwärtig gleiche Summe (L_a) bekannt oder gegeben ist. Setzt man daher S für L_a und x statt K in 4 §. 86, so hat man x abzuleiten. Hiedurch entsteht:

$$2)\quad x = S : \frac{1}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u}\right)$$

Man sieht, daß der Divisor auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens der Werth einer auf die Einheit reducirten Leibrente für eine $a$jährige Person ist. Bezeichnet man den Werth einer solchen Leibrente, wie früher, durch L_a, so kann man die Gleichung 2 unter dieser Voraussetzung auch so schreiben:

$$3)\quad x = \frac{S}{L_a}$$

Das Gesagte läßt sich nun leicht auf die in den beiden vorigen §§. angegebenen Gleichungen anwenden. Soll der Werth einer auf n Jahre aufgeschobenen Leibrente bestimmt werden, welche eine $a$jährige Person für die Summe S kaufen will, so ergiebt sich ihr Werth aus den Gleichungen 1 und 2 §. 88. Man hat K als unbekannte Größe zu entwickeln. Es ist sofort:

$$4)\quad x = S : \frac{1}{A_a . 1{,}0p^n}\left(\frac{A_{a+n+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+n+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+n+3}}{1{,}0p^3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{S \,.\, A_a \,.\, 1{,}0p^n}{A_{a+n} \,.\, L_{a+n}}$$

wenn L_{a+n} den Werth einer auf die Einheit reducirten aufgeschobenen Leibrente bezeichnet.

Soll der Werth einer nach m Jahren aufhörenden Leibrente bestimmt werden, welche eine $a$jährige Person für die Summe S kaufen will, so ist aus 4 und 5 §. 88, S. 268:

$$5)\quad x = S : \frac{1}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{A_{a+m}}{1{,}0p}\right)$$

$$= \frac{S}{L_{a\,;\,1,\,m}} = S : \left(L_a - \frac{A_{a+m}}{A_a \,.\, 1{,}0p^m} L_{a+m}\right)$$

wenn $L_{a\,;\,1,\,m}$, L_a, L_{a+m} die Werthe der auf die Einheit reducirten entsprechenden Leibrenten bezeichnen. Soll endlich der Werth einer temporären Leibrente, die nach n Jahren beginnt und r Jahre dauert, bestimmt werden, welche eine $a$jährige Person um die Summe S kaufen will, so ist aus 6 und 9 §. 88, S. 269:

$$6)\quad x = S : \frac{1}{A \,.\, 1{,}0p^n}\left(\frac{A_{a+n+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+n+2}}{1{,}0p^2} + \ldots \frac{A_{a+n+r}}{1{,}0p^r}\right)$$

$$= S : \left(\frac{A_{a+n}}{A_a \,.\, 1{,}0p^n} L_{a+n} - \frac{A_{a+n+r}}{A_a \; 1{,}0p^{n+r}} L_{a+n+r}\right)$$

wenn auch hier L_{a+n} und L_{a+n+r} auf den angegebenen Werth reducirt sind.

Die vorstehenden Gleichungen gelten unter der Voraussetzung, daß keine Verwaltungskosten zu decken sind. Sollen nun diese mit in Rechnung gebracht werden, so kommt die Gleichung 13 §. 87 in Betrachtung, und man erhält dann zur Werthbestimmung eine Leibrente, welche für die Summe S von einer $a$jährigen Person gekauft werden kann:

$$7)\quad x = \left(S - \frac{D}{A_a}\,\frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}\right) : \frac{1}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{S}{L_a} - \frac{D}{A_a \, L_a} \cdot \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}$$

u. s. w. Soll nun eine aufhörende oder eine solche Leibrente gekauft werden, die mit dem Ende des laufenden Jahres beginnt und bis zum Tode einer $a$jährigen Person dauert, so muß der Betrag dafür sogleich erlegt werden. Bei einer aufgeschobenen oder temporären ist die Erlegung des ganzen Kaufpreises nicht sogleich nöthig. Er kann auch durch jährliche

Beiträge erhoben werden, welche dann aufhören, wenn die Rente beginnt. Dies führt zur Beantwortung folgender Frage.

Irgend eine Summe S soll sogleich erlegt werden. Der Schuldner, welcher a Jahre alt ist, wünscht sie durch jährliche, gleich große Beiträge (B) zu tilgen, die n Jahre dauern sollen, jedoch aufhören, wenn innerhalb dieser n Jahre der Schuldner stirbt, und zwar von dem Jahre an, worin derselbe stirbt. Dies wird ihm zugestanden. Wie groß ist der jährliche Beitrag, welchen der Schuldner unter den angegebenen Bedingungen zu leisten hat?

Der jährliche Beitrag wird höchstens $n$mal geleistet. Er muß daher so beschaffen sein, daß der Gläubiger oder die Casse nicht zu Schaden gelangt, wenn jener auch früher stirbt. Da nun die Beiträge nur so lange geleistet werden, als der Schuldner lebt, so muß auch von dieser Voraussetzung der Calcul ausgehen. Damit der Beitrag einmal gezahlt werde, muß der Schuldner das erste Jahr durchleben. Der gegenwärtige Werth dieses Beitrags ist:

$$R_1 = \frac{A_{a+1}}{A_a} \frac{B}{1{,}0p}$$

Damit der zweite Beitrag entrichtet werde, muß der Schuldner das zweite Jahr durchleben. Der gegenwärtige Werth der Summe B, welche nach zwei Jahren unter dieser Bedingung fällig wird, ist:

$$R_2 = \frac{A_{a+2}}{A_a} \frac{B}{1{,}0p^2}$$

Diese Schlußweise ist durch die verschiedenen Altersstufen des Schuldners fortzusetzen. Der gegenwärtige Werth des zuletzt fälligen Beitrages ist:

$$R_n = \frac{A_{a+n}}{A_a} \frac{B}{1{,}0p^n}$$

Die eben genannten Werthe müssen der gegenwärtig fälligen Schuld gleich sein. Es ist daher:

$$S = \frac{B\,A_{a+1}}{A_a . 1{,}0p} + \frac{B\,A_{a+2}}{A_a . 1{,}0p^2} + \frac{B\,A_{a+3}}{A_a . 1{,}0p^3} + \cdots \frac{B\,A_{a+n}}{A_a . 1{,}0p^n}$$

$$= \frac{B}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \cdots \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}\right)$$

und hieraus:

$$8)\quad B = S : \frac{1}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \cdots \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}\right)$$

Zu dem nämlichen Resultate würde man gelangen, wenn man von der Forderung des Gläubigers oder, was dasselbe ist, von dem Bedürfnisse der Casse ausgeht und annimmt, daß eine Anzahl von Personen, von denen jede a Jahre alt ist und von denen jede die Summe S schuldet, ihre Schuld

in jährlich zu leistende, gleiche Beiträge unter den oben genannten Bedingungen verwandelt zu haben wünscht. Die Casse erhält daher während n Jahren jährlich nicht A_a Mal den Beitrag B, sondern jährlich nur so viel Mal, als Personen noch am Leben sind. Die Summen, welche zusammen eingehen, haben daher folgenden Werth (R):

$$9)\quad R = \frac{B\,A_{a+1}}{1,0p} + \frac{B\,A_{a+2}}{1,0p^2} + \frac{B\,A_{a+3}}{1,0p^3} + \ldots \frac{A_{a+n}\,B}{1,0p^n}$$

Dieser Werth muß der Gesammteinnahme der Casse gleichkommen, welche $A_a . S$ ausmacht. Den einzelnen Schuldner trifft daher der (A_a)te Theil der Gesammtschuld. Diese ist:

$$S = \frac{B}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1,0p} + \frac{A_{a+2}}{1,0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1,0p^3} + \ldots \frac{A_{a+n}}{1,0p^n}\right)$$

Diese Darstellung führt auf die Gleichung 8. In der Darstellung 8 wurde die Tilgungszeit für die gegenwärtige Schuld S auf höchstens n Jahre festgesetzt. Diese Beschränkung ist nicht nöthig. Man kann sie auch auf die ganze Lebensdauer einer Person ausdehnen und annehmen, daß die jährlichen Zahlungen überhaupt mit dem Tode aufhören. Die Grundzüge für die Rechnung bleiben ungeändert und man hat nur die Glieder der Reihe 8 oder 9 bis zur Grenze des menschlichen Lebens fortzuführen. Unter dieser Voraussetzung erhält man:

$$10)\quad B = S : \frac{1}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1,0p} + \frac{A_{a+2}}{1,0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1,0p^3} + \ldots \frac{A_{a+n}}{1,0p^n}\right)$$

Diese Gleichung zeigt, wie eine Schuld S auf Lebensdauer getilgt wird. Man erkennt, daß die Gleichung 8 mit 5 und die Gleichung 10 mit 2 übereinkommt. Man kann daher die Gleichung 8 und 10 auch so darstellen:

$$11)\quad B = \frac{S}{L_{a\,;\,1,\,n}} = S : \left(L_a - \frac{A_{a+n}}{A_a . 1,0p^n} L_{a+n}\right)$$

$$12)\quad B = \frac{S}{L_a}$$

wenn L_a und $L_{a\,;\,1,\,n}$, L_{a+n} die Werthe der auf die Einheit reducirten Leibrenten bezeichnen. Man kann nun die nämlichen Fragen in Bezug auf die in §. 89 entwickelten Gleichungen aufstellen. Ihre Beantwortung unterliegt keiner weiteren Schwierigkeit, weswegen sie nicht besonders hervorgehoben wird.

Die Gleichungen 8 und 10 setzen voraus, daß die Beiträge mit dem Ende des ersten Jahres beginnen. Sollen sie aber sogleich beginnen, so muß der zu leistende Beitrag einmal in unveränderter Größe dazu gezählt werden, und man erhält dann folgende Gleichung:

$$S = B + \frac{B\,A_{a+1}}{A_a . 1,0p} + \frac{B\,A_{a+2}}{A_a . 1,0p^2} + \ldots\ldots \frac{B\,A_{a+n-1}}{A_a . 1,0p^{n-1}}$$

Hieraus ergiebt sich folgende Bestimmung:

$$13)\quad B = S : \left(1 + \frac{A_{a+1}}{A_a . 1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{A_a . 1{,}0p^2} + \ldots\ldots \frac{A_{a+n-1}}{A_a . 1{,}0p^{n-1}}\right)$$

Zu der nämlichen Gleichung führt die Methode, aus welcher 9 abgeleitet wurde. Bei Zahlungen auf die ganze Lebensdauer hat man u statt n in 13 zu setzen, und es wird:

$$14)\quad B = \frac{S}{1 + L_a}$$

§. 91.

Eine Person von dem Alter a will für eine Person von dem Alter b eine Leibrente kaufen, welche mit dem Ende des Jahres beginnt, worin die $a$jährige Person stirbt, und dann bis zum Jahre der äußersten Lebensgrenze fortdauert. Wie groß ist der gegenwärtige Werth dieser Leibrente?

Wir theilen zur Auflösung der vorliegenden Aufgabe folgende Methoden mit und nehmen der Einfachheit wegen die Einheit als den Werth der zu kaufenden Leibrente an.

Erste Methode. Die Ermittelung des Werthes der genannten Leibrente schließt sich an die in §. 86 angegebene erste Methode über die Berechnung der Leibrenten an, jedoch mit dem Unterschiede, daß der Genuß der hier in Frage stehenden Leibrente an zwei Bedingungen geknüpft ist, während jener nur von einer abhängt. Soll nämlich die $b$jährige Person in den Genuß der Leibrente treten, so wird nicht nur vorausgesetzt, daß dieselbe noch lebe, sondern auch, daß die $a$jährige schon todt sei. Wäre nun das Jahr bekannt, worin die $a$jährige Person sterben wird, so wäre die Aufgabe leicht gelöst, denn sie wäre darauf zurückgebracht, daß man den Werth einer von dem Ende des Todesjahrs fälligen Leibrente für eine $b$jährige Person nach §. 88 zu bestimmen hätte. Da dies aber nicht bekannt ist, so sind alle Fälle, in welchen die $b$jährige Person in den Genuß der Leibrente treten kann, zu ermitteln, die hieraus sich ergebenden Erwartungswerthe zu bestimmen, und aus ihnen ist der gegenwärtige Werth der fraglichen Rente abzuleiten. Es sind nun folgende Fälle möglich, welche der in den Genuß der Leibrente tretenden Person günstig sind. Sie genießt die Leibrente nicht nur im ersten, sondern auch im zweiten, im dritten Jahre nach dem Kaufe u. s. w., endlich durch alle von ihr bis zur äußersten Lebensgrenze zu durchlebenden Jahre.

Der Genuß der Rente im ersten Jahre setzt voraus, daß sie nicht nur lebe, sondern auch, daß die $a$jährige Person im Laufe dieses Jahres gestorben sei. Die erste Wahrscheinlichkeit ist $\frac{A_{b+1}}{A_b}$ nach 1 §. 81, die letzte

$1 - \frac{A_{a+1}}{A_a}$ nach 3 §. 81. Beide Ereignisse müssen zusammentreffen. In diesem Falle erhält sie die Einheit ausgezahlt. Man hat nun beide Wahrscheinlichkeiten mit sich und der Einheit zu vervielfachen und den so erhaltenen Erwartungswerth auf die Gegenwart zurückzubringen. Hiernach ist:

$$R_1 = \left(1 - \frac{A_{a+1}}{A_a}\right) \frac{A_{b+1}}{A_b \, 1{,}0p}$$

Der Genuß der Rente im zweiten Jahre setzt voraus, daß die *b*jährige Person am Ende des zweiten Jahres noch lebe, daß dagegen die *a*jährige diese Zeit nicht mehr erleben werde, sondern schon früher (im ersten oder zweiten Jahre) gestorben sei. Die Wahrscheinlichkeit für ersteres ist $\frac{A_{b+2}'}{A_b}$ für letzteres $1 - \frac{A_{a+2}}{A_a}$ (1 und 3 §. 83). An das Zusammenbestehen beider Ereignisse knüpft sich der Genuß einer Rente, deren Betrag die Einheit ist. Verbindet man daher die beiden Wahrscheinlichkeiten mit sich und mit der Einheit und bringt den hiedurch entstandenen Werth der Erwartung auf die Gegenwart zurück, so erhält man hiefür:

$$R_2 = \left(1 - \frac{A_{a+2}}{A_a}\right) \frac{A_{b+2}}{A_b \, 1{,}0p^2}$$

Der Genuß der Rente im dritten Jahre setzt voraus, daß die *b*jährige Person am Ende des dritten Jahres noch lebe, daß dagegen die *a*jährige diesen Zeitpunkt nicht mehr erleben werde, sondern schon früher (im ersten, zweiten oder dritten Jahre) gestorben sei. Bestimmt man nun die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten aus §. 83, ermittelt den hiedurch bedingten Erwartungswerth und bringt ihn auf die Gegenwart zurück, so erhält man:

$$R_3 = \left(1 - \frac{A_{a+3}}{A_a}\right) \frac{A_{b+3}}{A_b \, 1{,}0p^3}$$

Setzt man nun die angezeigte Schlußweise fort, so gelangt man endlich zu allen Ausdrücken, welche auf die Bestimmung des gegenwärtigen Werthes der Leibrente Einfluß haben. Man hat nun, um den Werth der fraglichen Leibrente anzugeben, sämmtliche hiedurch entstehende Ausdrücke zusammenzuzählen. Hiedurch entsteht eine Reihe von Gliedern, deren Fortgangsgesetz leicht erkenntlich ist. Man erhält folgende Darstellung, wenn man die fragliche Leibrente durch $L_{(1\text{-}a)b}$ bezeichnet:

$$1)\ L_{(1\text{-}a)b} = \left(1 - \frac{A_{a+1}}{A_a}\right) \frac{A_{b+1}}{A_b \, 1{,}0p} + \left(1 - \frac{A_{a+2}}{A_a}\right) \frac{A_{b+2}}{A_b \, 1{,}0p^2} + \ldots$$

$$= \Sigma_1^{\,u} \left(1 - \frac{A_{a+x}}{A_a}\right) \frac{A_{b+x}}{A_b \, 1{,}0p^x}$$

Die Zahl der Glieder dieser Reihe ist noch unbestimmt und es fragt sich,

wie viel ihr zugehören? Die Beantwortung dieser Frage hängt von dem Altersverhältniß (a und b), worin die beiden Personen zu einander stehen, und der Lebensdauer, welche einer jeden zukommt, ab. Sie können nämlich entweder von verschiedenem oder von gleichem Alter sein und können in dem einen oder andern Falle gleichem oder verschiedenem Geschlechte angehören, was insoweit von Bedeutung ist, als hievon eine verschiedene Lebensdauer abhängt und daher ein Mann von einer gleichalterigen Frau wahrscheinlich überlebt werden wird, was auf den Calcul Einfluß hat.

Der einfachste Fall ist nun der, daß das Alter beider Personen so beschaffen ist, daß sie beide die gleiche Zahl von Jahren (u) bis zur äußersten Lebensgrenze zu durchleben haben. In diesem Falle hat die vorstehende Reihe u Glieder, und man erhält aus 1 folgende Darstellung:

$$2)\ L_{(1\text{-}a)\,b} = \left(1 - \frac{A_{a+1}}{A_a}\right)\frac{A_{b+1}}{A_b\ 1{,}0p} + \left(1 - \frac{A_{a+2}}{A_a}\right)\frac{A_{b+2}}{A_b\ 1{,}0p^2} + \ldots .$$

$$\ldots . \left(1 - \frac{A_{a+u-1}}{A_a}\right)\frac{A_{b+u-1}}{A_b\ 1{,}0p^{u-1}} + \left(1 - \frac{A_{a+u}}{A_a}\right)\frac{A_{b+u}}{A_b\ 1{,}0p^u}$$

$$= \Sigma_1^{\,u}\left(1 - \frac{A_{a+x}}{A_a}\right)\frac{A_{b+x}}{A_b\ 1{,}0p^x}$$

Die nämliche Gleichung gilt noch, wenn die Zeit, welche die eingekaufte Person von dem Alter b bis zur höchsten Lebensgrenze zu durchleben hat, kleiner ist, als diejenige, welche die einkaufende Person von dem Alter a hat. In diesem Falle kann die einkaufende Person die eingekaufte überleben. Dies bringt aber keine Aenderung in der Gleichung hervor, weil mit dem Tode der eingekauften Person der Rentengenuß jedenfalls aufhört und daher nicht mehr in Rechnung kommt. Die einkaufende Person kann im letzten Falle die eingekaufte beliebig lange überleben. Hieraus folgt, daß in diesem Falle die Gleichung 2 noch immer in Geltung bleibt und daß sich dann das u auf die Zahl der Jahre der $b$jährigen Person bezieht. Ist aber das Alter beider Personen so beschaffen, daß die Lebensgrenze, bis zu welcher sich das Alter der eingekauften $b$jährigen Person erstrecken kann, größer ist, als diejenige, bis zu welcher sich das der einkaufenden $a$jährigen erstrecken kann, und nimmt man an, daß dieser Ueberschuß sich auf z Jahre erhebt, dann kann die eingekaufte Person noch z Jahre nach dem Tode der einkaufenden im Genusse der Rente möglicherweise bleiben. Dies muß in Rechnung gezogen werden. Damit sie die Rente im ersten Jahre genieße, muß die eingekaufte Person noch ein Jahr leben und die einkaufende todt sein. Letzteres ist gewiß, da die Zeit der Lebensgrenze überschritten ist. Hiernach ist der gegenwärtige Werth dieses Rentengenusses:

$$R_{u+1} = \frac{A_{b+u+1}}{A_b\,.\,1{,}0p^{u+1}}$$

Auf dieselbe Weise erhält man für den gegenwärtigen Werth des Rentengenusses im nachfolgenden Jahre:

$$R_{u+2} = \frac{A_{b+u+2}}{A_b \,.\, 1{,}0p^{u+2}}$$

u. s. w. Zählt man nun alle hieraus sich ergebenden Werthe zusammen, so erhält man hiefür:

$$3)\quad R_x = \frac{A_{b+u+1}}{A_b\ 1{,}0p^{u+1}} + \frac{A_{b+u+2}}{A_b\ 1{,}0p^{u+2}} + \frac{A_{b+u+3}}{A_b\ 1{,}0p^{u+3}} + \cdots \frac{A_{b+u+z}}{A_b\ 1{,}0p^{u+z}}$$

Diesen Werth hat man noch zu 2 zu zählen, um in dem vorliegenden Falle ein richtiges Resultat zu erhalten. Es ist sofort:

$$4)\quad L_{(1\text{-}a)\,b} = \left(1 - \frac{A_{a+1}}{A_a}\right)\frac{A_{b+1}}{A_b\ 1{,}0p} + \left(1 - \frac{A_{a+2}}{A_a}\right)\frac{A_{b+2}}{A_b\ 1{,}0p^2} + \cdots$$

$$\cdots \left(1 - \frac{A_{a+u-1}}{A_a}\right)\frac{A_{b+u-1}}{A_b\ 1{,}0p^{u-1}} + \left(1 - \frac{A_{a+u}}{A_a}\right)\frac{A_{b+u}}{A_b\ 1{,}0p^{u}}$$

$$+ \frac{A_{b+u+1}}{A_b\ 1{,}0p^{u+1}} + \frac{A_{b+u+2}}{A_b\ 1{,}0p^{u+2}} + \cdots \frac{A_{b+u+z}}{A_b\ 1{,}0p^{u+z}}$$

Man kann nun die in 2 und 4 angezeigten Multiplicationen ausführen. Geschieht dies und werden die hieraus sich ergebenden Glieder geordnet, so erhält man folgende Darstellung:

$$5)\quad L_{(1\text{-}a)\,b} = \frac{A_{b+1}}{A_b\ 1{,}0p} + \frac{A_{b+2}}{A_b\ 1{,}0p^2} + \frac{A_{b+3}}{A_b\ 1{,}0p^3} + \cdots$$

$$\cdots \frac{A_{b+u}}{A_b \,.\, 1{,}0p^{u}} + \frac{A_{b+u+1}}{A_b \,.\, 1{,}0p^{u+1}} + \cdots \frac{A_{b+u+z}}{A_b \,.\, 1{,}0p^{u+z}}$$

$$- \left(\frac{A_{a+1}\,A_{b+1}}{A_a\,A_b \,.\, 1{,}0p} + \frac{A_{a+2}\,A_{b+2}}{A_a\,A_b \,.\, 1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}\,A_{b+3}}{A_a\,A_b \,.\, 1{,}0p^3} + \cdots \frac{A_{a+u}\,A_{b+u}}{A_a\,A_b \,.\, 1{,}0p^{u}}\right)$$

Man bemerkt nun leicht, daß die erste Horizontalreihe den Werth einer auf die Einheit reducirten Leibrente für die eingekaufte *b*jährige Person (4 §. 86), die zweite aber den Werth einer auf die Einheit reducirten Leibrente ausdrückt, welche von dem Zusammenleben der einkaufenden und eingekauften Person abhängt (5 §. 86). Hiernach läßt sich 5 auch so darstellen:

$$6)\quad L_{(1\text{-}a)\,b} = L_b - L_{ab} = \Sigma_1^{\,u}\ \frac{A_{b+x}}{A_b\ 1{,}0p^x} - \Sigma_1^{\,u}\ \frac{A_{a+x}\,A_{b+x}}{A_a\,A_b\ 1{,}0p^x}$$

Diese Gleichung umfaßt die zu 2 erörterten Fälle und gilt allgemein. Die betreffenden Personen können von gleichem oder verschiedenem Alter und Geschlechte sein.

Zweite Methode. Die vorliegende Aufgabe läßt sich auch auf die nachstehende Weise beantworten. Folgende Fälle können eintreten, von denen der Werth der zu kaufenden Leibrente abhängt. Die kaufende Person, welche

a Jahre alt ist, stirbt entweder im ersten, oder zweiten, oder dritten Jahre, überhaupt in irgend einem Jahre, welches zwischen der Einkaufszeit und der höchsten Lebensgrenze der $a$jährigen Person liegt. Von dem Ende desjenigen Jahres, worin der Tod erfolgt, soll die eingekaufte $b$jährige Person in den Genuß einer lebenslänglichen Leibrente eintreten. Alle diese Momente sind in den Calcul aufzunehmen, um den gegenwärtigen Werth der zu kaufenden Rente zu bestimmen.

Die $a$jährige Person stirbt im ersten Jahre. In diesem Falle ist der Werth einer lebenslänglichen Rente für die $b$jährige Person zu entrichten. Die Wahrscheinlichkeit nun, daß Jemand von dem Alter a im Laufe dieses Jahres sterben werde, ist nach 4 §. 81 $\frac{M_a}{A_a}$. Tritt dieser Fall ein, so ist gegenwärtig der Werth L_b nach §. 86 zu zahlen. Hieraus erhält man folgenden Erwartungswerth:

$$R_1 = \frac{M_a}{A_a} L_b$$

Die $a$jährige Person stirbt im Laufe des zweiten Jahres nach dem Einkauf. Die Wahrscheinlichkeit, daß dies geschehen werde, ist $\frac{M_{a+1}}{A_a}$ nach 4 §. 81. In diesem Falle ist der gegenwärtige Werth einer aufgeschobenen Leibrente, welche mit dem Ende des zweiten Jahres beginnt, nach 1 §. 88, S. 267 mit der angegebenen Wahrscheinlichkeit zu verbinden. Es ist sofort:

$$R_2 = \frac{M_{a+1}}{A_a} L_{b,1}$$

Stirbt die $a$jährige Person im Laufe des dritten Jahres, so kommt ebenfalls der Werth einer aufgeschobenen Leibrente in Betrachtung und ist mit der Wahrscheinlichkeit des Absterbens (§. 81) zu verbinden. Es ist sofort der hiedurch bedingte Werth:

$$R_3 = \frac{M_{a+2}}{A_a} L_{b,2}$$

u. s. w. Setzt man diese Schlußweise bis zur äußersten Lebensgrenze der $a$jährigen Person fort, so erhält man folgende Darstellung für den gesuchten Werth:

$$7)\quad L_{(1\text{-}a)\,b} = \frac{^{a}}{A_a} L_b + \frac{M_{a+1}}{A_a} L_{b,1} + \frac{M_{a+2}}{A_a} L_{b,2} \ldots\ldots$$

$$\frac{M_{a+u-2}}{A_a} L_{b,u-2} + \frac{M_{a+u-1}}{A_a} L_{b,u-1} + \frac{M_{a+u}}{A_a} L_{b,u}$$

$$= \Sigma_0^{u} \frac{M_{a+x}}{A_a} L_{b,x}$$

In dieser Gleichung sind alle gedenkbaren Fälle vorgesehen. Ist die

Lebensdauer der *b*jährigen Person größer als der *a*jährigen, so deuten alle Glieder auf den in 3 angeführten Fall, weil $L_{b,x}$ sich auf eine aufgeschobene lebenslängliche Leibrente der *b*jährigen Person bezieht. Im umgekehrten Falle kann die Zahl der Glieder nur soweit steigen, als die äußerste Lebensgrenze zuläßt, worauf sich der Ausdruck $L_{b,x}$ bezieht.

So verschieden die Darstellung 7 von den Darstellungen 5 und 6 der Form nach ist, so fällt sie doch dem Inhalte nach mit jenen zusammen. Dies bestätigt sich am einfachsten dadurch, daß man 5 aus 7 ableiten kann. Diese Ableitung soll nun gezeigt werden. Wendet man nämlich die Gleichung 1 §. 80, S. 232 an, so geht 7 über in.

$$8)\quad L_{(1-a)b} = L_b - \frac{A_{a+1}}{A_a} L_b + \frac{A_{a+1}}{A_a} L_{b,1} - \frac{A_{a+2}}{A_a} L_{b,1} + \frac{A_{a+2}}{A_a} L_{b,2} - \frac{A_{a+3}}{A_a} L_{b,2} \quad \vdots \quad \vdots$$

Löst man nun die Ausdrücke L_b, $L_{b,1}$, $L_{b,2}$.... nach 4 §. 86 und 1 §. 88 auf, so gewinnt man folgende Darstellungen:

$$\frac{A_{a+1}}{A_a} L_{b,1} = \frac{A_{a+1}\,A_{b+1}}{A_a\,A_b\,1{,}0p} + \frac{A_{a+1}}{A_a}\left(\frac{A_{b+2}}{A_b\,1{,}0p^2} + \frac{A_{b+3}}{A_b\,1{,}0p^3} + \frac{A_{b+4}}{A_b\,1{,}0p^4} \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{A_{a+1}\,A_{b+1}}{A_a\,A_b.1{,}0p} + \frac{A_{a+1}}{A_a} L_{b,1} \qquad (1\ §.\ 88).$$

$$\frac{A_{a+2}}{A_a} L_{b,1} = \frac{A_{a+2}\,A_{b+2}}{A_a A_b\,1{,}0p^2} + \frac{A_{a+2}}{A_a}\left(\frac{A_{b+3}}{A_b\,1{,}0p^3} + \frac{A_{b+4}}{A_b\,1{,}0p^4} + \frac{A_{b+5}}{A_b\,1{,}0p^5} \ldots\ldots\right)$$

$$= \frac{A_{a+2}\,A_{b+2}}{A_a\,A_b\,1{,}0p^2} + \frac{A_{a+2}}{A_a} L_{b,2} \qquad (1\ §.\ 88).$$

Ebenso erhält man auf die gleiche Weise:

$$\frac{A_{a+3}}{A_a} L_{b,2} = \frac{A_{a+3}\,A_{b+3}}{A_a A_b\,1{,}0p^3} + \frac{A_{a+3}}{A_a} L_{b,3};\quad \frac{A_{a+4}}{A_a} L_{b,3} = \frac{A_{a+4}\,A_{b+4}}{A_a A_b\,1{,}0p^2} + \frac{A_{a+4}}{A_a} L_{b,4} \ldots\ldots$$

u. s. w. Führt man nun die hiedurch erhaltenen Werthe in die zweiten Glieder der Darstellung 8 auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ein, so zerstören sich je zwei Glieder, welche mit den entgegengesetzten Zeichen versehen sind, und man gewinnt folgende Darstellung:

$$9)\quad L_{(1-a)b} = L_b - \frac{A_{a+1}\,A_{b+1}}{A_a A_b.\,1{,}0p} - \frac{A_{a+2}\,A_{b+2}}{A_a A_b.\,1{,}0p^2} - \frac{A_{b+3}\,A_{b+3}}{A_a\,A_b\,1{,}0p^3} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - \frac{A_{a+u-1}\,A_{b+u-1}}{A_a\,A_b\,1{,}0p^{u-1}} - \frac{A_{a+u}\,A_{b+u}}{A_a\,A_b\,1{,}0p^u}$$

$$= L_b - L_{ab.}$$

Diese Gleichung fällt mit 5 und 6 zusammen.

Dritte Methode. Wir nehmen an, daß sich eine Anzahl Personen (A_a) von dem Alter a mit der gleichen Anzahl Personen (A_b) von dem Alter b, also irgend eine Anzahl a- und $b$jähriger Paare, zur Gründung einer Gesellschaft oder einer Anstalt verbindet, welche dafür zu sorgen hat, daß einer Person von dem Alter b eine lebenslängliche Rente, deren Werth die Einheit ist, ausbezahlt wird, wenn diejenige von dem Alter a, welche mit ihr in die Anstalt getreten ist, stirbt. Hiebei wird vorausgesetzt, daß jede $a$jährige Person zu einer $b$jährigen in einer besondern Beziehung stehe, und daß sofort eine bestimmte $a$jährige Person mit einer bestimmten $b$jährigen in die Anstalt trete, sich nur für diese betheilige und für Herbeischaffung der Mittel zur Auszahlung der später fällig werdenden Leibrente sorge, und daß dagegen nach dem eingetretenen Tode der $a$jährigen die flüssig werdende Leibrente nur derjenigen $b$jährigen Person zufallen könne, wofür sie ursprünglich bestimmt ist. Damit die Anstalt in's Leben treten könne, muß das nöthige Kapital beigebracht werden. Jede von den $a$jährigen Personen verpflichtet sich zu Beibringung desselben in gleichen Theilen. Es fragt sich daher, wie groß ist die Summe, welche jede $a$jährige Person sogleich einzuzahlen hat, um der von ihr in die Anstalt einzukaufenden $b$jährigen Person die genannte Leibrente zu verschaffen?

Es ist klar, daß das Absterben der in eine solche Verbindung tretenden Personen $A_a + A_b$ nach dem Gesetze der Sterblichkeit vor sich gehen wird und daß einerseits Personen von dem Alter a, andererseits von dem Alter b sterben werden. Das Absterben der Personen von dem Alter b (der eingekauften), ebenso das Absterben eines bestimmten Paares (einkaufende und eingekaufte Person) hat keinen Einfluß auf den Calcul, sondern nur das Verhältniß zwischen der Zahl der überlebenden $b$jährigen Personen zu der Zahl derjenigen, welche jährlich sterben und dem Alter a angehören, und der hieraus sich ergebende Ueberschuß. Kennt man diesen Ueberschuß, so läßt sich hieraus das jährliche Bedürfniß der Casse der Anstalt berechnen, und hievon der gegenwärtige Werth angeben. Dieses Verhältniß läßt sich nur durch Beobachtung ermitteln. Die Ermittelung geschieht, wie leicht zu erkennen ist, auf die nämliche Weise wie die Sterblichkeitstafeln construirt werden, und es wird zu dem Ende nöthig, die hieher bezüglichen Beobachtungen zu machen. Wir nehmen nun an, daß das Gesetz, wornach sich die eintretenden A_a Paare durch den Tod auflösen, ermittelt sei, und bezeichnen die Zahl derjenigen, welche dem Alter b angehören und die von dem Alter a überleben, im Allgemeinen durch w, so wird sich, wie in §. 78 geschah, die Zahl derjenigen von ihnen, welche der Reihe nach im $(b+1)$ten, $(b+2)$ten . . . $(b+u)$ten Jahre zusammenleben, auf folgende Weise andeuten lassen:

10) $w_{b+1}, w_{b+2}, w_{b+3}, w_{b+4}, \ldots . w_{b+u}$

Die Casse hat nun so vielmal die Einheit in den verschiedenen Jahren auszugeben, als die vorstehenden Werthe andeuten. Soll daher der gegenwärtige Werth dieser Ausgaben ermittelt werden, so hat man die vorstehenden Glieder der Reihe nach im Verhältniß zu der erforderlichen Zeit zu rabattiren und die erhaltenen Resultate zusammenzuzählen. Nennt man nun den hiedurch entstehenden Werth R, so ist sofort:

$$11)\quad R = \frac{w_{b+1}}{1{,}0p} + \frac{w_{b+2}}{1{,}0\,p^2} + \frac{w_{b+3}}{1{,}0p^3} + \frac{w_{b+4}}{1{,}0p^4} + \ldots . \frac{w_{b+u}}{1{,}0p^u}$$

Dies ist der gegenwärtige Werth des Kapitals, welches genügt, um die im Laufe der Zeit an die Casse zu stellenden Ansprüche zu befriedigen. Da nun jede von den Personen (A_a), welche in die Anstalt treten, gleichviel hieran beizutragen hat, so ergiebt sich die Größe des Beitrags für die einzelne Person, wenn man die vorstehende Gleichung durch A_a theilt. Dieser Werth kommt dem gegenwärtigen Werthe der fraglichen Leibrente gleich. Hiernach ist:

$$12)\quad L_{(1-a)b} = \frac{1}{A_a}\left(\frac{w_{b+1}}{1{,}0p} + \frac{w_{b+2}}{1{,}0\,p^2} + \frac{w_{b+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{w_{b+u}}{1{,}0p^u}\right)$$

$$= \Sigma_1^u \; \frac{1}{A_a} \; \frac{w_{b+x}}{1{,}0\,p^x}.$$

Die Gleichungen 11 und 12 setzen die Kenntniß eines besondern Gesetzes voraus. Dem Inhalte nach werden sie mit den Gleichungen 2 und 7 übereinkommen, wenn die Erfahrungsgesetze, worauf jene Gleichungen beruhen, mit denen, worauf 11 und 12 beruht, die gleichen Momente als Grundlage haben. Die hier entwickelten Gleichungen dienen, wie man leicht erkennt, um den gegenwärtigen Werth für jede beliebige Leibrente (K) zu bestimmen. Es ist sofort nur nöthig, eines der gefundenen Resultate (2, 7, 12), welche für die Einheit gelten, mit K zu vervielfachen.

In den bisher angestellten Untersuchungen wurden keine Verwaltungskosten gerechnet. Bringt man auch diese in Rechnung, so hat man wie in 12 und 13 §. 87 zu verfahren. Es entstehen sofort, wenn D die Größe der jährlichen Verwaltungskosten bezeichnet, aus 6, 7 und 12:

$$13)\quad L_{(1-a)b} = L_b - L_{ab} + \frac{D}{A_a} \; \frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0\,p}$$

$$= \Sigma_0^u \; \frac{M_{a+x}}{A_a} \; L_{b,x} + \frac{D}{A_a} \; \frac{1-1{,}0p^{-n}}{0{,}0\,p}$$

$$= \Sigma_1^u \; \frac{1}{A_a} \; \frac{w_{b+x}}{1{,}0\,p^x} + \frac{D}{A_a} \; \frac{1-1{,}0\,p^{-n}}{0{,}0\,p}.$$

Die in 6, 7, 12 und 13 gefundenen Gleichungen geben die Summe

an, welche eine *a*jährige Person sogleich erlegen muß, um für eine *b*jährige Person eine lebenslängliche Leibrente zu kaufen, welche nach dem Tode der *a*jährigen Person beginnt. Wird nun aber verlangt, daß die sogleich zu zahlende Summe in einen jährlichen Beitrag verwandelt werde, den die *a*jährige Person so oft zahlt, als sie Jahre durchlebt, so kommen die in §. 90 zu den Gleichungen 8—10 gemachten Schlüsse in Betrachtung, und man hat sofort die Gleichung 10 auf die vorliegenden Fälle anzuwenden. Der jährliche Beitrag (B), welchen die $a$jährige Person sofort lebenslänglich zu leisten hat, ist aus 13 §. 90, wenn $L_{(1-a)b}$ an die Stelle von S tritt und die Beiträge sogleich beginnen:

$$14)\quad B = \frac{L_a - L_{ab}}{\Sigma_0^{\,u} \frac{1}{A_a} \frac{A_{a+x}}{1{,}0\,p^x}}$$

$$15)\quad B = \frac{\Sigma_0^{\,u} \frac{M_{a+x}}{A_a} L_{b,x}}{\Sigma_0^{\,u} \frac{A_{a+x}}{A_a\,1{,}0\,p^x}} = \frac{\Sigma_0^{\,u} M_{a+x} L_{b,x}}{\Sigma_0^{\,u} \frac{A_{a+x}}{1{,}0\,p^x}}$$

$$16)\quad B = \frac{\frac{w_{b+1}}{1{,}0\,p} + \frac{w_{b+2}}{1{,}0\,p^2} + \frac{w_{b+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{w_{b+z}}{1{,}0p^z}}{A_a + \frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u}}$$

$$= \frac{\Sigma_1^{\,z} w_{b+x} \cdot 1{,}0p^{-x}}{\Sigma_0^{\,u} A_{a+x} \cdot 1{,}0p^{-x}}.$$

In dieser Gleichung bezeichnet z die Zahl der Jahre, welche zwischen b und der höchsten Lebensgrenze einer $b$jährigen Person liegen.

Endlich ist noch zu bemerken, daß sich alle die in diesem §. entwickelten Gleichungen, welchen eine unabhängige Bildungsweise zu Grunde liegt, ohne alle Schwierigkeit in eine abhängige Form nach den in §. 87 gezeigten Methoden überführen lassen.

§. 92.

Eine Person von dem Alter a will für eine Person von dem Alter b eine Leibrente kaufen, welche mit dem Ende des Jahres beginnt, worin die $a$jährige Person stirbt, und aufhört, wenn die $b$jährige Person $(b+m)$ Jahre alt geworden ist. Stirbt die $a$jährige Person nicht, ehe die $b$jährige Person $(b+m)$ Jahre alt geworden ist, so wird die Leibrente nicht ausgezahlt. Wie groß ist der gegenwärtige Werth dieser Leibrente?

Die Beantwortung der vorliegenden Frage fällt im Wesentlichen mit der Beantwortung der im vorigen §. aufgestellten zusammen. Es handelte sich

im vorigen §. um die Werthbestimmung einer Leibrente, die nach dem Tode der $a$jährigen einkaufenden Person lebenslänglich an eine $b$jährige ausgezahlt werden soll. Hier soll nun unter den nämlichen Verhältnissen der Werth einer Leibrente ermittelt werden, welche nach dem Tode der $a$jährigen Person nur bis zu einem bestimmten Alter $(b+m)$ an eine $b$jährige Person auszuzahlen ist. Man hat daher in den Gleichungen des vorigen §. nur die m ersten Glieder in Rechnung zu ziehen. Bezeichnet man nun den Werth einer unter den angegebenen Bedingungen aufhörenden Leibrente nach §. 88 und 91 durch $L_{(1-a)\,b\,;\,1\,,\,m,}$ so erhält man sofort folgende Werthbestimmung für die fragliche Leibrente:

$$1)\quad L_{(1-a)\,b\,;\,1\,,\,m} = \left(1 - \frac{A_{a+1}}{A_a}\right)\frac{A_{b+1}}{A_b.1{,}0p} + \left(1 - \frac{A_{a+2}}{A_a}\right)\frac{A_{b+2}}{A_b.1{,}0p^2} + \ldots.$$

$$\ldots.\left(1 - \frac{A_{a+m-1}}{A_a}\right)\frac{A_{b+m-1}}{A_b.1{,}0p^{m-1}} + \left(1 - \frac{A_{a+m}}{A_a}\right)\frac{A_{b+m}}{A_b.1{,}0p^{m}}$$

$$= L_{b\,;\,1\,,\,m} - L_{ab\,;\,1,m.}$$

Aus 7 §. 91, S. 280 erhält man:

$$2)\quad L_{(1-a)\,b\,;\,1\,,\,m} = \frac{M_a}{A_a}\,L_{b\,;\,1\,,\,m} + \frac{M_{a+1}}{A_a}\,L_{b\,;\,2\,,\,m} + \frac{M_{a+2}}{A_a}\,L_{b\,;\,3\,,\,m} \ldots.$$

$$\ldots. \frac{M_{a+m-2}}{A_a}\,L_{b\,;\,m-2,m} + \frac{M_{a+m-1}}{A_a}\,L_{b\,;\,m-1,m}$$

$$= \Sigma_0^{\,m-1}\,\frac{M_{a+x}}{A_a}\,L_{b\,;\,x,m.}$$

Man kann auch die Formel 12 §. 91 benutzen. Es entsteht:

$$3)\quad L_{(1-a)\,b\,;\,1\,,\,m} = \frac{1}{A_a}\left(\frac{w_{b+1}}{1{,}0\,p} + \frac{w_{b+2}}{1{,}0p^2} + \frac{w_{b+3}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{w_{b+m}}{1{,}0p^{\,m}}\right)$$

$$= \frac{1}{A_a}\,\Sigma_1^{\,m}\,\frac{w_{b+x}}{1{,}0p^x}.$$

Soll für ein eben gebornes Kind männlichen oder weiblichen Geschlechts eine Leibrente gekauft werden, welche bis zu dem zurückgelegten $m$ten Jahr (20sten oder 25sten) dauert, so kommen die eben gewonnenen Gleichungen in Anwendung, und man hat $b = 0$ zu setzen. Man erhält sofort:

$$4)\quad L_{(1-a)0\,;\,1,m} = \left(1 - \frac{A_{a+1}}{A_a}\right)\frac{A_1}{A_0 1{,}0p} + \left(1 - \frac{A_{a+2}}{A_a}\right)\frac{A_2}{A_0 1{,}0p^2} + \ldots$$

$$\ldots.\left(1 - \frac{A_{a+m-1}}{A_a}\right)\frac{A_{m-1}}{A_0\,1{,}0p^{m-1}} + \left(1 - \frac{A_{a+m}}{A_a}\right)\frac{A_m}{A_0 1{,}0p^{\,m}}$$

$$5)\quad L_{(1-a)0\,;\,1,m} = \Sigma_0^{\,m-1}\,\frac{M_{a+x}}{A_a}\,L_{0\,;\,x,m}$$

$$6)\quad L_{(1-a)0\,;\,1,m} = \frac{1}{A_a}\left(\frac{w_1}{1{,}0p} + \frac{w_2}{1{,}0p^2} + \frac{w_3}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots \frac{w_m}{1{,}0\,p^m}\right).$$

Die Gleichungen 3 und 6 erhalten erst dann Bedeutung, wenn die Ueberlebungsgesetze für w bekannt sind. Soll die Rente nicht durch eine einmalige Einzahlung erkauft werden, wie hier in 1—6 vorausgesetzt ist, sondern durch jährliche Beiträge, die so lange eingezahlt werden, als die $a$jährige Person noch lebt, und die jedenfalls mit dem Eintritt des $m$ten Jahres aufhören, so erhält man nach Analogie der zu 14—16 §. 91 gemachten Schlüsse folgende Bestimmungen, wenn die Zahlungen sogleich beginnen:

$$7)\quad B = \frac{L_{b\,;\,1,m} - L_{ab\,;\,1,m}}{\frac{1}{A_a}\left(A_a + \frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots \frac{A_{a+m-1}}{1{,}0p^{m-1}}\right)}$$

$$8)\quad B = \frac{\Sigma_0^{m-1}\, M_{a+x}\;\; L_{b\,;\,x,m}}{\Sigma_0^{m-1}\, \frac{A_{a+x}}{1{,}0p^x}}$$

$$9)\quad B = \frac{\frac{w_{b+1}}{1{,}0p} + \frac{w_{b+2}}{1{,}0p^2} + \frac{w_{b+3}}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots \frac{w_{b+m}}{1{,}0p^m}}{A_a + \frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots \frac{A_{a+m-1}}{1{,}0p^{m-1}}}$$

Auch hier können die Verwaltungskosten in Frage kommen. Ihre Aufnahme in den Calcul unterliegt nach dem in §. 87 und §. 91 Gesagten keiner weitern Schwierigkeit. Eben so kann der in §. 87 berührte Umstand, daß die Einzahlungen nicht pünktlich auf die festgestellte Zeit erfolgen, leicht berücksichtigt werden. Man hat zu dem Ende die in diesem und dem vorigen §. entwickelten Formeln auf einen entsprechenden spätern Zeitpunkt zu rabattiren, um Ausfälle zu verhüten. Ferner kann leicht auf die Gründung eines Reservefonds Bedacht genommen werden.

§. 93.

Ein Kapital K soll gekauft werden, das am Ende desjenigen Jahres ausgezahlt wird, worin eine $a$jährige Person stirbt. Wie groß ist die Summe, womit das so fällige Kapital gegenwärtig gekauft werden kann?

Erste Methode. Da die $a$jährige Person in irgend einem Jahre sterben wird, so wird auch die genannte Summe in irgend einem Jahre ausgezahlt werden müssen. Es können nun folgende Fälle eintreten: entweder stirbt die $a$jährige Person im ersten, oder im zweiten, oder im dritten Jahre u. s. w., oder endlich im letzten Jahre der menschlichen Lebensgrenze. Jeder dieser Fälle muß in Rechnung gezogen werden. Die Wahrscheinlichkeiten für die genannten Fälle sind nach 4 §. 81:

$$\frac{M_a}{A_a}, \frac{M_{a+1}}{A_a}, \frac{M_{a+2}}{A_a}, \frac{M_{a+3}}{A_a}, \ldots \frac{M_{a+u-1}}{A_a}, \frac{M_{a+u}}{A_a}$$

In jedem dieser Fälle kann die Summe K fällig werden. Es sind daher die Erwartungswerthe für diese Fälle nach 2 §. 55 pag. 143 zu bestimmen, auf die Gegenwart zurückzubringen und zusammenzuzählen. Stirbt die $a$jährige Person im Laufe des ersten Jahres, so ist der gegenwärtige Werth der am Ende dieses Jahres auszuzahlenden Summe:

$$R_1 = \frac{K . M_a}{A_a . 1{,}0\,p}$$

Stirbt sie im Laufe des zweiten Jahres, so ist der gegenwärtige Werth der am Ende dieses Jahres auszuzahlenden Summe:

$$R_2 = \frac{K . M_{a+1}}{A_a . 1{,}0\,p^2}$$

Der Werth der am Ende des dritten Jahres etwa fällig werdenden Summe ist:

$$R_3 = \frac{K . M_{a+2}}{A_a\ 1{,}0\,p^3}$$

u. s. w. Führt man diese Schlüsse weiter und zählt die hiedurch entstehenden Werthe zusammen, so gewinnt man sofort zur Bestimmung des gegenwärtigen Werthes (R) des unter den genannten Bedingungen fällig werdenden Kapitals:

$$1)\quad R = \frac{K . M_a}{A_a . 1{,}0p} + \frac{K . M_{a+1}}{A_a . 1{,}0p^2} + \frac{K . M_{a+2}}{A_a . 1{,}0p^3} + \ldots \frac{K . M_{a+u}}{A_a . 1{,}0p^{u+1}}$$

$$= \frac{K}{A_a}\left(\frac{M_a}{1{,}0\,p} + \frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2} + \frac{M_{a+2}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{M_{a+u}}{1{,}0p^{u+1}}\right)$$

Soll das genannte Kapital nur dann gezahlt werden, wenn die $a$jährige Person im Laufe der n ersten Jahre stirbt, so ergiebt sich der fragliche Werth leicht, denn man hat nur n Glieder aus der in 1 angegebenen Reihe zu beachten. Es entsteht sofort:

$$2)\quad R = \frac{K}{A_a}\left(\frac{M_a}{1{,}0\,p} + \frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2} + \frac{M_{a+2}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{M_{a+n-1}}{1{,}0\,p^n}\right)$$

Soll das genannte Kapital nur dann gezahlt werden, wenn die $a$jährige Person die n ersten Jahre durchlebt und in den darauf folgenden r Jahren stirbt, so hat man aus dem nämlichen Grunde:

$$3)\quad R = \frac{K}{A_a 1{,}0p^n}\left(\frac{M_{a+n}}{1{,}0\,p} + \frac{M_{a+n+1}}{1{,}0p^2} + \frac{M_{a+n+2}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{M_{a+n+r-1}}{1{,}0\,p^r}\right)$$

Zweite Methode. Zu dem nämlichen Resultate wird man geführt, wenn man von dem Bedürfnisse ausgeht, das die Casse einer Anstalt zu decken hat, welche die Auszahlung der genannten Summe übernimmt. Treten nämlich eine Anzahl $a$jähriger Personen (A_a) zu dem genannten Zwecke

zusammen, von denen jede im Falle ihres Todes durch das Kapital (K) versichert zu werden wünscht, so sterben die genannten Personen nach dem Gesetze der Sterblichkeit auf folgende Weise:

$$M_a\,,\ M_{a+1}\,,\ M_{a+2}\,,\ M_{a+3}\ \ldots\ .$$

und die Casse hat für jeden Todesfall die Summe K auszuzahlen. Im Laufe der Zeit hat sie daher die Summen

$$M_a K,\ M_{a+1} K,\ M_{a+2} K,\ M_{a+3} K,\ \ldots\ .$$

zu zahlen. Der gegenwärtige Werth der diesem Bedürfnisse entsprechenden Summen ist:

$$4)\quad S = \frac{M_a K}{1{,}0p} + \frac{M_{a+1} K}{1{,}0p^2} + \frac{M_{a+2} K}{1{,}0p^3} + \ldots .$$

Die Summe, welche jeder einzelne zu tragen hat, ist:

$$5)\quad R = \frac{S}{A_a} = \frac{K}{A_a}\left(\frac{M_a}{1{,}0p} + \frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2} + \frac{M_{a+2}}{1{,}0p^3} + \ldots \frac{M_{a+u}}{1{,}0p^{u+1}}\right).$$

Bei Darstellung der Zahlenwerthe kann man sich folgender zurücklaufender Bildungsweise bedienen:

$$6)\quad R = \Big(\Big(\Big(\ldots\Big(\Big(\Big(\frac{M_{a+u}}{1{,}0p} + M_{a+u-1}\Big)\frac{1}{1{,}0p} + M_{a+u-2}\Big)\frac{1}{1{,}0p}\ \ldots .$$

$$\ldots . + M_{a+2}\Big)\frac{1}{1{,}0p} + M_{a+1}\Big)\frac{1}{1{,}0p} + M_a\Big)\frac{K}{1{,}0p.A_a}.$$

Die in 1 und 5 gegebene Darstellung läßt sich auch noch umformen Man kann nämlich die Zahl der in jedem Jahre Sterbenden auf die der Ueberlebenden zurückbringen, wenn man die Gleichung 1 §. 80, S. 232 anwendet. Dadurch erhält man:

$$R = \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_a - A_{a+1}}{1{,}0\,p} + \frac{A_{a+1} - A_{a+2}}{1{,}0\,p^2} + \frac{A_{a+2} - A_{a+3}}{1{,}0\,p^3} + \ldots .\right.$$

$$\left. \ldots . \frac{A_{a+u} - A_{a+u}}{1{,}0\,p^u} + \frac{A_{a+u} - A_{a+u+1}}{1{,}0\,p^{u+1}}\right).$$

Diese Darstellung trennt sich in zwei Reihen, wovon die eine lauter positive, die andere lauter negative Glieder hat. Führt man die Trennung aus und bemerkt, daß $A_{a+u+1} = 0$ ist, so hat man hieraus:

$$R = \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_a}{1{,}0p} + \frac{A_{a+1}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots . \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^{u+1}}\right)$$

$$- \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots . \frac{A_{a+u}}{1{,}0p}\right).$$

Die zweite Reihe fällt mit 4 §. 86 zusammen. Die erste läßt sich auf diese zurückbringen, wenn man das erste Glied aus der Klammer stößt und von allen übrigen Gliedern den Divisor $1{,}0p$ trennt. Dadurch entsteht:

$$7)\ R = \frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}0pA_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \ldots\ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u}\right)$$
$$- \frac{K}{A_a}\left(\frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \ldots\ldots \frac{A_{a+u}}{1{,}0p^u}\right)$$

Hieraus entsteht:

$$8)\ R = \frac{K}{1{,}0p} + \frac{K}{1{,}0p} L_a - K L_a = \frac{K}{1{,}0p} - \frac{0{,}0pK}{1{,}0p} L_a$$

Diese Gleichung zeigt, wie die Werthe solcher Kapitalien, welche durch den eintretenden Tod bestimmter Personen fällig werden, aus den Werthen lebenslänglicher Leibrenten abgeleitet werden können. L_a drückt hier den Werth einer auf die Einheit reducirten lebenslänglichen Leibrente aus. Die Richtigkeit der hier mitgetheilten Gleichungen zeigt sich leicht an besondern Fällen. Wir wählen zu dem Ende folgenden, der sich an den im §. 87 gegebenen anschließt. Ein 90jähriger Mann will auf seinen eintretenden Tod eine Summe von 100 Fl. versichern. Welche Summe muß er hiefür einzahlen, wenn die Tabelle von Finlaison benutzt wird. Aus 1 ist:

$$R = \frac{100}{11}\left(\frac{4}{1{,}04} + \frac{3}{1{,}04^2} + \frac{1}{1{,}04^3} + \frac{2}{1{,}04^4} + \frac{1}{1{,}04^5}\right)$$

Es ist:

4.0,9615385	= 3,8461540	= 10,0403545
3.0,9245562	2,7736686	
1.0,8889964	0,8889964	
2.0,8548042	1,7096084	
1.0,8219271	0,8219271	

also $R = \frac{100}{11}$. 10,0403545 = 91,2759 . . Fl.

Aus 8 und §. 87, S. 263 erhält man:

$$R = \frac{100}{1{,}04} - \frac{100.0{,}04}{1{,}04}.\ 1{,}2682534\ldots = 100(0{,}9615385 - 0{,}0487789)$$
$$= 91{,}27596\ \ldots\ \text{Fl.}$$

Sollen auch Verwaltungskosten mit erhoben werden, so hat man aus 1 und 8:

$$9)\ R = \frac{K}{A_a}\ \Sigma_0^u \frac{M_{a+x}}{1{,}0p^{x+1}} + \frac{D}{A} \cdot \frac{1 - 1{,}0p^{-u-1}}{0{,}0\,p}$$

$$10)\ R = \frac{K}{1{,}0p} - \frac{0{,}0\,p\,K}{1{,}0\,p} L_a + \frac{D}{A}\,\frac{1 - 1{,}0p^{-u-1}}{0{,}0\,p}$$

Auch hier kann verlangt werden, daß die gegenwärtig schuldige Summe durch jährliche gleiche Beiträge, deren Einzahlung sogleich beginnt, getilgt werde. Man erhält sofort bei Zahlungen auf die Lebensdauer:

$$11)\quad B = \frac{K\left(\frac{M_a}{1{,}0p} + \frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2} + \frac{M_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots\right)}{A_a + \frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+3}}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots}$$

$$12)\quad B = \frac{\frac{K}{1{,}0p} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p} K L_a}{1 + L_a}$$

Bei Zahlungen, die eine bestimmte Zeit dauern sollen, ist:

$$13)\quad B = \frac{K\left(\frac{M_a}{1{,}0p} + \frac{M_{a+1}}{1{,}0p^2} + \frac{M_{a+2}}{1{,}0p^3} + \ldots\ldots\right)}{A_a + \frac{A_{a+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}}{1{,}0p^2} + \ldots\ldots \frac{A_{a+n}}{1{,}0p^n}}$$

Eine *a*- und eine *b*jährige Person wollen zusammen ein Kapital K kaufen, welches derjenigen ausgezahlt wird, welche die andere überlebt. Wie groß ist der gegenwärtige Werth dieses Kapitals?

Entweder stirbt die *a*jährige Person vor der *b*jährigen oder umgekehrt, und die überlebende lebt noch am Ende des Jahres, oder beide sterben im Laufe des Jahres, aber die eine überlebt die andere. Alle die Fälle, welche in den beiden Annahmen liegen, müssen aufgezählt und in Rechnung gebracht werden. Wendet man sie auf das *n*te Jahr an, so ergiebt sich folgende Darstellung:

$$\frac{M_{a+n-1}\,A_{b+n}}{A_a\,.\,A_b} + \frac{M_{b+n-1}\,A_{a+n}}{A_a\,.\,A_b} + \frac{M_{b+n-1}\,M_{a+n-1}}{A_a\;A_b} = \frac{A_{a+n-1}\,A_{b+n-1} - A_{a+n}A_{b+n}}{A_a\;A_b}$$

wenn die nöthigen Entwickelungen nach 1 §. 80 gemacht werden. Wendet man nun die eben gewonnene Darstellung auf die verschiedenen Lebensjahre an und rabattirt, so ergiebt sich für den gegenwärtigen Werth des unter den genannten Bedingungen fälligen Kapitals, wenn die Doppelreihen, welche entstehen, von einander getrennt werden:

$$14)\quad R = \frac{K}{A_a\,A_b}\left(\frac{A_a\,A_b}{1{,}0\,p} + \frac{A_{a+1}\,A_{a+1}}{1{,}0p^2} + \frac{A_{a+2}\,A_{b+2}}{1{,}0p^3} + \ldots\right)$$

$$- \frac{K}{A_a\,A_b}\left(\frac{A_{a+1}\,A_{b+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}\,A_{b+2}}{1{,}0\,p^2} + \frac{A_{a+3}\,A_{b+3}}{1{,}0p^3} + \ldots\right)$$

oder wenn der Werth der auf die Einheit reducirten Leibrente (5 §. 86, S. 261) durch L_{ab} dargestellt wird:

$$15)\quad R = \frac{K}{1{,}0p}\,(1 + L_{ab}) - K L_{ab} = \frac{K}{1{,}0p} - \frac{0{,}0p}{1{,}0p}\,L_{ab.}$$

Man kann den Einkauf nur auf n Jahre beziehen. Dann hat man n bestimmte Glieder in den Reihen 14 hervorzuheben. Geschieht die Einzahlung nicht auf einmal (nach 14 oder 15), sondern durch gleiche jährliche

Beiträge, so können sie nur so lange gezahlt werden, als beide Personen zusammenleben. Aus 5 §. 86, S. 261 und 14 dieses §. ist sofort:

$$16)\quad B = R : \frac{1}{A_a\, A_b}\left(A_a\, A_b + \frac{A_{a+1}\, A_{b+1}}{1{,}0p} + \frac{A_{a+2}\, A_{b+2}}{1{,}0p^2} + \ldots.\right)$$

oder:

$$17)\quad B = \frac{K - 0{,}0\, p\, L_{ab}}{1 + L_{ab}}.$$

Die Einzahlungen können auch auf n Jahre beschränkt werden, und dann hat man n Glieder in der Reihe 16 in Rechnung zu bringen.

§. 94.

Die in diesem Kapitel aufgefundenen Gleichungen bilden die Grundlage zur Beantwortung aller hieher gehörigen Fragen. Es lassen sich noch viele und zusammengesetztere Probleme aufstellen und beantworten. Ihre Auflösung wird sich aber auf die hier angegebenen Grundzüge zurückführen lassen. Die §§. 86 — 90 handeln über Leibrenten. Die §§. 91 und 92 über Wittwen- und Waisen-Pensionen, §. 93 über Lebensversicherungen. Es wäre wohl nicht uninteressant, die Einrichtung der Anstalten für Leibrenten, Wittwen- und Waisenpensionen, Lebensversicherungen ꝛc. näher zu betrachten. Ein weiteres Eingehen auf diesen Gegenstand würde jedoch die Grenzen dieser Schrift überschreiten. Wir müssen uns deswegen darauf beschränken, einige Notizen hierüber beizubringen.

Es besteht eine Leibrenten-Anstalt in Lübeck mit einem Fond von 1275000 Mark Courant und eine in Wien. Die Gründung einer solchen zu Frankfurt wurde in der neuesten Zeit angekündigt. Es ist nicht zu verkennen, daß das Bestehen solcher Anstalten von mancherlei Wechselfällen bedroht sein kann. Ein großer Reservefond wird sie gegen diese sicher stellen. Gerade hierin liegt aber der Grund, daß sie nur selten ins Leben gerufen werden. Anstalten, denen dieser nicht zu Gebote steht, müssen eine Berechnung zu Grunde legen, welche sie gegen drohende Wechselfälle schützt. Dadurch werden höhere Einkaufssummen nöthig, welche von dem Beitritte abschrecken. Um diesen Mißständen zu entgehen, hat man in der neuesten Zeit sich zu Gründung der Rentenanstalten gewendet, die sich einer größern Theilnahme erfreuen. Solche Anstalten wurden errichtet: In Wien im Jahre 1824 (allgemeine Versorgungsanstalt des österreichischen Kaiserstaates); in Stuttgart 1833 (Stuttgarter allgemeine Rentenanstalt); in Karlsruhe 1835 (zuerst nur für Inländer, später auch für Ausländer); in Berlin 1838 (für Preußen und die deutschen Bundesstaaten); in Darmstadt 1844. Die Wiener Rentenanstalt ist im Allgemeinen als Typus für die später gegründeten anzusehen. Ihre Statuten wurden von den spätern theilweise beibehalten, theilweise abgeändert. Der Zweck der Rentenanstalten besteht darin,

diejenigen, welche sich bei ihr durch Einlage eines bestimmmten kleinen Kapitals betheiligen, allmälig in den Genuß einer lebenslänglichen und höhern Rente zu bringen, als dies auf gewöhnlichem Wege dem Einzelnen möglich wird. Zu dem Ende treten die Theilnehmer von Jahr zu Jahr, oder wenn in dieser Frist die nöthige Zahl von Einlagen nicht zusammen kommt, in einem größern Zeitraum zu einer sogenannten Jahresgesellschaft zusammen, legen ein Kapital (Rentenkapital) nieder, das für ihr Interesse verwaltet wird, und welches zu Auszahlung der Renten dient. Die Jahresgesellschaften werden nach dem Lebensalter in verschiedene Classen (sieben in der Wiener Anstalt, sechs in den übrigen) abgetheilt. Jeder Classe wird eine bestimmte Summe als Rentencapital zugewiesen, und hiernach bestimmt sich die Größe der Rente. Es fällt nämlich nicht auf die gleiche Einlage in den verschiedenen Altersclassen einer Jahresgesellschaft die gleiche Rente. Die älteren Classen erhalten eine größere als die jüngeren, um ein allmäliges Steigen der Renten herbeizuführen. Es ist ferner die Einrichtung getroffen, daß alle Ersparnisse (höherer Zins-Ertrag u. dergl.), welche die Anstalt aus dem Renten-Kapitale einer Jahresgesellschaft oder auf sonstige Weise gewinnt, nach einem bestimmten Verhältnisse unter die Altersclassen zu gleichem Zwecke vertheilt werden. Die Einlage, welche der einzelne Theilnehmer gemacht haben muß (Actie genannt), um in einen Rentengenuß zu gelangen, ist in den verschiedenen Gesellschaften verschieden. Die vollständige Einlage in der Wiener Anstalt beträgt 200 Fl. C. M., in der Stuttgarter 100 Fl. im 24 Gulden-Fuß, in der Carlsruher 200 Fl., in der Berliner 100 Thlr. Pr. Cour., in der Darmstädter 100 Fl. Eben so ist der höchste Renten-Betrag verschieden. In der Wiener Anstalt steigt er auf 500 Fl. C. M., in der Stuttgarter auf 300 Fl., in der Carlsruher auf 300 Fl., in der Berliner auf 150 Thlr., in der Darmstädter auf 150 Fl. Jeder Theilnehmer kann sich mit einer oder mehreren Actien betheiligen, deren Zahl jedoch in den verschiedenen Classen ein Maximum nicht überschreiten darf. Damit der Zutritt auch dem minder Bemittelten möglich wird, sind auch theilweise Einlagen im Betrage zu 10,20 .. Fl. möglich, die allmälig durch Nachzahlungen und Zinszuschriften zu einer vollen Actie ergänzt werden können und dann erst rentiren, wenn sie die erforderliche Höhe erreicht haben. Es ist ferner die Einrichtung getroffen, daß im Falle des Todes eines Theilnehmers alle gemachten Einzahlungen den Erben zurückerstattet werden, wenn noch keine Rente ausbezahlt wurde. Ist letzteres geschehen, so wird ihr Betrag an der Summe der gemachten Einzahlungen abgerechnet, und nur der hieraus sich ergebende Ueberschuß noch ausgezahlt. Ist die empfangene Rentensumme so groß oder größer, als die gemachten Einzahlungen, so wird nichts weiter verabfolgt. Der Theilnehmer ist dadurch gegen den Verlust seiner Einlage gesichert. Damit die Anstalt gegen mögliche Wechsel-

fälle (Ausfall von Kapitalien ꝛc.) geschützt und die Verpflichtungen zu leisten im Stande sei, wird ein Reservefonds gebildet, etwa aus dem erstjährigen Zinsenertrag aller Einlagen, aus den Verwaltungsüberschüssen, dem Nachlasse verstorbener Mitglieder ꝛc. Eben so müssen die Verwaltungskosten, die bei einer solchen Anstalt nicht unbedeutend sind, gedeckt werden. Dies geschieht gewöhnlich durch besondere Einlagen, aus überschüssigen Zinsen, aus dem Reservefonds ꝛc.

Es ist nicht zu leugnen, daß die genannten Anstalten einen sehr lobenswerthen Zweck verfolgen, der alle Unterstützung verdient. Man hat jedoch bald bemerkt, daß die erste Anlage dieser Anstalten im Laufe der Zeit auf manchen Mißstand führen würde, nämlich auf eine unzweckmäßige Vergrößerung des Reservefonds und auf ein ungeheures Anhäufen des der Rentenanstalt verbleibenden Vermögens. Ersterem kann man dadurch begegnen, daß man das Anwachsen des Reservefonds bis auf eine bestimmte Grenze im Verhältniß zum Kapitalvermögen der Anstalt beschränkt, letzterem dadurch, daß man das Rentenkapital einer jeden Jahresgesellschaft allmälig zu Gunsten der Theilnehmer, die es zusammengetragen haben, mit gehöriger Vorsicht auflöst. Diese Momente sind in die vor einigen Jahren veränderten Statuten der Karlsruher Versorgungsanstalt, gewiß zum Besten der Anstalt, aufgenommen worden. Ob sie auch schon von den übrigen Rentenanstalten berücksichtigt wurden, ist mir nicht bekannt. Bei der Wiener und Stuttgarter Anstalt ist auf folgenden Mißstand ins Besondere aufmerksam zu machen. Werden nämlich die Rentenkapitalien der Gesellschaften disponibel, wie dies bei den Vererbungen geschieht, so ziehen die Unternehmer hiervon 10 Procent. Dies führt nicht unbedeutende Kapitalien in die Hände der Unternehmer und sichert diesen einen ganz ungewöhnlichen Gewinn. Ferner dürfte in beiden Anstalten das Maximum der Rente zu hoch gestellt sein. Erst in ganz späten Jahren kann ein Theilnehmer in diese Rente gelangen. Die meisten werden diesen Genuß nicht erleben. Der Betheiligung der Mitglieder durch theilweise Einlagen ist Aufmerksamkeit zu schenken und nur unter bestimmten Bedingungen zu entsprechen, damit nicht eine rasche Ergänzung der theilweisen Einlagen der Anstalt Verlegenheit bereite. Die nähere Erörterung aller der hier berührten Punkte würde zu weit führen. Hierüber ist auf die ziemlich reiche Tages-Literatur, welche den Renten-Anstalten gewidmet ist, und auf die Statuten der Anstalten selbst zu verweisen. Es ist nur noch zu bemerken, daß vorerst der Calcul hier geringe Anwendung findet, weil das Steigen der Renten nicht an bestimmte Gesetze geknüpft ist, sondern nur von den durch die Anstalt zu gewinnenden Mitteln abhängt.

Hierher gehören auch die Tontinen. Ihre Einrichtung kommt im Wesentlichen mit der einer einzelnen Jahresgesellschaft bei den Rentenanstal-

ten überein, unterscheidet sich aber von ihr dadurch, daß jede Altersclasse für sich besteht, daß das Steigen der Renten nur von dem Aussterben der Mitglieder der einzelnen Jahresclassen abhängt und daß das von den Theilnehmern zusammengetragene Kapital vertheilt wird, wenn die zuletzt Lebenden bis auf eine bestimmte Anzahl ausgestorben sind. Eine solche Tontine wurde im Jahre 1831 in Rostock errichtet.

Eine Anstalt zur Erwerbung der Pensionen für Wittwen und Waisen besteht zu Wien. Die Waisen erhalten die Pension nach erfolgtem Tode des Versorgers bis zum zurückgelegten 24sten Lebensjahre, die Wittwen lebenslänglich. Will z. B. ein 30jähriger Ehemann seiner 21jährigen Frau eine lebenslängliche Pension von 100 Fl. kaufen, so hat er ein- für allemal 403 Fl. 29 Kr., oder einen jährlichen Beitrag von 29 Fl. 40 Kr., oder einen vierteljährlichen von 7 Fl. 26 Kr. zu zahlen. Derartige Pensionen sind hauptsächlich für Frauen der Staatsdiener wünschenswerth, da letzteren häufig die Gelegenheit fehlt, Vermögen zu erwerben, und sie nur auf einen bestimmten Gehalt angewiesen sind. Die Staaten selbst tragen in der Regel für Einrichtung solcher Pensions-Anstalten Sorge. Der Beitritt ist hiebei nicht der Willkühr überlassen, und der Angestellte hat den Beitrag zur Wittwencasse zu leisten, er mag verheirathet sein oder nicht. Dadurch wird es auch möglich, im Interesse der Beamten niedere Beiträge zu stellen. Dies ist im Großherzogthum Baden der Fall. Der jährliche Beitrag beläuft sich auf 1,5 Proc. der Besoldung, die Pension der Wittwe auf das 11fache des Beitrags, so daß die Pension der Wittwe 16,5 Proc. von der bezogenen Besoldung des Ehemannes beträgt. Hiezu kommt noch ein weiterer Gehalt, wenn minderjährige Kinder vorhanden sind, und ein Zuschuß aus der Staatscasse.

Lebensversicherungs-Anstalten giebt es in Gotha, in Wien, Lübeck, Leipzig, Frankfurt. In diesen Anstalten kann sich eine Person so einkaufen, daß nach ihrem Tode eine bestimmte Summe an ihre Erben, oder an eine von ihr bezeichnete Person ausgezahlt wird. Die Versicherungen erstrecken sich entweder auf die ganze Lebensdauer oder nur auf bestimmte Zeit (ein oder mehrere Jahre). Nicht jede beliebige Summe kann bei diesen Anstalten versichert werden. Die Gothaer Bank setzte im Jahre 1842 das Maximum auf 10000 Thlr., das Minimum auf 300; die Lübecker setzt das Maximum auf 30000 Mark Cour., das Minimum auf 300; die Wiener das Maximum auf 20000 Fl., das Minimum auf 10 Fl. Die Eintrittszeit ist beschränkt. Die Gothaer und Leipziger Bank gestatten nur den Eintritt vom 15ten bis zum 60sten, die Lübecker vom 10ten bis zum 67sten, die Wiener vom 15ten bis zum 70sten. Die Mitglieder der Gothaer Bank sind vom 90sten Jahre an, der Leipziger vom 85sten an beitragsfrei. Nicht alle Personen werden aufgenommen. Vor allem ist Bedingung:

»unbescholtener Ruf und gute Gesundheit«. Ueber letztere muß insbesondere ein nach bestimmten Normen entworfenes ärztliches Zeugniß von dem Aufzunehmenden vorgelegt werden. Die Aufnahme ist in der Regel allen versagt, »deren Beruf oder Lebensweise für Leben und Gesundheit besondere Gefahr droht.« Den Statuten dieser Anstalten ist gewöhnlich eine Tabelle angehängt, worin die Größe des einmal oder jährlich zu zahlenden Beitrags für den angegeben ist, welcher in einem bestimmten Alter auf Lebenszeit oder auf ein oder mehrere Jahre in die Anstalt treten will. Die Beiträge sind unter den gleichen Bedingungen nicht bei allen diesen Anstalten gleich. So hat jemand, der 15 Jahre alt ist und sich auf ein Kapital von 100 Thlr. versichern will, in der Lübecker Bank jährlich, für die ganze Lebensdauer, zu zahlen 1 Thlr. 27 Sgr. 3 Pf., in der Gothaer 1 Thlr. 25 Sgr. 6 Pf., in der Leipziger 1 Thlr. 20 Sgr. 5 Pf. Für 100 Fl. Kapital hat er in der Wiener Bank 1 Fl. 32 Kr., also etwas mehr als 1,5 Proc. zu zahlen. Jemand, der 60 Jahre alt ist, hat der Reihe nach in den genannten Banken jährlich zu zahlen: 6 Thlr. 10 Sgr. 9 Pf., 7 Thlr. 4 Sgr. 10 Pf., 7 Thlr. 3 Sgr. 10 Pf., 6 Fl. 52 Kr. Um die Anstalt gegen Wechselfälle zu schützen, wird ein Reservefonds gegründet. Eben so werden die Verwaltungskosten aus den Beiträgen genommen und von einigen Anstalten darüber Rechnung abgelegt. Bilden sich außerdem Ueberschüsse, so werden sie nach Verfluß von einer bestimmten Zeit an die Mitglieder als Dividende zurückgegeben (Gothaer Bank). Ueber die Sterblichkeitsverhältnisse, wornach die genannten Tabellen berechnet sind, findet sich keine Auskunft, obgleich dies wünschenswerth wäre. Es scheint nämlich, daß den meisten der genannten Anstalten Sterblichkeitsverhältnisse zu Grunde gelegt wurden, welche der Casse günstig sind, also eine kürzere Lebensdauer voraussetzen, als in der Wirklichkeit stattfindet, was bei der bestehenden Einrichtung mancher Anstalten durchaus nicht nöthig ist. Dies zeigen nämlich die nicht unbedeutenden Ueberschüsse, welche sich in der Casse anhäufen und als Dividende den Mitgliedern zurückgegeben werden. In keiner Tabelle findet man endlich die Verschiedenheit in der Sterblichkeit der beiden Geschlechter berücksichtigt. Die Gothaer Bank ist auf Oeffentlichkeit und Gegenseitigkeit gegründet, erfreut sich, wie es scheint, einer großen Theilnahme und eines guten Fortganges. Für ein weiteres Eingehen in die Einrichtung dieser Institute ist hier nicht der Ort. Wer diese kennen zu lernen wünscht, wird am besten die gewünschte Belehrung den Statuten und Rechenschaftsberichten dieser Anstalten entnehmen.

Endlich giebt es noch Anstalten, welche gegen eine einmalige Einlage oder jährliche Beiträge eine bestimmte Summe an eine bestimmte Person (Aussteuer ꝛc.) auszahlen, wenn dieselbe nach Verfluß einer zum Voraus bedungenen Zeit noch am Leben sein wird. Diese existiren zu Wien und zu Lübeck.

In Paris existirt eine derartige Gesellschaft (Compagnie royale d'assurances sur la vie) mit einem Bürgschaftskapital von 15000000 Fr. Sie läßt Leute in eine Gesellschaft zusammentreten und irgend ein Kapital zusammentragen. Das zusammengetragene Kapital wird verwaltet, und nach Verfluß einer bestimmten Anzahl von Jahren wird die Summe, wozu sich dasselbe unterdessen sammt Zinsen und Zinses-Zinsen erhoben hat, unter diejenigen, im Verhältniß zur Einlage, vertheilt, welche von der ursprünglichen Gesellschaft noch am Leben sind, denn die Ueberlebenden beerben die Verstorbenen. Der Eintritt ist jedem ohne Rücksicht auf Alter und Geschlecht erlaubt. Die Einlagen können ein- für allemal oder jährlich gemacht werden. Es steht jedem frei, sich selbst oder eine andere Person einzukaufen. Die Verwaltungskosten werden von den Theilnehmern durch Erlegung eines Eintrittsgeldes getragen. Die Anwendung des Calculs ist auch hier nicht erforderlich, da die Anstalt nicht zu Auszahlung einer bestimmten Summe, sondern nur dazu verpflichtet ist, das verwaltete Kapital nebst den erworbenen Zinsen an die Ueberlebenden zu vertheilen.

Endlich giebt es auch Anstalten, die Darlehen auf Annuitäten (jährlich zu zahlende gleich große Summen) geben. Eine solche ist zu Karlsruhe mit der Versorgungsanstalt verbunden, eine andere besteht in Stuttgart für sich unter dem Namen »der Würtembergische Kreditverein«. Die Karlsruher Anstalt gestattet die Tilgung des aufgenommenen Kapitals innerhalb 35 bis 4 Jahren. Die niederste Annuität ist 6 Proc. bei einer Tilgungszeit von 35 Jahren, die höchste 28 Fl. 28,1 Kr. bei einer Tilgungszeit von 4 Jahren. Das Anlehen darf nicht geringer als 500 Fl. sein. Der Würtembergische Kreditverein ist »eine Verbindung von Grundeigenthümern zu Kapitalaufnahmen auf gemeinschaftliche Rechnung, mit der Bestimmung: die aufgenommenen Kapitalien zu Anleihen an seine Mitglieder zu verwenden und mittelst der von diesen zu bezahlenden Renten zu tilgen«. Unter 2000 Fl. wird kein Anlehen verwilligt. Die Dauer der Tilgungszeit ist auf 50 Jahre festgesetzt. Die Tilgung kann jedoch auch nach dem Wunsche des Schuldners in kürzerer Zeit, bis auf 10 Jahre abwärts, erfolgen. Zur Deckung etwaiger Verluste wird ein Reservefonds gegründet, der an die Mitglieder wieder zurückgegeben wird, wenn es die Verhältnisse zulassen. Zu Gründung dieses Fonds werden bei Rentendarlehen 4 Fl. von 100 Fl. abgezogen, also 96 statt 100 Fl. ausgezahlt, oder statt 100 Fl. baar $104\frac{1}{6}$ Fl. als Schuld angeschrieben. Die Renten sind auf 3,5 Proc. basirt, und der Verein nimmt daher nur 3,5 Proc. von seinen Schuldnern, und außerdem noch die jährlich zu zahlende Tilgungssumme. Zu Bestreitung der Verwaltungskosten werden 26 Kr. für jedes 100 Anlehenskapital (oder von 96 Fl. baar) dem Schuldner jährlich angerechnet. Ein Kapital von 100 Fl. wird in 50 Jahren durch einen jährlichen Beitrag von 4 Fl. 53,8 Kr. ohne

die Verwaltungskosten getilgt; in 35 Jahren durch jährliche 5 Fl. 39,6 Kr. ohne die Verwaltungskosten u. s. w. Die Rentenzahlungen müssen von dem Schuldner halbjährlich gemacht werden. In §. 32 u. ff. S. 77 sind die Gesetze angegeben, wornach die Anstalten zu beurtheilen sind, welche auf Annuitäten Kapitalien ausleihen. Die Statuten dieser Anstalten geben über ihre Einrichtung nähere Auskunft.

Anweisung

zum Gebrauch der Tafeln I—IV.

Die Tafeln I — IV finden hauptsächlich ihre Anwendung bei der Berechnung der zu dem 2ten, 3ten, 4ten, 6ten und 8ten Kapitel gehörigen Probleme und gewähren hiebei bedeutende Erleichterung, wie sich aus Folgendem zeigen wird.

1) Bestimmung des Werthes, zu welchem ein Kapital (K) in einer bestimmten Zahl von Jahren (n) mit Zinses-Zinsen anwachsen wird.

1ste Aufgabe. Zu welcher Summe wird ein Kapital von 2045 Fl. in 15 Jahren bei 4 Proc. mit Zinses-Zinsen erwachsen? Auflösung. Aus 1 §. 17 ist $S = 2045 . 1{,}04^{15}$. Man suche in der ersten Reihe der Tafel I die Zahl der Jahre 15, und in der Reihe, welche den angegebenen Zinsfuß (4) als Ueberschrift führt, das Feld, worin sich die beiden Reihen (Horizontal- und Vertikalreihe) vereinigen, vervielfache die eingeschriebene Zahl mit dem gegebenen Kapitale, so giebt das entstehende Product den gesuchten Werth. Es ist also:

$$S = 2045 . 1{,}8009435 = 3682{,}9295 \ldots \text{ Fl.}$$

2te Aufgabe. Zu welcher Summe ist das nämliche Kapital bei halbjährlicher Verzinsung und bei dem relativen Zinsfuße erwachsen? Auflösung. Aus 4 §. 18, S. 28 ist:

$$S = 2045 \left(1 + \frac{4}{200}\right)^{2 \cdot 15} = 2045 . 1{,}02^{30}.$$

Man verfahre wie vorhin und suche die der 30sten Horizontalreihe und derjenigen Verticalreihe zugehörende Zahl, welche den Zinsfuß 2 als Ueber-

schrift führt, und vervielfache sie mit dem gegebenen Kapital, so erhält man den gesuchten Werth. Es ist sofort:

$$S = 2045 . 1{,}8113616 = 3704{,}23447 .. \text{Fl.}$$

2) Bestimmung des gegenwärtigen Werthes künftig fälliger Summen, wenn bei der Rabattirung Zinses-Zins gerechnet werden soll.

1ste Aufgabe. Die Summe 2045 Fl. ist nach 12 Jahren unverzinslich fällig. Wie groß ist ihr gegenwärtiger Werth, wenn ein Rabatt von 4 Proc. mit Zinses-Zins gestattet wird? Auflösung. Aus 1 §. 26, S. 47 ist $R = 2045 . 1{,}04^{-12}$. Man verfahre wie in 1, suche in der Tafel III den Werth, welcher der 12ten Horizontalreihe und derjenigen Vertikalreihe eingeschrieben ist, welche die Ueberschrift $p = 4$ führt, und vervielfache sie mit 2045, so ergiebt sich der gesuchte Werth. Es ist:

$$R = 2045 . 0{,}6245970 = 1277{,}3008 .. \text{Fl.}$$

2te Aufgabe. Wie groß ist der gegenwärtige Werth der nämlichen Summe bei halbjährlichem Rabatt und bei dem relativen Zinsfuß? Auflösung. Aus 8 §. 26, S. 48 ist, da $p_1 = \frac{1}{2} . 4 = 2$ ist,

$$R = 2045 . 1{,}02^{-2 \cdot 12} = 2045 . 1{,}02^{-24}.$$

Man suche in der 24sten Horizontalreihe die zugehörige Zahl und vervielfache sie mit 2045, so ergiebt sich der gesuchte Werth. Es ist:

$$R = 2045 . 0{,}6217215 = 1271{,}5227 \ldots \text{Fl.}$$

3) Bestimmung der Summe, wozu ein mehrere Mal (n) angelegtes Kapital (K) mit Zinses-Zins bei irgend einem Zinsfuß (p) anwächs't.

1ste Aufgabe. 3250 Fl. werden 10 Mal jährlich bei $3\frac{1}{2}$ Proc. angelegt. Wie groß ist ihr Werth sammt Zinses-Zins zur Zeit der letzten Anlage? Auflösung. Aus 3 §. 22, S. 37 ist:

$$S = 3250 . \frac{1{,}035^{10} - 1}{0{,}035}$$

Man benutze die Tafel III, suche die Zahl der Jahre in der ersten Reihe, ferner den Zinsfuß und gehe von ihnen zu dem Felde über, worin sich beide Reihen vereinigen. Durch Vervielfachen der gefundenen Zahl mit der gegebenen Summe entsteht der gesuchte Werth und ist:

$$S = 3250 . 11{,}7313933 = 38127{,}02822 .. \text{Fl.}$$

2te Aufgabe. Wie groß ist der Werth des nämlichen Kapitals, wenn Anlage und Verzinsung halbjährlich geschieht? Auflösung. Aus 12 §. 22, S. 38 erhält man, da $p_1 = \frac{1}{2} . 3, 5 = 1{,}75$ ist,

$$S = 3250 \frac{1{,}0175^{10} - 1}{0{,}0175}$$

Sucht man in der 10ten Horizontalreihe die erforderliche Zahl, so ist:

$$S = 3250 . 10{,}8253995 = 35182{,}45037 \ldots \text{Fl.}$$

Bei 4procentiger Verzinsung würde man nach der 1sten Aufgabe 39019,8480.. Fl., nach der 2ten 35586,5932.. Fl. erhalten.

4) Ermittelung der gegenwärtigen Werthe von Summen, die künftig durch eine Reihe von Jahren gezahlt werden, oder Tilgung der Anlehen durch eine Reihe von Theilzahlungen.

Aufgabe. 3250 Fl. werden vom Ende des laufenden Jahres an 10 Mal jährlich gezahlt. Wie groß ist ihr gegenwärtiger Werth bei 4 Proc.? Auflösung. Benutzt man die Gleichung 1 §. 27, S. 50 und die Tafel IV auf die angegebene Weise, so ist:

$$R = 3250 . \frac{1 - 1{,}04^{-10}}{0{,}04} = 3250 . 8{,}1108958 = 26269{,}43635 \ldots \text{Fl.}$$

u. s. w. Alle Probleme, worin die Werthe $1{,}0p^n$, $1{,}0p^{-n}$, $\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}$, $\frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}$ vorkommen und die eine sehr ausgedehnte Anwendung haben, wie die vorliegende Schrift zeigt, lassen sich mit Hülfe der Tafeln I — IV auf eine sehr bequeme Art und ohne den Gebrauch von Logarithmen lösen, die bei Erhebung in Potenzen viel Arbeit verlangen und dabei weniger sichere und genaue Resultate liefern, als auf dem angezeigten Wege gewonnen werden. Uebrigens ist der Gebrauch der Logarithmen nicht ausgeschlossen, namentlich werden sie dann immer gute Dienste leisten, wenn Zahlen von mehreren Stellen mit einander vervielfacht werden sollen. Einen nicht geringen Dienst leisten aber diese Tafeln bei Auflösung der Probleme, welche sich auf die Ermittelung des Zinsfußes beziehen, wie sich aus der Mittheilung folgender ganz einfachen und, wie ich glaube, neuen Methode zeigen wird. Wir stellen, um diese Methode zu entwickeln, diejenigen Probleme zusammen, um deren Auflösung es sich handelt.

5) Ein Kapital K war n Jahre ausgeliehen und erwuchs mit Zinses-Zins zur Summe S. Zu welchem Zinsfuß war es ausgeliehen? §. 19, S. 30.

6) Für eine nach n Jahren fällige Summe K wird die Summe R sogleich baar gezahlt. Wie groß ist der Zinsfuß, nach welchem bei Zinses-Zinsen rabattirt wurde?

7) Ein Kapital K wurde bei Zinses-Zinsen n Mal angelegt und erwuchs zur Summe S. Zu welchem Zinsfuß wurde es ausgeliehen? §. 25, S. 46.

8) Eine Schuld R wurde durch die jährliche Rente K in n Jahren getilgt. Welcher Zinsfuß wurde der Tilgung zu Grunde gelegt? §. 35, S. 84.

Die Aufgaben 5, 7 und 8 wurden in den angezeigten §§. schon behandelt. Die Aufgabe 5 läßt sich, wie gezeigt wurde, genau lösen; eben so die

Aufgabe 6, denn sie läßt sich auf 5 zurückbringen. Die Aufgaben 7 und 8 lassen sich aber, da sie auf Gleichungen von höheren Graden führen, nach den hierauf bezüglichen Gesetzen nur auf sehr mühevolle oder annäherungsweise durch Tentiren lösen. Eine andere annähernde Auflösungsmethode wurde in den angeführten §§. gegeben. Für alle diese Probleme läßt sich nun eine sehr einfache und dabei sehr bequeme Auflösungsmethode geben, die in den meisten Fällen ein ganz genaues Resultat geben (weil der Zinsfuß im gewöhnlichen Leben auf bestimmte Werthe beschränkt ist) oder die Grenzen bezeichnen wird, zwischen welche der gesuchte Zinsfuß fällt, worauf denn der wahre Zinsfuß beliebig genau ermittelt werden kann. Hiezu dient die Zurückführung der Gleichungen 1 §. 17, S. 26; 1 §. 26, S. 47; 3 §. 22, S. 37; 1 §. 27, S. 50 auf folgende Formen:

$$9)\ \frac{S}{K} = 1{,}0p^n\ ; \qquad 10)\ \frac{R}{K} = 1{,}0p^{-n} = \frac{1}{1{,}0p^n}$$

$$11)\ \frac{S}{K} = \frac{1{,}0p - 1}{0{,}0p};\ 12)\ \frac{R}{K} = \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{0{,}0p}$$

Aus diesen Darstellungen und aus den Tafeln I—IV, welche die Werthe für die auf der rechten Seite angeschriebenen Werthe $1{,}0p^n$, $1{,}0p^{-n}$, ... enthalten, ergiebt sich nun folgende Methode.

Man ermittele in dem einzelnen vorliegenden Falle den Werth der Quotienten $\frac{S}{K'}\ \frac{R}{K}$, ... nach den Gleichungen 9 — 12 und in ihrer Beziehung zu 5—8 und suche dann in der Horizontalreihe, welche die Zahl der Jahre (n) angiebt, den hiedurch entstandenen Werth. Ist dieser gefunden, so zeigt der in der Vertikalreihe angeschriebene Zinsfuß den gesuchten Werth von p, und die Aufgabe ist gelöst. Steht der erhaltene Quotient nicht genau in den Tafeln, so wird sich ermitteln lassen, zwischen welche zwei Nachbarwerthe er fällt. Zwischen die Werthe der den beiden Nachbarreihen aufgeschriebenen Werthe von p wird auch der wahre Werth des gesuchten Zinsfußes fallen, und man kann dann durch Tentiren oder sonstige Mittel den Werth so genau als möglich bestimmen. Die hier mitgetheilte Methode führt auf um so genauere Resultate, je vollständiger die Tafeln sind, welche man für die Werthe von p besitzt. Der Besitz von Tafeln, welche die Werthe von p wenigstens auf Zehntheile angeben, ist daher sehr wünschenswerth. Die Anwendung der angegebenen Methode soll an folgenden Fällen verdeutlicht werden.

1ste Aufgabe. Das Kapital von 4270 Fl. ist in 15 Jahren zur Summe von 5746,857641 Fl. erwachsen. Zu welchem Zinsfuß war das Kapital ausgeliehen? Auflösung. Es ist aus 9:

$$x = \frac{5746{,}857641}{4270} = 1{,}3458683.$$

Sucht man nun in der 15ten Horizontalreihe der ersten Tafel den vorstehenden Werth, so findet man ihn in der Vertikalreihe, welche die Ueberschrift $p = 2$ führt. Hiernach ist 2 der gesuchte Werth. Das nämliche Resultat findet sich auch aus §. 19, S. 30.

2te Aufgabe. Eine nach 12 Jahren fällige Forderung von 1760 Fl. wurde sogleich baar durch die Summe von 1037,808464.. Fl. befriedigt. Zu welchem Zinsfuße wurde bei Zinses-Zinsen rabattirt? Auflösung. Nach 10 ist:

$$x = \frac{1037{,}808464}{1760} = 0{,}5896639.$$

Sucht man nun in der 12ten Horizontalreihe der zweiten Tafel den vorstehenden Werth, so findet man ihn in der Vertikalreihe, welche $p = 4{,}5$ als Aufschrift trägt. Hiernach ist $4\frac{1}{2}$ der gesuchte Zinsfuß.

3te Aufgabe. Ein Kapital von 3170 Fl. wurde bei Zinses-Zinsen 15 Mal angelegt und belief sich im Zeitpunkt der letzten Anlage auf 63474,772692.. Fl. Zu welchem Zinsfuß war es ausgeliehen? Auflösung. Nach 11 ist:

$$x = \frac{63474{,}772692}{3170} = 20{,}0235876.$$

Sucht man nun in der 15ten Horizontalreihe der dritten Tafel den vorstehenden Werth, so findet man ihn in der Vertikalreihe, welche die Aufschrift $p = 4$ trägt. Hiernach ist 4 der gesuchte Zinsfuß.

4te Aufgabe. Die Summe von 3450 Fl. soll 15 Mal jährlich, vom Ende des laufenden Jahres an gerechnet, gezahlt werden, um eine Schuld von 39735,0676050 Fl. zu tilgen. Wie groß ist der Zinsfuß, welcher der Tilgung zu Grunde liegt? Auflösung. Aus 12 ist:

$$x = \frac{39735{,}0676050}{3450} = 11{,}5174109.$$

Sucht man diese Zahl in der vierten Tafel in der 15ten Horizontalreihe, so findet man ihn in derjenigen Vertikalreihe, welche die Aufschrift $p = 3{,}5$ führt. Der Zinsfuß ist daher $3\frac{1}{2}$.

Die hier aufgelöst'en Probleme führen auf die gewöhnlich bei dem Zinsfuß vorkommenden Werthe. Werden nun die Beispiele willkürlich gestellt, so werden die bei der Auflösung sich ergebenden Werthe auf andere Zahlen führen, die annäherungsweise leicht geschätzt werden können, was in vielen Fällen oft genügen wird. Wäre eine 10 Mal angelegte Summe von 2730 Fl. zur Summe 32000 Fl. erwachsen, so entstände aus 11:

$$x = \frac{32000}{2730} = 11{,}7216117\ldots$$

Sucht man nun in der 10ten Horizontalreihe der Tafel III den zunächst liegenden Werth, so findet man für $p = 3{,}5$ folgenden: 11,7313933, und es ergiebt sich, daß der gesuchte Zinsfuß um ein ganz Unbedeutendes kleiner ist, als 3,5. Dies bestätigt sich dadurch, daß, wenn 32030 Fl. statt 32000 Fl. geschrieben wird, der Werth

$$x = \frac{32030}{2730} = 11{,}7326007 \ldots$$

gefunden wird, wodurch der Zinsfuß um ein Unbedeutendes größer als 3,5 würde.

Daß die hier mitgetheilte Methode auch für den relativen Zinsfuß gilt, ist leicht ersichtlich. Nicht minder wichtige Dienste wird dieselbe leisten, wenn der Zinsfuß in solchen Fällen ermittelt werden soll, worin die Zahl der Jahre aus Ganzen und Bruchtheilen besteht und die in §. 19, 25 und 35 angegebenen Methoden noch schwieriger anzuwenden sind. In diesen Fällen verfahre man so: Man suche nach 9 — 12 die nöthigen Quotienten, so werden diese zwischen zwei Nachbarwerthe in der Horizontalreihe, welche der Zahl der ganzen Jahre zugehört und zwischen zwei Nachbarwerthe in der Vertikalreihe fallen, welche den entsprechenden Zinsfuß angiebt. Man nehme nun den in der Tafel gefundenen niedrigsten Werth, ziehe ihn von dem erhaltenen Quotienten ab, so wird hiedurch ein Rest entstehen. Man betrachte nun den niedrigsten Tafelwerth als Kapital und berechne für den gegebenen aliquoten Theil des Jahres (nach dem relativen oder conformen Zinsfuß) den zugehörigen Zins und vergleiche das erhaltene Resultat mit dem gefundenen Reste. Stimmen beide, so ist die Aufgabe gelöst und der in der Vertikalreihe angeschriebene Zinsfuß der gesuchte. Stimmen sie nicht überein, so muß der Zinsfuß so lange vergrößert oder verkleinert werden, bis die erhaltenen Werthe möglichst genau übereinstimmen. Das Gesagte soll an einem besondern Falle verdeutlicht werden.

Aufgabe. Das Kapital von 2550 Fl. ist in $20\frac{1}{2}$ Jahren zu der Summe von 5699,1111831 bei dem relativen Zinsfuß und Zinses-Zinsen ausgeliehen. Wie groß ist der Zinsfuß, zu welchem es ausgeliehen wurde?

Auflösung. Es ist:

$$x = \frac{5699{,}1111831}{2550} = 2{,}2349455.$$

Die nächste niedere Zahl in der 20sten Horizontalreihe und in der Vertikalreihe, welche den Zinsfuß $p = 4$ als Aufschrift führt, ist 2,1911231. Hieraus und aus dem gefundenen Quotienten erhält man:

$$R = 2{,}2349455 - 2{,}1911231 = 0{,}0438224.$$

Die halbjährlichen Zinsen von 2,1911231 sind bei 4 Proc. nach 2 §. 2:

$$z = \frac{4}{2.100}.2{,}1911231 = 0{,}0438224....$$

Die so gefundenen Werthe stimmen überein. Der gesuchte Zinsfuß ist also 4.

Die Anwendung der so eben angezeigten Methode auf andere und zusammengesetztere Fälle (11 und 12) unterliegt keiner weiteren Schwierigkeit. Aus dem Gesagten wird sich die Brauchbarkeit der beigegebenen Tafeln rechtfertigen.

Anmerkung. Der Punkt, welcher in den beigegebenen Tafeln rechts an der siebenten Decimalstelle steht, zeigt an, daß die nachfolgende (achte) Ziffer 5 oder größer als 5 ist.

Tafel I.

Werthe für $1{,}0p^n$.

Summe, wozu das Kapital 1 nach Verfluß von n Jahren bei Zinses-Zinsen angewachsen ist.

Ende d. Jahres (n).	$1{,}01^n$ $p = 1$	$1{,}0125^n$ $p = 1\frac{1}{4}$	$1{,}015^n$ $p = 1\frac{1}{2}$	$1{,}0175^n$ $p = 1\frac{3}{4}$	$1{,}02^n$ $p = 2$	$1{,}0225^n$ $p = 2\frac{1}{4}$	$1{,}025^n$ $p = 2\frac{1}{2}$	$1{,}0275^n$ $p = 2\frac{3}{4}$	$1{,}03^n$ $p = 3$	$1{,}035^n$ $p = 3\frac{1}{2}$	$1{,}04^n$ $p = 4.$	$1{,}045^n$ $p = 4\frac{1}{2}$	$1{,}05^n$ $p = 5$	$1{,}055^n$ $p = 5$	$1{,}06^n$ $p = 6$
1	1,0100000	1,0125000	1,0150000	1,0175000	1,0200000	1,0225000	1,0250000	1,0275000	1,0300000	1,0350000	1,0400000	1,0450000	1,0500000	1,0550000	1,0600000
2	1,0201000	1,0251562·	1,0302250	1,0353062·	1,0404000	1,0455062·	1,0506250	1,0557562·	1,0609000	1,0712250	1,0816000	1,0920250	1,1025000	1,1130250	1,1236000
3	1,0303010	1,0379707	1,0456783·	1,0534241	1,0612080	1,0690301	1,0768906	1,0847895·	1,0927270	1,1087178·	1,1248640	1,1411661	1,1576250	1,1742413·	1,1910160
4	1,0406040	1,0509453	1,0613635·	1,0718590	1,0824321·	1,0930833	1,1038128·	1,1146212·	1,1255088	1,1475230	1,1698585·	1,1925186	1,2155062·	1,2388246·	1,2624769·
5	1,0510100·	1,0640821·	1,0772840	1,0906165·	1,1040808	1,1176776·	1,1314082	1,1452733	1,1592740·	1,1876863	1,2166529	1,2461819	1,2762815·	1,3069600	1,3382255·
6	1,0615201·	1,0773831·	1,0934432·	1,1097023·	1,1261624	1,1428254	1,1596934	1,1767683·	1,1940523	1,2292553	1,2653190	1,3022601	1,3400956	1,3788428	1,4185191
7	1,0721353·	1,0908504·	1,1098449	1,1291221·	1,1486856·	1,1685390	1,1886857·	1,2091294·	1,2298738·	1,2722792·	1,3159317·	1,3608618	1,4071004	1,4546791·	1,5036302·
8	1,0828567	1,1044861	1,1264925·	1,1488817·	1,1716593·	1,1948311	1,2184029	1,2423805·	1,2667700·	1,3168090	1,3685690·	1,4221006	1,4774554	1,5346865	1,5938480·
9	1,0936852·	1,1182921·	1,1433899·	1,1689872	1,1950925·	1,2217148	1,2488629·	1,2765460	1,3047731·	1,3628973·	1,4233118	1,4860951	1,5513282	1,6190942·	1,6894789·
10	1,1046221	1,1322708	1,1605408	1,1894444·	1,2189944	1,2492034	1,2800845	1,3116510	1,3439163·	1,4105987·	1,4802442·	1,5529694	1,6288946	1,7081444·	1,7908477
11	1,1156683·	1,1464242	1,1779489	1,2102597·	1,2433743	1,2773105	1,3120866·	1,3477214	1,3842338·	1,4599697	1,5394540·	1,6228530·	1,7103393·	1,8020924	1,8982985·
12	1,1268250	1,1607545	1,1956181·	1,2314393	1,2682417·	1,3060499·	1,3448888	1,3847837·	1,4257608·	1,5110686·	1,6010322	1,6958814	1,7958563	1,9012074·	2,0121964·
13	1,1380932·	1,1752639·	1,2135524	1,2529895	1,2936066	1,3354361	1,3785110	1,4228653	1,4685337	1,5639560·	1,6650735	1,7721961	1,8856491	2,0057739	2,1329282·
14	1,1494742	1,1899547·	1,2317557	1,2749168	1,3194787·	1,3654834	1,4129738	1,4619941	1,5125897	1,6186945	1,7316764	1,8519449	1,9799316	2,1160914·	2,2609039·
15	1,1609689·	1,2048291·	1,2502320·	1,2972278·	1,3458683	1,3962068	1,4482981·	1,5021989·	1,5579674	1,6753488	1,8009435	1,9352824	2,0789281·	2,2324764·	2,3965581·
16	1,1725786·	1,2198895·	1,2689855·	1,3199293·	1,3727857	1,4276214·	1,4845056	1,5435094	1,6047064	1,7339860	1,8729812	2,0223701·	2,1828745·	2,3552627	2,5403516·
17	1,1843044	1,2351381·	1,2880203	1,3430281	1,4002414	1,4597429	1,5216182·	1,5859559·	1,6528476	1,7946755·	1,9479005	2,1133768	2,2920183	2,4848021	2,6927727·
18	1,1961474·	1,2505773·	1,3073406	1,3665311	1,4282462·	1,4925871·	1,5596587	1,6295697	1,7024330·	1,8574892	2,0258165	2,2084787·	2,4066192	2,6214662·	2,8543391·
19	1,2081089·	1,2662096	1,3269507·	1,3904454	1,4568111·	1,5261703·	1,5986501·	1,6743829	1,7535060·	1,9225013	2,1068491·	2,3078603	2,5269502	2,7656469	3,0255995
20	1,2201900	1,2820372	1,3468550	1,4147782	1,4859474	1,5605092	1,6386164	1,7204284	1,8061112	1,9897888·	2,1911231	2,4117140	2,6532977	2,9177574·	3,2071354·
21	1,2323919	1,2980627	1,3670578	1,4395368	1,5156663	1,5956206·	1,6795818·	1,7677402	1,8602945·	2,0594314·	2,2787680·	2,5202411·	2,7859625·	3,0782341·	3,3995636
22	1,2447158·	1,3142884·	1,3875637	1,4647287	1,5459796·	1,6315221	1,7215714	1,8163530·	1,9161034	2,1315115·	2,3699187·	2,6336520	2,9252607	3,2475370	3,6035374
23	1,2571630	1,3307170·	1,4083771·	1,4903614·	1,5768992·	1,6682313·	1,7646106·	1,8663027·	1,9735865	2,2061144·	2,4647155	2,7521663	3,0715237·	3,4261515·	3,8197496·
24	1,2697346·	1,3473510·	1,4295028	1,5164427·	1,6084372·	1,7057665·	1,8087259·	1,9176261	2,0327941	2,2833284·	2,5633041·	2,8760138	3,2250999	3,6145899	4,0489346
25	1,2824320	1,3641929	1,4509453·	1,5429805	1,6406059·	1,7441463	1,8539441	1,9703608	2,0937779	2,3632449·	2,6658363	3,0054344·	3,3863549	3,8133923	4,2918707
26	1,2952563	1,3812453·	1,4727095	1,5699826·	1,6734181	1,7833896	1,9002927	2,0245457·	2,1565912·	2,4459585·	2,7724697·	3,1406790	3,5556726·	4,0231289	4,5493829·
27	1,3082088·	1,3985109	1,4948001·	1,5974573·	1,7068864·	1,8235158·	1,9478000	2,0802207·	2,2212890	2,5315671	2,8833685·	3,2820095·	3,7334563	4,2444010	4,8223459
28	1,3212909·	1,4159923	1,5172221·	1,6254129	1,7410242	1,8645449·	1,9964950	2,1374268	2,2879276·	2,6201719·	2,9987033	3,4296999·	3,9201291	4,4778430·	5,1116867
29	1,3345038	1,4336922	1,5399805	1,6538576	1,7758446·	1,9064972·	2,0464073·	2,1962060·	2,3565655	2,7118779·	3,1186514·	3,5840364·	4,1161356	4,7241244	5,4183879
30	1,3478489	1,4516133·	1,5630802	1,6828001	1,8113615·	1,9493934	2,0975675·	2,2566017	2,4272624·	2,8067937	3,2433975	3,7453181	4,3219423·	4,9839512·	5,7434911·
31	1,3613274	1,4697585	1,5865264	1,7122491	1,8475888	1,9932547·	2,1500067·	2,3186582·	2,5000803	2,9050314·	3,3731334	3,9138574·	4,5380394	5,2580686	6,0881006
32	1,3749406·	1,4881305	1,6103243	1,7422134·	1,8845405·	2,0381030	2,2037569	2,3824213·	2,5750827·	3,0067075·	3,5080587	4,0899810	4,7649414·	5,5472623.	6,4533866·
33	1,3886900·	1,5067321	1,6344791·	1,7727022	1,9222314	2,0839603	2,2588508·	2,4479379·	2,6523352	3,1119423·	3,6483811	4,2740301·	5,0031885	5,8523618	6,8405898·
34	1,4025769·	1,5255662·	1,6589963·	1,8037245	1,9606760	2,1508494·	2,3153221	2,5152562·	2,7319052·	3,2208603	3,7943163	4,4663615	5,2533479·	6,1742417	7,2510252·
35	1,4166027·	1,5446358·	1,6838813	1,8352897	1,9998895·	2,1787935·	2,3732051·	2,5844258	2,8138624·	3,3335904·	3,9460889·	4,6673478	5,5160153·	6,5138250	7,6860867·
36	1,4307687·	1,5639438	1,7091395	1,8674072	2,0398873	2,2278164	2,4325353	2,6554975	2,8982783	3,4502661	4,1039325·	4,8773784·	5,7918161	6,8720853·	8,1472520
37	1,4450764·	1,5834931	1,7347766	1,9000868·	2,0806850·	2,2779422·	2,4933487	2,7285237	2,9852266·	3,5710254	4,2680898·	5,0968604·	6,0814069	7,2500500·	8,6360871
38	1,4595272	1,6032867·	1,7607982·	1,9333384	2,1222987·	2,3291559·	2,5556824	2,8035581	3,0747834·	3,6960113	4,4388134·	5,3262192	6,3854772·	7,6488028	9,1542523
39	1,4741225	1,6233278·	1,7872102·	1,9671718	2,1647447·	2,3816029	2,6195744·	2,8806559·	3,1670269·	3,8253717	4,6163659·	5,5658990·	6,7047511·	8,0694869·	9,7035074·
40	1,4888637	1,6436194·	1,8140184	2,0015973	2,2080396·	2,4351889·	2,6850638	2,9598739·	3,2620377·	3,9592597	4,8010206	5,8163645	7,0399887	8,5133087·	10,2857179
41	1,5037523·	1,6641647	1,8412286·	2,0366253	2,2522004·	2,4899807	2,7521904	3,0412705	3,3598989	4,0978338	4,9930614·	6,0781009	7,3919881	8,9815407·	10,9028610
42	1,5187898·	1,6849667·	1,8688471	2,0722662	2,2972444	2,5460052·	2,8209951·	3,1249054·	3,4606958·	4,2412579·	5,1927839	6,3516154·	7,7615875·	9,4755255	11,5570326·
43	1,5339777·	1,7060288·	1,8968798	2,1085309	2,3431893·	2,6032904	2,8915200·	3,2108403·	3,5645167·	4,3897020	5,4004952·	6,6374381·	8,1496669	9,9966794	12,2504546
44	1,5493175·	1,7273542	1,9253330	2,1454301·	2,3900531·	2,6618644	2,9638080·	3,2991384·	3,6714522·	4,5433416	5,6165150·	6,9361229	8,5571502·	10,5464967·	12,9854819
45	1,5648107·	1,7489461	1,9542130	2,1829752	2,4378542	2,7217563·	3,0379032·	3,3898647·	3,7815958	4,7023585·	5,8411756·	7,2482484	8,9850077·	11,1265540·	13,7646108
46	1,5804588·	1,7708079·	1,9835262	2,2211772·	2,4866112·	2,7829959	3,1138508·	3,4830860·	3,8950437	4,8669411	6,0748227	7,5744196	9,4342581·	11,7385145·	14,5904874·
47	1,5962634	1,7929430·	2,0132791	2,2600478·	2,5363435	2,8456133	3,1916971	3,5788709	4,0118950	5,0372840	6,3178156	7,9152684·	9,9059710·	12,3841328·	15,4659167
48	1,6122260·	1,8153548·	2,0434782·	2,2995987	2,5870703·	2,9096396	3,2714895·	3,6772898·	4,1322518·	5,2135889·	6,5705282	8,2714555·	10,4012696	13,0652601·	16,3938717
49	1,6283483	1,8380467·	2,0741304·	2,3398417	2,6388117·	2,9751065	3,3532768	3,7784153·	4,2562194	5,3960645·	6,8333493·	8,6436710·	10,9213331	13,7838494·	17,3775040
50	1,6446318	1,8610223·	2,1052424	2,3807889	2,6915880	3,0420464	3,4371087	3,8823217·	4,3839060	5,5849268	7,1066833	9,0326362·	11,4673997·	14,5419612	18,4201542·

Tafel I.

Werthe für $1{,}0p^n$.

Summe, wozu das Kapital 1 nach Verfluß von n Jahren bei Zinses-Zinsen angewachsen ist.

Ende d. Jahres (n).	1,01 $p = 1$	1,0125^n $p = 1\frac{1}{4}$	1,015^n $p = 1\frac{1}{2}$	1,0175^n $p = 1\frac{3}{4}$	1,02^n $p = 2$	1,0225^n $p = 2\frac{1}{4}$	1,025^n $p = 2\frac{1}{2}$	1,0275^n $p = 2\frac{3}{4}$	1,03^n $p = 3$	1,035^n $p = 3\frac{1}{2}$	1,04^n $p = 4$	1,045^n $p = 4\frac{1}{2}$	1,05^n $p = 5$	1,055^n $p = 5\frac{1}{2}$	1,06^n $p = 6$
51	1,6610781	1,8842851·	2,1368210·	2,4224527	2,7454197·	3,1104924	3,5230364	3,9890856	4,5154232	5,7803993	7,3909506·	9,4391049	12,0407697·	15,3417690·	19,5253635
52	1,6776889	1,9078387	2,1688733·	2,4648456·	2,8003281·	3,1804785	3,6111123·	4,0987854	4,6508859	5,9827132·	7,6865887	9,8638646	12,6428082·	16,1855663·	20,6968853
53	1,6944658	1,9316867	2,2014064·	2,5079804·	2,8563347·	3,2520392·	3,7013901·	4,2115020·	4,7904124·	6,1921082	7,9940522·	10,3077385	13,2749486·	17,0757725	21,9386984·
54	1,7114104·	1,9558327·	2,2344275·	2,5518701	2,9134614	3,3252101·	3,7939249	4,3273183·	4,9341248·	6,4088320	8,3138143·	10,7715867·	13,9386961	18,0149400	23,2550203·
55	1,7285245·	1,9802807	2,2679439.	2,5965278·	2,9717306·	3,4000274	3,8887730	4,4463196	5,0821485·	6,6331411	8,6463669	11,2563081·	14,6356309	19,0057617	24,6503215·
56	1,7458098	2,0050342	2,3019631	2,6419670·	3,0311652·	3,4765280	3,9859923·	4,5685934	5,2346130·	6,8653010·	8,9922216	11,7628420	15,3674124·	20,0510786	26,1293408·
57	1,7632679	2,0300971	2,3364925·	2,6882015	3,0917885·	3,5547499	4,0856421·	4,6942297·	5,3916514	7,1055866	9,3519104·	12,2921699	16,1357830·	21,1538879	27,6971013
58	1,7809006	2,0554733·	2,3715399·	2,7352450	3,1536243·	3,6347317·	4,1877832	4,8233210·	5,5534009·	7,3542821·	9,7259868·	12,8453175·	16,9425722	22,3173517·	29,3589274
59	1,7987096	2,0811667·	2,4071130·	2,7831118	3,2166968·	3,7165132	4,2924778	4,9559623·	5,7200030	7,6116820	10,1150263·	13,4233568·	17,7897008·	23,5448061	31,1204630·
60	1,8166967	2,1071813·	2,4432197·	2,8318162·	3,2810307·	3,8001347·	4,3997897·	5,0922513·	5,8916031	7,8780909	10,5196274	14,0274079	18,6791858·	24,8397704	32,9876908
61	1,8348636·	2,1335211	2,4798680·	2,8813730·	3,3466514	3,8856378	4,5097844·	5,2322882·	6,0683512	8,1538240·	10,9404125	14,6586412·	19,6131451·	26,2059578	34,9669523
62	1,8532123	2,1601901	2,5170660·	2,9317970·	3,4135844	3,9730646·	4,6225291	5,3761762	6,2504017	8,4392079	11,3780290	15,3182801	20,5938024	27,6472854·	37,0649694
63	1,8717444	2,1871925	2,5548220·	2,9831035	3,4818561	4,0624586	4,7380923	5,5240210	6,4379137·	8,7345802	11,8331561·	16,0076027·	21,6234925·	29,1678862	39,2888676
64	1,8904618·	2,2145324	2,5931444	3,0353078·	3,5514932	4,1538639	4,8565446	5,6759316	6,6310512	9,0402905	12,3064761·	16,7279448·	22,7046672	30,7721199	41,6461996·
65	1,9093664·	2,2422140·	2,6320415·	3,0884257	3,6225231	4,2473258·	4,9779582·	5,8320197	6,8299827	9,3567006·	12,7987352	17,4867023·	23,8399005·	32,4645865	44,1449716
66	1,9284601·	2,2702417	2,6715222	3,1424731·	3,6949735·	4,3428907	5,1024072	5,9924002·	7,0348822	9,6841852	13,3106846	18,2673340	25,0318955·	34,2501387·	46,7936699
67	1,9477447·	2,2986197·	2,7115950	3,1974664·	3,7688730	4,4406057·	5,2299673·	6,1571912·	7,2459286·	10,0231316·	13,8431120	19,0893640	26,2834903·	36,1338964	49,6012901
68	1,9672222	2,3273525	2,7522689·	3,2534221	3,8442505	4,5405193·	5,3607165·	6,3265140·	7,4633065	10,3739412·	14,3968364·	19,9483854	27,5976648·	38,1212607	52,5773675·
69	1,9868944	2,3564444	2,7935530	3,3103570	3,9211355	4,6426810·	5,4947344·	6,5004931·	7,6872057	10,7370292	14,9727099·	20,8460627·	28,9775481	40,2179300·	55,7320096
70	2,0067633·	2,3858999·	2,8354563	3,3682882·	3,9995582	4,7471413·	5,6321028·	6,6792567·	7,9178219	11,1128252·	15,5716183·	21,7841355·	30,4264255	42,4299162	59,0759301·
71	2,0268310	2,4157237	2,8779881	3,4272333	4,0795493·	4,8539520·	5,7729054	6,8629363	8,1553565·	11,5017741	16,1944830·	22,7644216·	31,9477468	44,7635616	62,6204859·
72	2,0470993	2,4459202·	2,9211579·	3,4872099	4,1611403·	4,9631660	5,9172280·	7,0516670·	8,4000172·	11,9043362	16,8422624	23,7888206·	33,5451341·	47,2255575	66,3777151
73	2,0675703	2,4764942·	2,9649753	3,5482360·	4,2443631·	5,0748372	6,0651587·	7,2455879	8,6520177·	12,3209880	17,5159529	24,8593175·	35,2223908·	49,8229631·	70,3603780·
74	2,0882460	2,5074504·	3,0094499·	3,6103302	4,3292504	5,1890210·	6,2167877	7,4448415·	8,9115783	12,7522225·	18,2165910	25,9779868·	36,9835104	52,5632261	74,5820007
75	2,1091284·	2,5387935·	3,0545917	3,6735109·	4,4158354·	5,3057740·	6,3722074	7,6495747	9,1789256·	13,1985503·	18,9452546·	27,1469962·	38,8326859	55,4542035·	79,0569267·
76	2,1302197·	2,5705285	3,1004105·	3,7377974	4,5041521·	5,4251539·	6,5315126	7,8599380	9,4542934	13,6604996	19,7030648·	28,3686111	40,7743202	58,5041847·	83,8003360
77	2,1515219·	2,6026601	3,1469167·	3,8032088·	4,5942352	5,5472199	6,6948004	8,0760863	9,7379222	14,1386171	20,4911874	29,6451986	42,8130362	61,7219149	88,8283561·
78	2,1730371·	2,6351933·	3,1941205	3,8697650	4,6861199	5,6720323·	6,8621704	8,2981786·	10,0300599	14,6334687	21,3108349	30,9792325·	44,9536880	65,1166202·	94,1580575·
79	2,1947675	2,6681332·	3,2420323	3,9374859	4,7798423	5,7996531	7,0337247	8,5263786	10,3309617	15,1456401	22,1632683	32,3732980	47,2013724	68,6980343·	99,8075410
80	2,2167152	2,7014849	3,2906627·	4,0063919	4,8754391·	5,9301453	7,2095678	8,7608540	10,6408905·	15,6757375	23,0497990·	33,8300964	49,5614410·	72,4764262·	105,7959934·
81	2,2388823·	2,7352535	3,3400227	4,0765037·	4,9729479	6,0635735·	7,3898070	9,0017775	10,9601172·	16,2243883·	23,9717910	35,3524507·	52,0395131	76,4626297	112,1437530·
82	2,2612711·	2,7694441·	3,3901230·	4,1478426	5,0724069	6,2000039·	7,5745521·	9,2493263·	11,2889207·	16,7922419·	24,9306626·	36,9433110·	54,6414887·	80,6680743·	118,8723782·
83	2,2838839	2,8040622	3,4409749	4,2204298·	5,1738550	6,3395040·	7,7639159·	9,5036828·	11,6275884	17,3799704	25,9278891·	38,6057600·	57,3735632	85,1048184	126,0047209·
84	2,3067227	2,8391130	3,4925895	4,2942873·	5,2773321	6,4821429	7,9580138·	9,7650341	11,9764160·	17,9882693·	26,9650047	40,3430192·	60,2422413·	89,7855834·	133,5650042
85	2,3297899·	2,8746019	3,5449783·	4,3694374	5,3828787·	6,6279911	8,1569642	10,0335725·	12,3357085·	18,6178588	28,0436049	42,1584551	63,2543534	94,7237905	141,5789044·
86	2,3530878·	2,9105344	3,5981530·	4,4459025·	5,4905363·	6,7771209	8,3608883	10,3094958	12,7057798	19,2694838·	29,1653491	44,0555856	66,4170711	99,9335990	150,0736387
87	2,3766187	2,9469161	3,6521253·	4,5237058·	5,6003470·	6,9296061	8,5699105·	10,5930069·	13,0869532	19,9439158	30,3419631	46,0380869·	69,7379246·	105,4299469·	159,0780576·
88	2,4003849	2,9837525·	3,7069072	4,6028707	5,7123540	7,0855222·	8,7841583	10,8843146·	13,4795618	20,6419528·	31,5452416	48,1098068·	73,2248269	111,2285940·	168,6227405
89	2,4243887·	3,0210494·	3,7625108	4,6834209	5,8266011	7,2449465	9,0037622·	11,1836333	13,8839486·	21,3644212	32,8070512·	50,2747419	76,8860619·	117,3461667	178,7401049
90	2,4486326·	3,0588125·	3,8189485	4,7653808	5,9431331	7,4079578	9,2288563	11,4911832	14,3004671	22,1121759·	34,1193333	52,5371052·	80,7303650	123,8002058·	189,4645112
91	2,4731190	3,0970477·	3,8762327	4,8487749·	6,0619957·	7,5746368·	9,4595777	11,8071907·	14,7294811	22,8861021	35,4841066·	54,9012750	84,7668833	130,6092172	200,8323819
92	2,4978501·	3,1357608·	3,9343762	4,9336285	6,1832357	7,7450662	9,6960671·	12,1318885	15,1713655·	23,6871156·	36,9034709	57,3718324	89,0052274·	137,7927241·	212,8823248
93	2,5228286·	3,1749578·	3,9933948·	5,0199670	6,3069004	7,9193302	9,9384688·	12,4655154	15,6265065	24,5161647	38,3796097·	59,9535648·	93,4554888	145,3713239·	225,65 2643
94	2,5480569·	3,2146448	4,0532927·	5,1078164·	6,4330384	8,0975151	10,1869305·	12,8083171	16,0953017	25,3742304·	39,9147941·	62.6514752·	98,1282632·	153,3667468	239,1945801
95	2,5735375·	3,2548278·	4,1140921	5,1972032	6,5616991·	8,2797092	10,4416038·	13,1605458	16,5781607·	26,2623285·	41,5113859	65,4707916·	103,0346764	161,8019178·	253,5462549
96	2,5992729	3,2955132	4,1758035	5,2881543	6,6929331·	8,4660026·	10,7026439	13,5224608	17,0755055·	27,1815160·	43,1718413·	68,4169773	108,1864102·	170,7010233·	268,7590302
97	2,6252656·	3,3367071·	4,2384405·	5,3806970	6,8267918	8,6564877	10,9702100	13,8943285	17,5877707·	28,1328629	44,8987150	71,4957412·	113,5957307·	180,0895796·	284,8845720
98	2,6515183	3,3784160	4,3020171·	5,4748591·	6,9633276·	8,8512587	11,2444652·	14,2764225	18,1154038·	29,1175131	46,6946636	74,7130496	119,2755173	189,9945065·	301,9776464
99	2,6780334·	3,4206462	4,3665474	5,5706692	7,1025942	9,0504120	11,5255769	14,6690241·	18,6588660	30,1366260·	48,5624501·	78,0751368·	125,2392931·	200,4442043·	320,0963052
100	2,7048138	3,4634042·	4,4320456·	5,6681559	7,2446461	9,2540463	11,8137163·	15,0724223	19,2186319·	31,1914079·	50,5049481	81,5885180	131,5012578	211,4686356	339,3020835

Tafel II.

Werthe für $\frac{1{,}0\,p^n - 1}{0{,}0\,p}$.

Summe, wozu das $n$mal angelegte Kapital 1 bei Zinses-Zinsen im Zeitpunkte der letzten ($n$ten) Anlage erwachsen ist.

Zahl d. Jahre (n).	$p = 1$	$p = 1\frac{1}{4} = 1{,}25$	$p = 1\frac{1}{2} = 1{,}5$	$p = 1\frac{3}{4} = 1{,}75$	$p = 2$	$p = 2\frac{1}{4} = 2{,}25$	$p = 2\frac{1}{2} = 2{,}5$	$p = 2\frac{3}{4} = 2{,}75$	$p = 3$	$p = 3\frac{1}{2} = 3{,}5$	$p = 4$	$p = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$	$p = 5$	$p = 5\frac{1}{2} = 5{,}5$	$p = 6$
1	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1 0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
2	2,0100000	2,0125000	2,0150000	2,0175000	2,0200000	2,0225000	2,0250000	2,0275000	2,0300000	2 0350000	2,0400000	2,0450000	2,0500000	2,0550000	2,0600000
3	3,0301000	3,0376562·	3,0452250	3,0528062·	3,0604000	3,0680062·	3,0756250	3,0832562·	3,0909000	3,1062250	3,1216000	3,1370250	3,1525000	3,1680250	3,1836000·
4	4,0604010	4,0756269·	4,0909033·	4,1062303·	4,1216080	4,1370353·	4,1525156	4,1680458	4,1836270	4,2149428·	4,2464640	4,2781911	4,3101250	4,3422663·	4,3746160
5	5,1010050	5,1265722·	5,1522669	5,1780893·	5,2040401·	5,2301197	5,2563285	5,2826670·	5,3091358	5,3624658·	5,4163225·	5,4707097	5,5256312·	5,5810910	5 6370929·
6	6,1520150·	6,1906544	6,2295509	6,2687059·	6,3081209·	6,3477974	6,3877367	6,4279404	6,4684098·	6,5501521·	6,6329754·	6,7168916·	6,8019128	6,8880510	6,9753185
7	7,2135352	7,2680376	7,3229941·	7,3784083	7,4342833·	7,4906228	7,5474301·	7,5047087	7,6624621·	7,7794075	7,8982944·	8,0191517·	8,1420084·	8,2668938	8,3938376·
8	8,2856705·	8,3588881	8,4328391	8,5075304·	8,5829690·	8,6591618·	8,7361159	8,8138382·	8,8923360	9,0516867·	9,2142262·	9,3800136	9,5491088·	9,7215730	9,8974679
9	9,3685272·	9,4633742	9,5593317	9,6564122	9,7546284	9,8539930	9,9545188	10,0562188	10,1591061	10,3684958	10,5827953	10,8021142	11,0265643	11,2562595	11,4913159·
10	10,4622125	10,5816663·	10,7027216·	10,8253994·	10,9497210	11,0757078	11,2033817·	11,3327648	11,4638793	11,7313931·	12,0061071	12,2882093·	12,5778925	12,8753537·	13,1807949
11	11,5668346·	11,7139372	11,8632625	12,0148439	12,1687154	12,3249112·	12,4834663	12,6444158·	12,8077956·	13,1419919	13,4863514	13,8411787·	14,2067871·	14,5834982	14,9716426
12	12,6825030	12,8603614	13,0412114·	13,2251037	13,4120897	13,6022217·	13,7955529·	13,9921372·	14,1920295·	14,6019616	15,0258054·	15,4640318	15,9171265	16,3855906·	16,8699411·
13	13,8093280·	14,0211159	14,2368296	14,4565430	14,6803315	14,9082717·	15,1404417·	15,3769210	15,6177904	16,1130302·	16,6268376·	17,1599132·	17,7129828	18,2867981	18,8821376·
14	14,9474213	15,1963799	15,4503820·	15,7095325	15,9739381·	16,2437078·	16,5189528	16,7997863·	17,0863241·	17,6769863·	18,2919111·	18,9321093·	19,5986319·	20,2925720	21,0150659
15	16,0968955	16,3863346·	16,6821377·	16,9844493	17,2934159	17,6091913	17,9319266·	18,2617805	18,5989138·	19,2956807·	20,0235876	20,7840542·	21,5785635·	22,4086634·	23,2759698·
16	17,2578645	17,5911638	17,9323698·	18,2816772	18,6392852·	19,0053981	19,3802248	19,7639794·	20,1568813	20,9710297	21,8245311	22,7193367	23,6574917·	24,6411399·	25,6725280·
17	18,4304431·	18,8110533·	19,2013554	19,6016065·	20,0120709·	20,4330195·	20,8647304	21,3074889	21,7615877	22,7050157	23,6975123·	24,7417068·	25,8403663·	26,9964026·	28,2128797·
18	19,6147475·	20,0461915	20,4893757·	20,9446346·	21,4123123	21,8927625	22,3863487	22,8934448·	23,4144353·	24,4996913	25,6454128·	26,8550836·	28,1323846·	29,4812048	30,9056525
19	20,8108950·	21,2957689	21,7967163·	22,3111657·	22,8405586	23,3853496·	23,9460074	24,5230146	25,1168684	26,3571804·	27,6712294	29,0635624·	30,5390039	32,1026711	33,7599917
20	22,0190040	22,5629785	23,1236671	23,7016111·	24,2973698	24,9115200	25,5446576	26,1973974·	26,8703744·	28,2796818	29,7780785·	31,3714227·	33,0659541	34,8683180	36,7855912
21	23,2391940·	23,8450157·	24,4705221	25,1163893·	25,7833171·	26,4720292	27,1832740	27,9178259	28,6764857	30,2694706·	31,9692017	33,7831367·	35,7192518	37,7860755	39,9927266·
22	24,4715859·	25,1430784·	25,8375799·	26,5559261·	27,2989835	28,0676498·	28,8628558·	29,6855661	30,5367802·	32,3289021·	34,2479697·	36,3033779	38,5052144	40,8643096·	43,3922902·
23	25,7163018·	26,4575669	27,2251436·	28,0206549	28,8449632	29,6991720	30,5844272·	31,5019192	32,4528836·	34,4604137	36,6178885·	38,9370299·	41,4304751	44,1118466·	46,9958276·
24	26,9734648·	27,7880840	28,6335208	29,5110163	30,4218624·	31,3674033·	32,3490379·	33,3682220	34,4264702	36,6665282	39,0826041	41,6891963	44,5019988·	47,5379982·	50,8155773·
25	28,2431995	29,1354350·	30,0630236	31,0274591·	32,0302997	33,0731699	34,1577639	35,2858481	36,4592643	38,9498566·	41,6459082·	44,5652101	47,7270988	51,1525881·	54,8645119·
26	29,5256315	30,4996280	31,5139689·	32,5704396·	33,6709057	34,8173162·	36,0117080	37,2562089	38,5530422	41,3131016·	44,3117446	47,5706446	51,1134537·	54,9659805	59,1563827
27	30,8208878	31,8808733·	32,9866785	34,1404223·	35,3443238	36,6007058·	37,9120007	39,2807546·	40,7096335	43,7590602	47,0842144	50,7113236	54,6691264·	58 9891094	63,7057656·
28	32,1290967	33,2793842·	34,4814786·	35,7378797·	37,0512103	38,4242217·	39,8598007	41,3609754	42,9309225	46,2906273	49,9675829·	53,9933331·	58,4025827·	63,2335104·	68,5281116
29	33,4503876·	34,6953765·	35,9987008·	37,3632926·	38,7922345	40,2887667·	41,8562957·	43,4984022	45,2188501·	48,9107993	52,9662863	57,4230331·	62,3227119	67,7113535	73,6397983
30	34,7848915·	36,1290687·	37,5386813·	39,0171592·	40,5680792	42,1952640	43,9027031·	45,6946083	47,5754157	51,6226772·	56,0849377·	61,0070696·	66,4388475	72,4354779·	79,0581862
31	36,1327404·	37,5806821·	39,1017616	40,6999504	42,3794407·	44,1446574	46,0002707	47,9512100	50,0026781·	54,4294709·	59,3283352·	64,7523877·	70,7607898·	77,4194292·	84,8016773·
32	37,4940678·	39,0504406·	40,6882880	42,4121995·	44,2270296	46,1379122	48,1502775	50,2698683	52,5027585	57,3345024·	62,7014686·	68,6662452	75,2988293·	82,6774978·	90,8897780
33	38,8690085·	40,5385711·	42,2986123·	44,1544130·	46,1115701·	48,1760152·	50,3540344	52,6522896·	55,0778412·	60,3412100·	66,2095274	72,7562262·	80,0637708	88,2247602·	97,3431647
34	40,2576986	42,0453033·	43,9330915	45,9271152·	48,0338015·	50,2599756	52,6128853	55,1002276·	57,7301765	63,4531524	69,8579085	77,0302564·	85,0669593·	94,0771220·	104,1837545·
35	41,6602756	43,5708696	45,5920879	47,7308397·	49,9944776	52,3908250·	54,9282074	57,6154839	60,4620818	66,6740127	73,6522248·	81,4966180	90,3203073·	100,2513637·	111,4347798·
36	43,0768783·	45,1155054·	47,2759692	49,5661294·	51,9913671·	54,5696186	57,3014126	60,1999097	63,2759442	70,0076031·	77,5983138·	86,1639658	95,8363227	106,7651887·	119,1208666·
37	44,5076471·	46,6794493	48,9851087·	51,4335367·	54,0342545	56,7974350	59,7339479	62,8554072	66,1742225·	73,4578692·	81,7022464	91,0413442·	101,6281388·	113,6372741·	127,2681186·
38	45,9527236	48,2629424	50,7198854	53,3336236·	56,1149396	59,0753773	62,2272966	65,5839309	69,1594492·	77,0288947	85,9703362·	96,1382047·	107,7095458	120,8873242	135,9042057·
39	47,4122508·	49,8662292	52,4806836·	55,2669621	58,2372384	61,4045733	64,7829790	68,3874890	72,2342327	80,7249060	90,4091497	101,4644239·	114,0950230·	128,5361270·	145,0584581
40	48,8863733·	51,4895570	54,2678939·	57,2341339	60,4019831·	63,7861762	67,4025535	71,2681449·	75,4012597·	84,5502777	95,0255156·	107,0303230·	120,7997742	136,6056140	154,7619656
41	50,3752371	53,1331765	56,0819123·	59,2357312·	62,6100228	66,2213651·	70,0876173·	74,2280189	78,6632975	88,5095374·	99,8265363	112,8466875·	127,8397629·	145,1189228	165,0476834·
42	51,8789894·	54,7973412	57,9231410·	61,2723565·	64,8622232	68,7113459	72,8398077·	77,2692894·	82,0231964·	92,6073712·	104,8195977·	118,9247885	135,2317511	154,1004636	175,9505445·
43	53,3977793·	56,4823080	59,7919881·	63,3446228	67,1594677·	71,2573511·	75,6608029·	80,3941949·	85,4838923	96,8486292·	110,0123816·	125,2764040	142,9933386·	163,5759891	187,5075772
44	54,9317571·	58,1883368·	61,6888679·	65 4531537	69,5026571	73,8606415·	78,5523230·	83,6050353	89,0484091	101,2383313	115,4128769·	131,9138422	151,1430056	173,5726685	199,7580318·
45	56,4810747	59,9156910·	63,6142010	67,5985839	71,8927102	76,5225060	81,5161311	86,9041737·	92,7198613·	105,7816728·	121,0293920	138,8499651	159,7001558·	184,1191652·	212,7435137·
46	58,0458854·	61,6646372	65,5684140	69,7815591	74,3305644	79,2442624	84,5540344	90,2940385·	96,5014572	110,4840314	126,8705677	146,0982135	168,6851636·	195,2457193·	226,5081246
47	59,6263443	63,4354451·	67,5519402	72,0027364	76,8171757	82,0272583	87,6678852·	93,7771246	100,3965009	115,3509725	132,9453904	153,6726331	178,1194218·	206,9842339	241,0986120·
48	61,2226077·	65,2283882	69,5652193	74,2527843	79,3535192·	84,8728716	90,8595824	97,3559955	104,4083959	120,3882565	139,2632060	161,5879016	188,0253929	219,3683667·	256,5645288
49	62,8348338	67,0437430·	71,6086976	76,5623830	81,9405896	87,7825112	94,1310719·	101,0332854	108,5406478·	125,6018455·	145,8337342·	169,8593572	198,4266625·	232,4336269·	272,9584005·
50	64,4631821·	68,8817898·	73,6828280·	78,9022247	84,5794014	90,7576177	97,4843487·	104,8117007	112,7968673	130,9979101·	152,6670836·	178,5030282·	209,3479957	246,2174764	290,3359045·

Tafel II.

Werthe für $\frac{1{,}0\,p^n - 1}{0{,}0\,p}$.

Summe, wozu das $n$mal angelegte Kapital 1 bei Zinses-Zinsen im Zeitpunkte der letzten ($n$ten) Anlage erwachsen ist.

Zahl d. J. (n)	$p = 1$	$p = 1\frac{1}{4} = 1{,}25$	$p = 1\frac{1}{2} = 1{,}5$	$p = 1\frac{3}{4} = 1{,}75$	$p = 2$	$p = 2\frac{1}{4} = 2{,}25$	$p = 2\frac{1}{2} = 2{,}5$	$p = 2\frac{3}{4} = 2{,}75$	$p = 3$	$p = 3\frac{1}{2} = 3{,}5$	$p = 4$	$p = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$	$p = 5$	$p = 5\frac{1}{2} = 5{,}5$	$p = 6$
51	66,1078140	70,7428122·	75,7880705	81,2830136·	87,2709894·	93,7996641	100,9214574·	108,6940225	117,1807733	136,5828370	159,7737670	187,5356645·	220,8153955	260,7594376	308,7560588·
52	67,7688921	72,6270974	77,9248915·	83,7054664	90,0164092	96,9101565·	104,4444939	112,6831081·	121,6961965	142,3632363	167,1647176·	196,9747694·	232,8561652·	276,1012067	328,2814223·
53	69,4465810·	74,5349361	80,0937649	86,1703120·	92,8167374	100,0906351	108,0556062·	116,7818936	126,3470824	148,3459495·	174,8513063·	206,8386340·	245,4989735	292,2867730·	348,9783077
54	71,1410468·	76,4666228	82,2951714	88,6782925	95,6730721·	103,3426743·	111,7569964	120,9933957	131,1374948·	154,5380578	182,8453586	217,1463726	258,7739222	309,3625456	370,9170061
55	72,8524573	78,4224556	84,5295989·	91,2301626·	98,5865336	106,6678845·	115,5509213	125,3207140·	136,0716197	160,9468898·	191,1596732	227,9179593·	272,7126183	327,3774856	394,1720265
56	74,5809819	80,4027363	86,7975429·	93,8266904·	101,5582642·	110,0679119·	119,4396943·	129,7670337	141,1537683	167,5800309·	199,8055399	239,1742675·	287,3482492	346,3832473	418,8223481
57	76,3267917	82,4077705	89,0995061	96,4686575·	104,5894295·	113,5444399·	123,4256867	134,3356271·	146,3883813·	174,4453320·	208,7977615	250,9371095·	302,7156617	366,4343259	444,9516890·
58	78,0900596·	84,4378676	91,4359987	99,1568590·	107,6812184·	117,0991898·	127,5113288·	139,0298568·	151,7800328	181,5509186·	218,1496719·	263,2292795	318,8514447·	387,5882138·	472,6487903
59	79,8709602·	86,4933409·	93,8075386·	101,8921041	110,8348425	120,7339216·	131,6991121	143,8531779·	157,3334338	188,9052008	227,8756588	276,0745971	335,7940170	409,9055656	502,0077178
60	81,6696698·	88,5745077	96,2146517·	104,6752159	114,0515393·	124,4504348·	135,9915899	148,8091403·	163,0534368	196,5168828·	237,9906852	289,4979539·	353,5837178·	433,4503717	533,1281808·
61	83,4863665·	90,6816890·	98,6578715	107,5070322	117,3325701·	128,2505696·	140,3913796·	153,9013917	168,9450399	204,3949737·	248,5103126	303,5253619	372,2629037·	458,2901421·	566,1158717
62	85,3212302	92,8152101·	101,1377396	110,3884052·	120,6792215·	132,1362074·	144,9011641·	159,1336799·	175,0133911	212,5487978·	259,4507251	318,1840031·	391,8760489·	484,4960999·	601,0828240
63	87,1744425	94,9754003	103,6548057	113,3202023·	124,0928059·	136,1092721·	149,5236932·	164,5098561·	181,2637928	220,9880057·	270,8287541	333,5022833	412,4698514	512,1433854·	638,1477934·
64	89,0461869	97,1625928	106,2096277·	116,3033059	127,5746621	140,1717307·	154,2617856	170,0338772	187,7017066	229,7225859·	282,6619042·	349,5098860·	434,0933439·	541,3112716·	677,4366610·
65	90,9366488	99,3771252	108,8027722	119,3386137·	131,1261553·	144,3255947	159,1183302	175,7098088	194,3327578	238,7628765	294,9683804·	366,2378309	456,7980111·	572,0833916	719,0828607·
66	92,8460153	101,6193392·	111,4348137·	122,4270395	134,7486784·	148,5729206	164,0962884·	181,5418285·	201,1627405·	248,1195771·	307,7671156·	383,7185333·	480,6379117	604,5479781·	763,2278324
67	94,7744754·	103,8895810	114,1063360	125,5695127	138,4436520	152,9158113	169,1986957	187,5342288·	208,1976227·	257,8037623·	321,0778003	401,9858673·	505,6698073	638,7981169·	810,0215023·
68	96,7222202	106,1882007·	116,8179310	128,7669791·	142,2125250·	157,3564170·	174,4286631	193,6914201·	215,4435514·	267,8268940·	334,9209123	421,0752313·	531,9532977	674,9320134	859,6227924·
69	98,6894424	108,5155533	119,5702000	132,0204013	146,0567755·	161,8969364·	179,7893796·	200,0179342	222,9068580	278,2008353·	349,3177488	441,0236167·	559,5509625·	713,0532741	912,2001600
70	100,6763368	110,8719977	122,3637530	135,3307583	149,9779110·	166,5396175	185,2841141·	206,5184273·	230,5940637	288,9378645·	364,2904587·	461,8696795·	588,5285107	753,2712042	967,9321696
71	102,6831001·	113,2578977	125,1992093	138,6990466	153,9774693	171,2867591·	190,9162170	213,1976841	238,5118856	300,0506898·	379,8620771	483,6538151	618,9549362	795,7011204·	1027,0080998
72	104,7099311·	115,6736214	128,0771974·	142,1262799	158,0570186·	176,1407112	196,6891224	220,0606204	246,6672422	311,5524639·	396,0565601·	506,4182368	650,9026830·	840,4646820·	1089,6285858
73	106,7570305	118,1195416·	130,9983554	145,6134898	162,2181590·	181,1038772	202,6063505	227,1122875	255,0672595	323,4568002	412,8988225·	530,2070574·	684,4478172	887,6902395·	1156,0063009·
74	108,8246008	120,5960359·	133,9633307·	149,1617258·	166,4625222	186,1787144·	208,6715092·	234,3578754	263,7192772·	335,7777882	430,4147755	555,0663750·	719,6702080·	937,5132027·	1226,3666790
75	110,9128468	123,1034864	136,9727807	152,7720560·	170,7917726·	191,3677355·	214,8882970	241,8027169·	272,6308556	348,5300108	448,6313665	581,0443619	756,6537184·	990,0764289	1300,9486797·
76	113,0219752·	125,6422800	140,0273724	156,4455670·	175,2076081	196,6735095·	221,2605044	249,4522916·	281,8097812·	361,7285612	467,5766211·	608,1913582	795,4864044	1045,5306325	1380,0056005·
77	115,1521950	128,2128085	143,1277830	160,1833644·	179,7117603	202,0986635·	227,7920170	257,3122296·	291,2640747	375,3890608·	487,2796860	636,5599693	836,2607246	1104,0348173	1463,8059365·
78	117,3037169·	130,8154686	146,2746997·	163,9865733·	184,3059955	207,6458834·	234,4868174·	265,3883160	301,0019969	389,5276779·	507,7708734·	666,2051679·	879,0737608·	1165,7567322·	1552,6342927·
79	119,4767541·	133,4506619·	149,4688202·	167,8563384	188,9921154	213,3179158·	241,3489879	273,6864946·	311,0320568	404,1611467	529,0817084	697,1844005	924,0274489	1230,8733525	1646,7923503
80	121,6715217	136,1187952	152,7108525·	171,7938243	193,7719577	219,1175689·	248,3827125·	282,2128732·	321,3630185	419,3067868·	551,2449767	729,5576985	971,2288213	1299,5713869	1746,5998913·
81	123,8882369	138,8202801·	156,0015153	175,8002162·	198,6473968·	225,0477142·	255,5922804	290,9737272·	332,0039091	434,9825243·	574,2947758	763,3877949·	1020,7902624	1372,0478132	1852,3958848·
82	126,1271192·	141,5555336·	159,3415380·	179,8767200	203,6203448	231,1112878	262,9820874	299,9755048	342,9640263·	451,2069127	598,2665668·	798,7402457	1072,8297755	1448,5104429	1964,5396379
83	128,3883904·	144,3249778	162,7316611	184,0245626	208,6927517	237,3112918	270,5566396	309,2248311·	354,2529471·	467,9991546·	623,1972295	835,6835568	1127,4712643	1529,1785172·	2083,4120162
84	130,6722743·	147,1290400·	166,1726360·	188,2449924·	213,8666067	243,6507958·	278,3205556	318,7285140	365,8805355·	485,3791251	649,1251187	874,2893168·	1184,8448275	1614,2833357	2209,4167371·
85	132,9789971	149,9681530·	169,6652256	192,5392798·	219,1439388·	250,1329387·	286,2785694·	328,4935481·	377,8569516·	503,3673944·	676,0991234·	914,6323361	1245,0870689	1704,0689192	2342,9817414
86	135,3087870·	152,8427549·	173,2102039·	196,9087172·	224,5268176·	256,7609299	294,4355337	338,5271207	390,1926602	521,9852532·	704,1337283·	956,7907912	1308,3414223	1798,7927097·	2484,5606459
87	137,6618749·	155,7532894	176,8083570	201,3546198	230,0173540	263,5380508	302,7964220·	348,8366165·	402,8984400	541,2547371·	733,2990775	1000,8463768·	1374,7584934·	1898,7263088	2634,6342846·
88	140,0384937	158,7002055	180,4604824	205,8783256·	235,6177010·	270,4676569·	311,3663326	359,4296235	415,9853932	561,1986529·	763,6310406	1046,8844638	1444,4964181	2004,1562557·	2793,7123417
89	142,4388786·	161,6839581	184,1673896	210,4811963·	241,3300551	277,5531792·	320,1504909	370,3139381·	429,4649550	581,8406058	795,1762822·	1094,9942646·	1517,7212390	2115,3848498·	2962,3350822
90	144,8632674	164,7050075·	187,9299004·	215,1646173	247,1566562	284,7981257·	329,1542532	381,4975714·	443,3489036·	603,2050270	827,9833335	1145,2690065·	1594,6073009·	2232,7310166	3141,0751871·
91	147,3119001	167,7638201·	191,7488489·	219,9299981	253,0997893	292,2060836	338,3831095	392,9887546·	457,6493707·	625,3172029·	862,1026668·	1197,8061118·	1675,3376660	2356,5312225	3330,5396984
92	149,7850191	170,8608679	195,6250817	224,7787730·	259,1617851	299,7807205	347,8426872·	404,7959454	472,3788518·	648,2033050·	897,5867735·	1252,7073869	1760,1045493	2487,1404397·	3531,3720803
93	152,2828693	173,9966287·	199,5594579·	229,7124016	265,3450208	307,5257867	357,5387544·	416,9278339	487,5502174	671,8904207	934,4902445	1310,0792193	1849,1097768	2624,9331639	3744,2544051
94	154,8056979·	177,1715866	203,5528498	234,7323686	271,6519212	315,4451169	367,4772233	429,3933493·	503,1767239·	696,4065854·	972,8698542·	1370,0327842	1942,5652656	2770,3044879·	3969,9096694
95	157,3537549·	180,3862314·	207,6061425·	239,8401850·	278,0849596·	323,5426320	377,6641539	442,2016664·	519,2720256·	721,7808159·	1012,7846484·	1432,6842594·	2040,6935289	2923,6712347·	4209,1042496
96	159,9272925	183,6410593·	211,7202347	245,0373883	284,6466588·	331,8223412·	388,1057577·	455,3622122·	535,8501864·	748,0431445	1054,2960343·	1498,1550511·	2143,7282053·	3085,4731527	4462,6505045·
97	162,5265654·	186,9365726	215,8960382	250,3255426	291,3395920	340,2883439	398,8084016·	468,8846731	552,9256920	775,2246545·	1097,4678757·	1566,5720284·	2251,9146156	3256,1741761	4731,4095348·
98	165,1518311	190,2732797·	220,1344788	255,7062396	298,1663838·	348,9448316·	409,7786117	482,7790016	570,5134628	803,3575174·	1142,3665907·	1638,0677697·	2365,5103464	3436,2637557·	5016,2941069·
99	167,8033494	193,6516957·	224,4364959·	261,1810988	305,1297115	357,7960903·	421,0230770	497,0554241·	588,6288666·	832,4750305·	1189,0612544	1712,7808193·	2484,7858637	3626,2582623·	5318,2717533·
100	170,4813829	197,0723419·	228,8030434	266,7517680·	312,2323057·	366,8465024	432,5486539·	511,7244483	607,2877326·	862,6116566·	1237,6237046	1790,8559562·	2610,0251569	3826,7024667·	5638,3680585·

Tafel III.

Werthe für $1{,}0\,p^{-n} = \frac{1}{1{,}0\,p^{n}}$.

Gegenwärtiger Werth des nach Verfluß von n Jahren fälligen Kapitals 1, wenn mit Zinses-Zins rabattirt wird.

Zahl d. J. (n)	$1{,}01^{-n}, p=1$	$1{,}02^{-n}, p=2$	$1{,}025^{-n}, p=2{,}5$	$1{,}0275^{-n}, p=2{,}75$	$1{,}03^{-n}, p=3$	$1{,}0325^{-n}, p=3{,}25$	$1{,}035^{-n}, p=3{,}5$	$1{,}0375^{-n}, p=3{,}75$	$1{,}04^{-n}, p=4$	$1{,}045^{-n}, p=4{,}5$	$1{,}05^{-n}, p=5$	$1{,}06^{-n}, p=6$	Zahl d. J. (n)
1	0·990 0990	0·980 3922	0·975 6098	0·973 2360	0·970 8738	0·968 5230	0·966 1836	0·963 8554	0·961 5385	0·956 9378	0·952 3810	0·943 3962	1
2	0·980 2960	0·961 1688	0·951 8144	0·947 1883	0·942 5959	0·938 0368	0·933 5107	0·929 0173	0·924 5562	0·915 7300	0·907 0295	0·889 9964	2
3	0·970 5901	0·942 3223	0·928 5994	0·921 8378	0·915 1417	0·908 5102	0·901 9427	0·895 4383	0·888 9964	0·876 2966	0·863 8376	0·839 6193	3
4	0·960 9803	0·923 8454	0·905 9506	0·897 1657	0·888 4870	0·879 9131	0·871 4422	0·863 0731	0·854 8042	0·838 5613	0·822 7025	0·792 0937	4
5	0·951 4657	0·905 7308	0·883 8543	0·873 1540	0·862 6088	0·852 2160	0·841 9732	0·831 8777	0·821 9271	0·802 4510	0·783 5262	0·747 2582	5
6	0·942 0452	0·887 9714	0·862 2969	0·849 7849	0·837 4843	0·825 3908	0·813 5006	0·801 8098	0·790 3145	0·767 8957	0·746 2154	0·704 9605	6
7	0·932 7181	0·870 5602	0·841 2652	0·827 0413	0·813 0915	0·799 4160	0·785 9910	0·772 8287	0·759 9178	0·734 8285	0·710 6813	0·665 0571	7
8	0·923 4832	0·853 4904	0·820 7466	0·804 9064	0·789 4092	0·774 2470	0·759 4116	0·744 8952	0·730 6902	0·703 1851	0·676 8394	0·627 4124	8
9	0·914 3398	0·836 7553	0·800 7284	0·783 3638	0·766 4167	0·749 8760	0·733 7310	0·717 9712	0·702 5867	0·672 9044	0·644 6089	0·591 8985	9
10	0·905 2870	0·820 3483	0·781 1984	0·762 3979	0·744 0939	0·726 2722	0·708 9188	0·692 0205	0·675 5642	0·643 9277	0·613 9133	0·558 3948	10
11	0·896 3237	0·804 2630	0·762 1448	0·741 9931	0·722 4213	0·703 4113	0·684 9457	0·667 0077	0·649 5809	0·616 1987	0·584 6793	0·526 7875	11
12	0·887 4492	0·788 4932	0·743 5559	0·722 1344	0·701 3799	0·681 2700	0·661 7833	0·642 8990	0·624 5970	0·589 6639	0·556 8374	0·496 9694	12
13	0·878 6626	0·773 0325	0·725 4204	0·702 8072	0·680 9513	0·659 8257	0·639 4042	0·619 6617	0·600 5741	0·564 2716	0·530 3214	0·468 8390	13
14	0·869 9630	0·757 8750	0·707 7272	0·683 9973	0·661 1178	0·639 0564	0·617 7818	0·597 2643	0·577 4751	0·539 9729	0·505 0680	0·442 3010	14
15	0·861 3495	0·743 0147	0·690 4656	0·665 6908	0·641 8619	0·618 9408	0·596 8906	0·575 6764	0·555 2645	0·516 7204	0·481 0171	0·417 2651	15
16	0·852 8213	0·728 4458	0·673 6249	0·647 8742	0·623 1669	0·599 4584	0·576 7059	0·554 8688	0·533 9082	0·494 4693	0·458 1115	0·393 6463	16
17	0·844 3775	0·714 1626	0·657 1951	0·630 5345	0·605 0164	0·580 5892	0·557 2038	0·534 8133	0·513 3732	0·473 1764	0·436 2967	0·371 3644	17
18	0·836 0173	0·700 1594	0·641 1659	0·613 6589	0·587 3946	0·562 3140	0·538 3611	0·515 4827	0·493 6281	0·452 8004	0·415 5207	0·350 3438	18
19	0·827 7399	0·686 4308	0·625 5277	0·597 2350	0·570 2860	0·544 6141	0·520 1557	0·496 8508	0·474 6424	0·433 3018	0·395 7340	0·330 5130	19
20	0·819 5445	0·672 9713	0·610 2709	0·581 2506	0·553 6758	0·527 4713	0·502 5659	0·478 8923	0·456 3869	0·414 6429	0·376 8895	0·311 8047	20
21	0·811 4302	0·659 7758	0·595 3863	0·565 6940	0·537 5493	0·510 8680	0·485 5709	0·461 5830	0·438 8336	0·396 7874	0·358 9424	0·294 1554	21
22	0·803 3962	0·646 8390	0·580 8647	0·550 5538	0·521 8925	0·494 7874	0·469 1506	0·444 8993	0·421 9554	0·379 7009	0·341 8499	0·277 5051	22
23	0·795 4418	0·634 1559	0·566 6972	0·535 8187	0·506 6917	0·479 2130	0·453 2856	0·428 8186	0·405 7263	0·363 3501	0·325 5713	0·261 7973	23
24	0·787 5661	0·621 7215	0·552 8754	0·521 4781	0·491 9337	0·464 1288	0·437 9571	0·413 3191	0·390 1215	0·347 7035	0·310 0679	0·246 9785	24
25	0·779 7684	0·609 5309	0·539 3906	0·507 5213	0·477 6056	0·449 5195	0·423 1470	0·398 3799	0·375 1168	0·332 7306	0·295 3028	0·232 9986	25
26	0·772 0480	0·597 5793	0·526 2347	0·493 9380	0·463 6947	0·435 3699	0·408 8377	0·383 9806	0·360 6892	0·318 4025	0·281 2407	0·219 8100	26
27	0·764 4039	0·585 8620	0·513 3997	0·480 7182	0·450 1891	0·421 6658	0·395 0122	0·370 1018	0·346 8166	0·304 6914	0·267 8483	0·207 3680	27
28	0·756 8356	0·574 3746	0·500 8778	0·467 8523	0·437 0768	0·408 3930	0·381 6543	0·356 7246	0·333 4775	0·291 5707	0·255 0936	0·195 6301	28
29	0·749 3421	0·563 1123	0·488 6613	0·455 3307	0·424 3464	0·395 5380	0·368 7482	0·343 8309	0·320 6514	0·279 0150	0·242 9463	0·184 5567	29
30	0·741 9229	0·552 0709	0·476 7427	0·443 1442	0·411 9868	0·383 0877	0·356 2784	0·331 4033	0·308 3187	0·267 0000	0·231 3774	0·174 1101	30
31	0·734 5771	0·541 2460	0·465 1148	0·431 2839	0·399 9871	0·371 0292	0·344 2303	0·319 4249	0·296 4603	0·255 5024	0·220 3595	0·164 2548	31
32	0·727 3041	0·530 6333	0·453 7706	0·419 7410	0·388 3370	0·359 3503	0·332 5897	0·307 8794	0·285 0579	0·244 4999	0·209 8662	0·154 9574	32
33	0·720 1031	0·520 2287	0·442 7030	0·408 5071	0·377 0262	0·348 0391	0·321 3427	0·296 7512	0·274 0942	0·233 9712	0·199 8725	0·146 1862	33
34	0·712 9733	0·510 0282	0·431 9053	0·397 5738	0·366 0449	0·337 0839	0·310 4761	0·286 0253	0·263 5521	0·223 8959	0·190 3548	0·137 9115	34
35	0·705 9142	0·500 0276	0·421 3711	0·386 9331	0·355 3834	0·326 4735	0·299 9769	0·275 6870	0·253 4155	0·214 2544	0·181 2903	0·130 1052	35
36	0·698 9249	0·490 2231	0·411 0937	0·376 5773	0·345 0324	0·316 1971	0·289 8327	0·265 7224	0·243 6687	0·205 0282	0·172 6574	0·122 7408	36
37	0·692 0049	0·480 6109	0·401 0670	0·366 4986	0·334 9829	0·306 2441	0·280 0316	0·256 1180	0·234 2968	0·196 1992	0·164 4356	0·115 7932	37
38	0·685 1534	0·471 1872	0·391 2849	0·356 6896	0·325 2262	0·296 6045	0·270 5619	0·246 8607	0·225 2854	0·187 7504	0·156 6054	0·109 2388	38
39	0·678 3697	0·461 9482	0·381 7414	0·347 1432	0·315 7535	0·287 2683	0·261 4125	0·237 9380	0·216 6206	0·179 6655	0·149 1480	0·103 0555	39
40	0·671 6531	0·452 8904	0·372 4306	0·337 8522	0·306 5568	0·278 2259	0·252 5725	0·229 3379	0·208 2890	0·171 9287	0·142 0457	0·097 2222	40
41	0·665 0031	0·444 0102	0·363 3470	0·328 8099	0·297 6280	0·269 4682	0·244 0314	0·221 0486	0·200 2779	0·164 5251	0·135 2816	0·091 7190	41
42	0·658 4189	0·435 3041	0·354 4848	0·320 0097	0·288 9592	0·260 9862	0·235 7791	0·213 0588	0·192 5749	0·157 4403	0·128 8396	0·086 5274	42
43	0·651 8999	0·426 7688	0·345 8389	0·311 4449	0·280 5429	0·252 7711	0·227 8059	0·205 3579	0·185 1682	0·150 6605	0·122 7044	0·081 6296	43
44	0·645 4455	0·418 4007	0·337 4038	0·303 1094	0·272 3718	0·244 8146	0·220 1023	0·197 9353	0·178 0463	0·144 1728	0·116 8613	0·077 0091	44
45	0·639 0549	0·410 1968	0·329 1744	0·294 9970	0·264 4386	0·237 1086	0·212 6592	0·190 7811	0·171 1984	0·137 9644	0·111 2965	0·072 6501	45
46	0·632 7276	0·402 1537	0·321 1458	0·287 1017	0·256 7365	0·229 6451	0·205 4679	0·183 8854	0·164 6139	0·132 0233	0·105 9967	0·068 5378	46
47	0·626 4630	0·394 2684	0·313 3129	0·279 4177	0·249 2588	0·222 4166	0·198 5197	0·177 2389	0·158 2826	0·126 3381	0·100 9492	0·064 6583	47
48	0·620 2604	0·386 5376	0·305 6712	0·271 9394	0·241 9988	0·215 4156	0·191 8065	0·170 8327	0·152 1948	0·120 8977	0·096 1421	0·060 9984	48
49	0·614 1192	0·378 9584	0·298 2158	0·264 6612	0·234 9503	0·208 6349	0·185 3202	0·164 6580	0·146 3411	0·115 6916	0·091 5639	0·057 5457	49
50	0·608 0388	0·371 5279	0·290 9422	0·257 5778	0·228 1071	0·202 0677	0·179 0534	0·158 7065	0·140 7126	0·110 7097	0·087 2037	0·054 2884	50

Tafel III.

Werthe für $1{,}0\,p^{-n} = \frac{1}{1{,}0\,p^{n}}$.

Gegenwärtiger Werth des nach Verfluß von n Jahren fälligen Kapitals 1, wenn mit Zinses-Zins rabattirt wird.

Zahl d. J. (n)	$1{,}01^{-n}, p=1$	$1{,}02^{-n}, p=2$	$1{,}025^{-n}, p=2{,}5$	$1{,}0275^{-n}, p=2{,}75$	$1{,}03^{-n}, p=3$	$1{,}0325^{-n}, p=3{,}25$	$1{,}035^{-n}, p=3{,}5$	$1{,}0375^{-n}, p=3{,}75$	$1{,}04^{-n}, p=4$	$1{,}045^{-n}, p=4{,}5$	$1{,}05^{-n}, p=5$	$1{,}06^{-n}, p=6$	Zahl d. J. (n)
51	0·602 0186	0·364 2430	0·283 8461	0·250 6840	0·221 4632	0·195 7073	0·172 9984	0·152 9701	0·135 3006	0·105 9422	0·083 0512	0·051 2154	51
52	0·596 0581	0·357 1010	0·276 9230	0·243 9747	0·215 0128	0·189 5470	0·167 1482	0·147 4411	0·130 0967	0·101 3801	0·079 0954	0·048 3164	52
53	0·590 1565	0·350 0990	0·270 1688	0·237 4450	0·208 7503	0·183 5806	0·161 4959	0·142 1119	0·125 0939	0·097 0145	0·075 3299	0·045 5816	53
54	0·584 3134	0·343 2343	0·263 5793	0·231 0900	0·202 6702	0·177 8029	0·156 0347	0·136 9753	0·120 2817	0·092 8368	0·071 7427	0·043 0015	54
55	0·578 5281	0·336 5042	0·257 1505	0·224 9051	0·196 7672	0·172 2054	0·150 7581	0·132 0244	0·115 6555	0·088 8391	0·068 3264	0·040 5674	55
56	0·572 8001	0·329 9061	0·250 8786	0·218 8858	0·191 0361	0·166 7849	0·145 6600	0·127 2524	0·111 2072	0·085 0135	0·065 0728	0·038 2712	56
57	0·567 1288	0·323 4374	0·244 7596	0·213 0275	0·185 4719	0·161 5350	0·140 7343	0·122 6529	0·106 9300	0·081 3526	0·061 9741	0·036 1049	57
58	0·561 5137	0·317 0955	0·238 7898	0·207 3260	0·180 0698	0·156 4503	0·135 9752	0·118 2197	0·102 8173	0·077 8494	0·059 0229	0·034 0612	58
59	0·555 9541	0·310 8779	0·232 9657	0·201 7772	0·174 8251	0·151 5257	0·131 3770	0·113 9467	0·098 8628	0·074 4970	0·056 2123	0·032 1332	59
60	0·550 4496	0·304 7823	0·227 2836	0·196 3768	0·169 7331	0·146 7562	0·126 9343	0·109 8282	0·095 0604	0·071 2890	0·053 5355	0·030 3143	60
61	0·544 9996	0·298 8061	0·221 7401	0·191 1210	0·164 7894	0·142 1367	0·122 6418	0·105 8585	0·091 4012	0·068 2191	0·050 9862	0·028 5984	61
62	0·539 6036	0·292 9472	0·216 3318	0·186 0058	0·159 9897	0·137 6627	0·118 4945	0·102 0323	0·087 8887	0·065 2815	0·048 5583	0·026 9797	62
63	0·534 2610	0·287 2031	0·211 0554	0·181 0276	0·155 3298	0·133 3295	0·114 4875	0·098 3443	0·084 5084	0·062 4703	0·046 2460	0·025 4525	63
64	0·528 9713	0·281 5717	0·205 9077	0·176 1825	0·150 8057	0·129 1327	0·110 6159	0·094 7897	0·081 2580	0·059 7802	0·044 0438	0·024 0118	64
65	0·523 7339	0·276 0507	0·200 8856	0·171 4672	0·146 4133	0·125 0680	0·106 8753	0·091 3636	0·078 1327	0·057 2059	0·041 9465	0·022 6526	65
66	0·518 5484	0·270 6379	0·195 9859	0·166 8780	0·142 1488	0·121 1312	0·103 2611	0·088 0613	0·075 1276	0·054 7425	0·039 9490	0·021 3704	66
67	0·513 4143	0·265 3313	0·191 2058	0·162 4117	0·138 0085	0·117 3184	0·099 7692	0·084 8784	0·072 2381	0·052 3852	0·038 0467	0·020 1608	67
68	0·508 3310	0·260 1287	0·186 5422	0·158 0649	0·133 9889	0·113 6255	0·096 3954	0·081 8105	0·069 4597	0·050 1294	0·036 2349	0·019 0196	68
69	0·503 2980	0·255 0282	0·181 9924	0·153 8345	0·130 0863	0·110 0489	0·093 1356	0·078 8535	0·066 7882	0·047 9707	0·034 5095	0·017 9430	69
70	0·498 3149	0·250 0276	0·177 5536	0·149 7173	0·126 2974	0·106 5849	0·089 9861	0·076 0033	0·064 2191	0·045 9050	0·032 8662	0·016 9274	70
71	0·493 3810	0·245 1251	0·173 2230	0·145 7102	0·122 6188	0·103 2309	0·086 9431	0·073 2562	0·061 7494	0·043 9282	0·031 3011	0·015 9692	71
72	0·488 4961	0·240 3187	0·168 9980	0·141 8104	0·119 0474	0·099 9806	0·084 0030	0·070 6084	0·059 3744	0·042 0366	0·029 8106	0·015 0653	72
73	0·483 6595	0·235 6066	0·164 8761	0·138 0150	0·115 5800	0·096 8335	0·081 1623	0·068 0563	0·057 0908	0·040 2264	0·028 3910	0·014 2125	73
74	0·478 8708	0·230 9869	0·160 8548	0·134 3212	0·112 2136	0·093 7855	0·078 4177	0·065 5964	0·054 8950	0·038 4941	0·027 0391	0·013 4081	74
75	0·474 1295	0·226 4577	0·156 9315	0·130 7262	0·108 9452	0·090 8334	0·075 7659	0·063 2255	0·052 7837	0·036 8365	0·025 7515	0·012 6491	75
76	0·469 4351	0·222 0174	0·153 1039	0·127 2275	0·105 7721	0·087 9742	0·073 2038	0·060 9402	0·050 7535	0·035 2502	0·024 5252	0·011 9331	76
77	0·464 7873	0·217 6641	0·149 3697	0·123 8224	0·102 6913	0·085 2051	0·070 7283	0·058 7376	0·048 8015	0·033 7323	0·023 3574	0·011 2577	77
78	0·460 1854	0·213 3962	0·145 7265	0·120 5084	0·099 7003	0·082 5231	0·068 3365	0·056 6145	0·046 9245	0·032 2797	0·022 2451	0·010 6204	78
79	0·455 6291	0·209 2119	0·142 1722	0·117 2831	0·096 7964	0·079 9255	0·066 0256	0·054 5682	0·045 1197	0·030 8897	0·021 1858	0·010 0193	79
80	0·451 1179	0·205 1097	0·138 7046	0·114 1441	0·093 9771	0·077 4097	0·063 7929	0·052 5959	0·043 3843	0·029 5595	0·020 1770	0·009 4522	80
81	0·446 6514	0·201 0880	0·135 3215	0·111 0892	0·091 2399	0·074 9730	0·061 6356	0·050 6948	0·041 7157	0·028 2866	0·019 2162	0·008 9171	81
82	0·442 2291	0·197 1451	0·132 0210	0·108 1160	0·088 5824	0·072 6131	0·059 5513	0·048 8625	0·040 1112	0·027 0685	0·018 3011	0·008 4124	82
83	0·437 8506	0·193 2795	0·128 8010	0·105 2224	0·086 0024	0·070 3275	0·057 5375	0·047 0964	0·038 5685	0·025 9029	0·017 4296	0·007 9362	83
84	0·433 5155	0·189 4897	0·125 6595	0·102 4062	0·083 4974	0·068 1138	0·055 5918	0·045 3941	0·037 0851	0·024 7874	0·016 5996	0·007 4870	84
85	0·429 2232	0·185 7742	0·122 5946	0·099 6654	0·081 0655	0·065 9698	0·053 7119	0·043 7533	0·035 6588	0·023 7200	0·015 8092	0·007 0632	85
86	0·424 9735	0·182 1316	0·119 6045	0·096 9980	0·078 7043	0·063 8932	0·051 8955	0·042 1719	0·034 2873	0·022 6986	0·015 0564	0·006 6634	86
87	0·420 7658	0·178 5604	0·116 6873	0·094 4019	0·076 4120	0·061 8821	0·050 1406	0·040 6476	0·032 9685	0·021 7211	0·014 3394	0·006 2862	87
88	0·416 5998	0·175 0592	0·113 8413	0·091 8753	0·074 1864	0·059 9342	0·048 4450	0·039 1784	0·031 7005	0·020 7858	0·013 6566	0·005 9304	88
89	0·412 4751	0·171 6266	0·111 0647	0·089 4164	0·072 0256	0·058 0476	0·046 8068	0·037 7623	0·030 4813	0·019 8907	0·013 0063	0·005 5947	89
90	0·408 3912	0·168 2614	0·108 3558	0·087 0232	0·069 9278	0·056 2205	0·045 2240	0·036 3974	0·029 3089	0·019 0342	0·012 3869	0·005 2780	90
91	0·404 3477	0·164 9622	0·105 7130	0·084 6942	0·067 8911	0·054 4508	0·043 6946	0·035 0818	0·028 1816	0·018 2145	0·011 7971	0·004 9793	91
92	0·400 3443	0·161 7276	0·103 1346	0·082 4274	0·065 9136	0·052 7369	0·042 2170	0·033 8138	0·027 0977	0·017 4302	0·011 2353	0·004 6974	92
93	0·396 3805	0·158 5565	0·100 6191	0·080 2213	0·063 9938	0·051 9769	0·040 7894	0·032 5916	0·026 0555	0·016 6796	0·010 7003	0·004 4315	93
94	0·392 4559	0·155 4475	0·098 1650	0·078 0743	0·062 1299	0·049 4691	0·039 4101	0·031 4136	0·025 0534	0·015 9613	0·010 1907	0·004 1807	94
95	0·388 5702	0·152 3995	0·095 7707	0·075 9847	0·060 3203	0·047 9129	0·038 0774	0·030 2782	0·024 0898	0·015 2749	0·009 7055	0·003 9441	95
96	0·384 7230	0·149 4113	0·093 4349	0·073 9510	0·058 5634	0·046 4039	0·036 7897	0·029 1838	0·023 1632	0·014 6163	0·009 2433	0·003 7208	96
97	0·380 9138	0·146 4817	0·091 1560	0·071 9718	0·056 8577	0·044 9432	0·035 5456	0·028 1290	0·022 2724	0·013 9868	0·008 8031	0·003 5102	97
98	0·377 1424	0·143 6095	0·088 9326	0·070 0456	0·055 2016	0·043 5285	0·034 3436	0·027 1123	0·021 4157	0·013 3845	0·008 3840	0·003 3115	98
99	0·373 4083	0·140 7936	0·086 7636	0·068 1709	0·053 5938	0·042 1584	0·033 1822	0·026 1323	0·020 5920	0·012 8082	0·007 9847	0·003 1241	99
100	0·369 7112	0·138 0330	0·084 6474	0·066 3463	0·052 0328	0·040 8314	0·032 0601	0·025 1878	0·019 8009	0·012 2566	0·007 6045	0·002 9472	100

Tafel IV.

Werthe für $\frac{1-1,0p^{-n}}{0,0p} = \frac{1,0p^n-1}{1,0p^n.0,0p} = \frac{1}{0,0p}\left(1-\frac{1}{1,0p^n}\right)$.

Gegenwärtiger Werth eines $n$mal fälligen Kapitals 1, das mit dem Ende des laufenden Jahres zum ersten Male flüssig wird.

Zahl d. J. (n)	$p = 1$	$p = 2$	$p = 2\frac{1}{2} = 2{,}5$	$p = 2\frac{3}{4} = 2{,}75$	$p = 3$	$p = 3\frac{1}{4} = 3{,}25$	$p = 3\frac{1}{2} = 3{,}5$	$p = 3\frac{3}{4} = 3{,}75$	$p = 4$	$p = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$	$p = 5$	$p = 6$	Zahl d. J. (n)
1	0·990 0990	0·980 3922	0·975 6098	0·973 2360	0·970 8738	0·968 5230	0·966 1836	0·963 8554	0·961 5385	0·956 9378	0·952 3810	0·943 3962	1
2	1·970 3951	1·941 5609	1·927 4242	1·920 4243	1·913 4697	1·906 5598	1·899 6943	1·892 8727	1·886 0947	1·872 6678	1·859 4104	1·833 3927	2
3	2·940 9852	2·883 8833	2·856 0236	2·842 2621	2·828 6114	2·815 0700	2·801 6370	2·788 3110	2·775 0910	2·748 9644	2·723 2480	2·673 0119	3
4	3·901 9656	3·807 7287	3·761 9742	3·739 4279	3·717 0984	3·694 9831	3·673 0792	3·651 3841	3·629 8952	3·587 5257	3·545 9505	3·465 1056	4
5	4·853 4312	4·713 4595	4·645 8285	4·612 5819	4·579 7072	4·547 1991	4·515 0524	4·483 2618	4·451 8223	4·389 9767	4·329 4767	4·212 3638	5
6	5·795 4765	5·601 4309	5·508 1254	5·462 3668	5·417 1914	5·372 5899	5·328 5530	5·285 0716	5·242 1369	5·157 8725	5·075 6921	4·917 3243	6
7	6·728 1945	6·471 9911	6·349 3906	6·289 4081	6·230 2830	6·171 9999	6·114 5440	6·057 9004	6·002 0547	5·892 7009	5·786 3734	5·582 3814	7
8	7·651 6778	7·325 4814	7·170 1372	7·094 3144	7·019 6922	6·946 2469	6·873 9555	6·802 7955	6·732 7449	6·595 8861	6·463 2128	6·209 7938	8
9	8·566 0176	8·162 2367	7·970 8655	7·877 6783	7·786 1089	7·696 1229	7·607 6865	7·520 7668	7·435 3316	7·268 7905	7·107 8217	6·801 6923	9
10	9·471 3045	8·982 5850	8·752 0639	8·640 0762	8·530 2028	8·422 3951	8·316 6053	8·212 7873	8·110 8958	7·912 7182	7·721 7349	7·360 0871	10
11	10·367 6282	9·786 8480	9·514 2087	9·382 0693	9·252 6241	9·125 8064	9·001 5510	8·879 7949	8·760 4767	8·528 9169	8·306 4142	7·886 8746	11
12	11·255 0775	10·575 3412	10·257 7646	10·104 2037	9·954 0040	9·807 0764	9·663 3343	9·522 6939	9·385 0738	9·118 5808	8·863 2516	8·383 8439	12
13	12·133 7401	11·348 3737	10·983 1850	10·807 0109	10·634 9553	10·466 9021	10·302 7385	10·142 3556	9·985 6478	9·682 8524	9·393 5730	8·852 6830	13
14	13·003 7030	12·106 2488	11·690 9122	11·491 0081	11·296 0731	11·105 9584	10·920 5203	10·739 6198	10·563 1229	10·222 8253	9·898 6409	9·294 9839	14
15	13·865 0525	12·849 2635	12·381 3777	12·156 6989	11·937 9351	11·724 8992	11·517 4109	11·315 2962	11·118 3874	10·739 5457	10·379 6580	9·712 2490	15
16	14·717 8738	13·577 7093	13·055 0027	12·804 5732	12·561 1020	12·324 3576	12·094 1168	11·870 1650	11·652 2956	11·234 0150	10·837 7696	10·105 8953	16
17	15·562 2513	14·291 8719	13·712 1977	13·435 1077	13·166 1185	12·904 9468	12·651 3206	12·404 9784	12·165 6689	11·707 1914	11·274 0662	10·477 2597	17
18	16·398 2686	14·992 0313	14·353 3636	14·048 7666	13·753 5131	13·467 2608	13·189 6817	12·920 4611	12·659 2970	12·159 9918	11·689 5869	10·827 6035	18
19	17·226 0085	15·678 4620	14·978 8913	14·646 0016	14·323 7991	14·011 8749	13·709 8374	13·417 3119	13·133 9394	12·593 2936	12·085 3209	11·158 1165	19
20	18·045 5530	16·351 4333	15·589 1623	15·227 2521	14·877 4749	14·539 3461	14·212 4033	13·896 2042	13·590 3263	13·007 9365	12·462 2103	11·469 9212	20
21	18·856 9831	17·011 2092	16·184 5486	15·792 9461	15·415 0241	15·050 2142	14·697 9742	14·357 7872	14·029 1599	13·404 7239	12·821 1527	11·764 0766	21
22	19·660 3793	17·658 0482	16·765 4132	16·343 4999	15·936 9166	15·545 0016	15·167 1248	14·802 6865	14·451 1153	13·784 4248	13·163 0026	12·041 5817	22
23	20·455 8211	18·292 2041	17·332 1105	16·879 3186	16·443 6084	16·024 2147	15·620 4105	15·231 5050	14·856 8417	14·147 7749	13·488 5739	12·303 3790	23
24	21·243 3873	18·913 9256	17·884 9858	17·400 7967	16·935 5421	16·488 3435	16·058 3676	15·644 8241	15·246 9631	14·495 4784	13·798 6418	12·550 3575	24
25	22·023 1557	19·523 4565	18·424 3764	17·968 3180	17·413 1477	16·937 8629	16·481 5146	16·043 2040	15·622 0799	14·828 2090	14·093 9446	12·783 3562	25
26	22·795 2037	20·121 0358	18·950 6111	18·402 2559	17·876 8424	17·373 2329	16·890 3523	16·427 1845	15·982 7692	15·146 6114	14·375 1853	13·003 1662	26
27	23·559 6076	20·706 8978	19·464 0109	18·882 9741	18·327 0315	17·794 8987	17·285 3645	16·797 2863	16·329 5857	15·451 3028	14·643 0336	13·210 5341	27
28	24·316 4432	21·281 2724	19·964 8887	19·350 8264	18·764 1082	18·203 2917	17·667 0188	17·154 0109	16·663 0632	15·742 8735	14·898 1273	13·406 1643	28
29	25·065 7853	21·844 3847	20·453 5499	19·806 1571	19·188 4546	18·598 8297	18·035 7670	17·497 8418	16·983 7146	16·021 8885	15·141 0736	13·590 7210	29
30	25·807 7082	22·396 4556	20·930 2926	20·249 3013	19·600 4413	18·981 9174	18·392 0454	17·829 2451	17·292 0333	16·288 8885	15·372 4510	13·764 8312	30
31	26·542 2854	22·937 7015	21·395 4074	20·680 5852	20·000 4285	19·352 9466	18·736 2758	18·148 6700	17·588 4936	16·544 3910	15·592 8105	13·929 0860	31
32	27·269 5895	23·468 3348	21·849 1780	21·100 3262	20·388 7655	19·712 2970	19·068 8655	18·456 5494	17·873 5515	16·788 8909	15·802 6767	14·084 0434	32
33	27·989 6925	23·988 5636	22·291 8809	21·508 8333	20·765 7918	20·060 3361	19·390 2082	18·753 3006	18·147 6457	17·022 8621	16·002 5492	14·230 2296	33
34	28·702 6659	24·498 5917	22·723 7863	21·906 4071	21·131 8367	20·397 4199	19·700 6842	19·039 3259	18·411 1978	17·246 7580	16·192 9040	14·368 1411	34
35	29·408 5801	24·998 6193	23·145 1573	22·293 3403	21·487 2201	20·723 8934	20·000 6611	19·315 0129	18·664 6132	17·461 0124	16·374 1943	14·498 2464	35
36	30·107 5050	25·488 8425	23·556 2511	22·669 9175	21·832 2525	21·040 0904	20·290 4938	19·580 7354	18·908 2820	17·666 0406	16·546 8517	14·620 9871	36
37	30·799 5099	25·969 4534	23·957 3181	23·036 4161	22·167 2354	21·346 3346	20·570 5254	19·836 8533	19·142 5788	17·862 2398	16·711 2873	14·736 7803	37
38	31·484 6633	26·440 6406	24·348 6030	23·393 1057	22·492 4616	21·642 9391	20·841 0874	20·083 7141	19·367 8642	18·049 9902	16·867 8927	14·846 0192	38
39	32·163 0330	26·902 5888	24·730 3444	23·740 2488	22·808 2151	21·930 2073	21·102 4999	20·321 6521	19·584 4848	18·229 6557	17·017 0407	14·949 0747	39
40	32·834 6861	27·355 4792	25·102 7751	24·078 1011	23·114 7720	22·208 4332	21·355 0723	20·550 9900	19·792 7739	18·401 5844	17·159 0864	15·046 2969	40
41	33·499 6892	27·799 4895	25·466 1220	24·406 9110	23·412 4000	22·477 9014	21·599 1037	20·772 0385	19·993 0518	18·566 1095	17·294 3680	15·138 0159	41
42	34·158 1081	28·234 7936	25·820 6068	24·726 9207	23·701 3592	22·738 8876	21·834 8828	20·985 0974	20·185 6267	18·723 5498	17·423 2076	15·224 5433	42
43	34·810 0081	28·661 5623	26·166 4457	25·038 3656	23·981 9021	22·991 6587	22·062 6887	21·190 4553	20·370 7949	18·874 2103	17·545 9120	15·306 1729	43
44	35·455 4535	29·079 9631	26·503 8495	25·341 4751	24·254 2739	23·236 4733	22·282 7910	21·388 3907	20·548 8413	19·018 3831	17·662 7733	15·383 1820	44
45	36·094 5084	29·490 1599	26·833 0239	25·636 4721	24·518 7125	23·473 5819	22·495 4503	21·579 1717	20·720 0397	19·156 3474	17·774 0698	15·455 8321	45
46	36·727 2361	29·892 3136	27·154 1696	25·923 5738	24·775 4491	23·703 2270	22·700 9181	21·763 0571	20·884 6536	19·288 3707	17·880 0665	15·524 3699	46
47	37·353 6991	30·286 5820	27·467 4826	26·202 9915	25·024 7078	23·925 6436	22·899 4378	21·940 2960	21·042 9361	19·414 7088	17·981 0157	15·589 0282	47
48	37·973 9595	30·673 1196	27·773 1537	26·474 9309	25·266 7066	24·141 0592	23·091 2443	22·111 1287	21·195 1309	19·535 6065	18·077 1578	15·650 0266	48
49	38·588 0787	31·052 0780	28·071 3695	26·739 5922	25·501 6569	24·349 6941	23·276 5645	22·275 7867	21·341 4720	19·651 2981	18·168 7217	15·707 5723	49
50	39·196 1175	31·423 6059	28·362 3117	26·997 1700	25·729 7640	24·551 7619	23·455 6179	22·434 4932	21·482 1846	19·762 0078	18·255 9255	15·761 8606	50

Tafel IV.

Werthe für $\frac{1-1{,}0\,p^{-n}}{0{,}0\,p} = \frac{1{,}0\,p^{n}-1}{1{,}0\,p^{n}\,.\,0{,}0\,p} = \frac{1}{0{,}0\,p}\left(1-\frac{1}{1{,}0\,p^{n}}\right)$.

Gegenwärtiger Werth eines $n$mal fälligen Kapitals 1, das mit dem Ende des laufenden Jahres zum ersten Male flüssig wird.

Zahl d. J. (n)	$p = 1$	$p = 2$	$p = 2\frac{1}{2} = 2{,}5$	$p = 2\frac{3}{4} = 2{,}75$	$p = 3$	$p = 3\frac{1}{4} = 3{,}25$	$p = 3\frac{1}{2} = 3{,}5$	$p = 3\frac{3}{4} = 3{,}75$	$p = 4$	$p = 4\frac{1}{2} = 4{,}5$	$p = 5$	$p = 6$	Zahl d. J. (n)
51	39·798 1362	31·787 8489	28·646 1577	27·247 8540	25·951 2272	24·747 4691	23·628 6163	22·587 4633	21·617 4852	19·867 9500	18·338 9766	15·813 0761	51
52	40·394 1942	32·144 9499	28·923 0807	27·491 8287	26·166 2400	24·937 0161	23·795 7645	22·734 9044	21·747 5819	19·969 3302	18·418 0730	15·861 3925	52
53	40·984 3507	32·495 0489	29·193 2495	27·729 2737	26·374 9903	25·120 5967	23·957 2604	22·877 0163	21·872 6749	20·066 3447	18·493 4028	15·906 9741	53
54	41·568 6641	32·838 2833	29·456 8288	27·960 3637	26·577 6605	25·298 3987	24·113 2951	23·013 9916	21·992 9567	20·159 1815	18·565 1456	15·949 9755	54
55	42·147 1922	33·174 7875	29·713 9793	28·185 2688	26·774 4276	25·470 6041	24·264 0532	23·146 0160	22·108 6122	20·248 0206	18·633 4720	15·990 5430	55
56	42·719 9922	33·504 6936	29·964 8578	28·404 1545	26·965 4637	25·637 3890	24·409 7133	23·273 2684	22·219 8194	20·333 0340	18·698 5447	16·028 8141	56
57	43·287 1210	33·828 1310	30·209 6174	28·617 1820	27·150 9357	25·798 9239	24·550 4476	23·395 9214	22·326 7494	20·414 3866	18·760 5188	16·064 9190	57
58	43·848 6347	34·145 2265	30·448 4072	28·824 5081	27·331 0055	25·955 3743	24·686 4228	23·514 1411	22·429 5668	20·492 2360	18·819 5417	16·098 9802	58
59	44·404 5888	34·456 1044	30·681 3729	29·026 2852	27·505 8306	26·106 9000	24·817 7998	23·628 0878	22·528 4296	20·566 7330	18·875 7540	16·131 1134	59
60	44·955 0384	34·760 8867	30·908 6565	29·222 6620	27·675 5637	26·253 6562	24·944 7341	23·737 9159	22·623 4900	20·638 0220	18·929 2895	16·161 4277	60
61	45·500 0380	35·059 6928	31·130 3966	29·413 7830	27·840 3531	26·395 7929	25·067 3760	23·843 7744	22·714 8942	20·706 2412	18·980 2757	16·190 0261	61
62	46·039 6416	35·352 6400	31·346 7284	29·599 7888	28·000 3428	26·533 4556	25·185 8705	23·945 8067	22·802 7829	20·771 5227	19·028 8340	16·217 0058	62
63	46·573 9026	35·639 8432	31·557 7838	29·780 8163	28·155 6726	26·666 7851	25·300 3580	24·044 1510	22·887 2912	20·833 9930	19·075 0800	16·242 4583	63
64	47·102 8738	35·921 4149	31·763 6915	29·956 9989	28·306 4783	26·795 9178	25·410 9739	24·138 9407	22·968 5493	20·893 7732	19·119 1238	16·266 4701	64
65	47·626 6078	36·197 4655	31·964 5771	30·128 4661	28·452 8915	26·920 9857	25·517 8492	24·230 3043	23·046 6820	20·950 9791	19·161 0703	16·289 1227	65
66	48·145 1562	36·468 1035	32·160 5630	30·295 3441	28·595 0403	27·042 1169	25·621 1103	24·318 3656	23·121 8096	21·005 7217	19·201 0194	16·310 4931	66
67	48·658 5705	36·733 4348	32·351 7688	30·457 7558	28·733 0488	27·159 4353	25·720 8795	24·403 2439	23·194 0477	21·058 1068	19·239 0661	16·330 6539	67
68	49·166 9015	36·993 5635	32·538 3110	30·615 8207	28·867 0377	27·273 0608	25·817 2749	24·485 0544	23·263 5074	21·108 2362	19·275 3010	16·349 6735	68
69	49·670 1995	37·248 5917	32·720 3034	30·769 6552	28·997 1240	27·383 1097	25·910 4105	24·563 9079	23·330 2956	21·156 2069	19·309 8105	16·367 6165	69
70	50·168 5143	37·498 6193	32·897 8570	30·919 3725	29·123 4214	27·489 6947	26·000 3966	24·639 9112	23·394 5150	21·202 1119	19·342 6766	16·384 5439	70
71	50·661 8954	37·743 7444	33·071 0800	31·065 0827	29·246 0401	27·592 9246	26·087 3398	24·713 1674	23·456 2644	21·246 0401	19·373 9778	16·400 5131	71
72	51·150 3915	37·984 0631	33·240 0780	31·206 8931	29·365 0875	27·692 9052	26·171 3428	24·783 7758	23·515 6388	21·288 0766	19·403 7883	16·415 5784	72
73	51·634 0510	38·219 6697	33·404 9542	31·344 9082	29·480 6675	27·789 7387	26·252 5051	24·851 8321	23·572 7297	21·328 3030	19·432 1794	16·429 7909	73
74	52·112 9218	38·450 6566	33·565 8089	31·479 2294	29·592 8811	27·883 5242	26·330 9228	24·917 4285	23·627 6247	21·366 7971	19·459 2185	16·443 1990	74
75	52·587 0512	38·677 1143	33·722 7404	31·609 9556	29·701 8263	27·974 3575	26·406 6887	24·980 6540	23·680 4083	21·403 6336	19·484 9700	16·455 8481	75
76	53·056 4864	38·899 1317	33·875 8443	31·737 1830	29·807 5983	28·062 3318	26·479 8924	25·041 5942	23·731 1619	21·438 8838	19·509 4952	16·467 7812	76
77	53·521 2736	39·116 7958	34·025 2140	31·861 0054	29·910 2896	28·147 5368	26·550 6207	25·100 3318	23·779 9633	21·472 6161	19·532 8526	16·479 0389	77
78	53·981 4590	39·330 1919	34·170 9405	31·981 5138	30·009 9899	28·230 0599	26·618 9572	25·156 9463	23·826 8878	21·504 8958	19·555 0977	16·489 6593	78
79	54·437 0882	39·539 4039	34·313 1127	32·098 7969	30·106 7863	28·309 9853	26·684 9828	25·211 5145	23·872 0075	21·535 7854	19·576 2835	16·499 6786	79
80	54·888 2061	39·744 5136	34·451 8172	32·212 9410	30·200 7634	28·387 3950	26·748 7757	25·264 1104	23·915 3918	21·565 3449	19·596 4605	16·509 1308	80
81	55·334 8575	39·945 6016	34·587 1388	32·324 0301	30·292 0033	28·462 3680	26·810 4113	25·314 8052	23·957 1075	21·593 6315	19·615 6767	16·518 0479	81
82	55·777 0867	40·142 7466	34·719 1598	32·432 1461	30·380 5858	28·534 9812	26·869 9626	25·363 6676	23·997 2188	21·620 7000	19·633 9778	16·526 4603	82
83	56·214 9373	40·336 0261	34·847 9607	32·537 3685	30·466 5881	28·605 3086	26·927 5001	25·410 7640	24·035 7873	21·646 6029	19·651 4074	16·534 3965	83
84	56·648 4528	40·525 5158	34·973 6202	32·639 7747	30·550 0856	28·673 4224	26·983 0919	25·456 1581	24·072 8724	21·671 3903	19·668 0070	16·541 8835	84
85	57·077 6760	40·711 2900	35·096 2149	32·739 4401	30·631 1510	28·739 3921	27·036 8037	25·499 9114	24·108 5312	21·695 1103	19·683 8162	16·548 9467	85
86	57·502 6495	40·893 4216	35·215 8194	32·836 4380	30·709 8554	28·803 2854	27·088 6993	25·542 0833	24·142 8184	21·717 8089	19·698 8726	16·555 6101	86
87	57·923 4154	41·071 9819	35·332 5067	32·930 8399	30·786 2673	28·865 1674	27·138 8399	25·582 7309	24·175 7869	21·739 5301	19·713 2120	16·561 8963	87
88	58·340 0152	41·247 0411	35·446 3480	33·022 7153	30·860 4537	28·925 1016	27·187 2849	25·621 9093	24·207 4874	21·760 3159	19·726 8686	16·567 8267	88
89	58·752 4903	41·418 6677	35·557 4127	33·112 1317	30·932 4794	28·983 1493	27·234 0917	25·659 6716	24·237 9687	21·780 2066	19·739 8748	16·573 4214	89
90	59·160 8815	41·586 9292	35·665 7685	33·199 1549	31·002 4071	29·039 3698	27·279 3156	25·696 0690	24·267 2776	21·799 2407	19·752 2617	16·578 6994	90
91	59·565 2292	41·751 8913	35·771 4814	33·283 8490	31·070 2982	29·093 8206	27·323 0103	25·731 1508	24·295 4592	21·817 4553	19·764 0588	16·583 6787	91
92	59·965 5735	41·913 6190	35·874 6160	33·366 2764	31·136 2118	29·146 5575	27·365 2273	25·764 9647	24·322 5569	21·834 8854	19·775 2941	16·588 3762	92
93	60·361 9539	42·072 1754	35·975 2352	33·446 4978	31·200 2057	29·197 6344	27·406 0167	25·797 5563	24·348 6124	21·851 5650	19·785 9944	16·592 8077	93
94	60·754 4098	42·227 6230	36·073 4002	33·524 5720	31·262 3356	29·247 1035	27·445 4268	25·828 9699	24·373 6658	21·867 5263	19·796 1851	16·596 9884	94
95	61·142 9800	42·380 0225	36·169 1709	33·600 5567	31·322 6559	29·295 0155	27·483 5042	25·859 2481	24·397 7556	21·882 8003	19·805 8906	16·600 9324	95
96	61·527 7030	42·529 4339	36·262 6057	33·674 5078	31·381 2193	29·341 4194	27·520 2939	25·888 4319	24·420 9188	21·897 4166	19·815 1339	16·604 6532	96
97	61·908 6168	42·675 9155	36·353 7647	33·746 4796	31·438 0770	29·386 3626	27·555 8395	25·916 5609	24·443 1912	21·911 4034	19·823 9370	16·608 1634	97
98	62·285 7592	42·819 5250	36·442 6943	33·816 5251	31·493 2787	29·429 8911	27·590 1831	25·943 6731	24·464 6069	21·924 7879	19·832 3210	16·611 4749	98
99	62·659 1676	42·960 3187	36·529 4579	33·884 6960	31·546 8725	29·472 0495	27·623 3653	25·969 8054	24·485 1990	21·937 5961	19·840 3057	16·614 5990	99
100	63·028 8788	43·098 3516	36·614 1053	33·951 0423	31·598 9053	29·512 8809	27·655 4254	25·994 9932	24·504 9990	21·949 8527	19·847 9102	16·617 5462	100

Tafel V.

Sterblichkeits-Tafel für Berlin.

Alter.	A. Gestorbene.			B. Lebende.			C. Summe der Lebenden.			D. Es stirbt Einer von			E. Wahrscheinliche Lebensdauer.			F. Mittlere Lebensdauer.		
	Männer	Weiber	Summe	Männer	Weiber	Summe	Männer	Weiber	Summe	Männer	Weiber	Summe	Männer	Weiber	Summe	Männer	Weiber	Summe
0	10 393	8 651	19 044	36 895	32 467	69 362	1017 507	951 711	1 969 218	4	4	4	21,07	20,27	20,76	27,08	28,81	27,89
1	2 917	2 802	5 719	26 502	23 816	50 318	980 612	919 244	1 899 856	9	8	9	37,83	39,49	38,53			
2	1 308	1 317	2 625	23 585	21 014	44 599	954 110	895 428	1 849 538	18	16	17	41,78	44,57	43,07			
3	805	843	1 648	22 277	19 697	41 974	930 525	874 414	1 804 939	28	23	25	42,95	46,29	44,39			
4	528	491	1 019	21 472	18 854	40 326	908 248	854 717	1 762 965	41	38	39	43,16	46,94	44,82			
5	373	378	751	20 944	18 363	39 307	886 776	835 863	1 722 639	56	48	52	43,02	47,22	44,64	41,84	45,02	42,32
6	292	279	571	20 571	17 985	38 556	865 832	817 500	1 683 332	70	65	67	42,55	46,94	44,22			
7	220	222	442	20 279	17 706	37 985	845 261	799 515	1 644 776	92	80	86	41,98	46,46	43,65			
8	162	153	315	20 059	17 484	37 543	824 982	781 809	1 606 791	124	114	119	41,26	45,86	42,99			
9	142	121	263	19 897	17 331	37 228	804 923	764 325	1 569 248	140	143	141	40,47	45,15	42,37			
10	89	85	174	19 755	17 210	36 965	785 026	746 994	1 532 020	222	202	212	39,65	44,40	41,69	39,24	42,90	41,94
11	85	89	174	19 666	17 125	36 791	765 271	729 784	1 495 055	231	192	211	38,76	43,57	40,90			
12	67	73	140	19 581	17 036	36 617	745 605	712 659	1 458 264	292	233	262	37,87	42,74	40,20			
13	70	72	142	19 514	16 963	36 477	726 024	695 623	1 421 647	278	235	257	36,96	41,89	39,20			
14	84	70	154	19 444	16 891	36 335	706 510	678 660	1 385 170	231	241	236	36,05	41,03	38,32			
15	70	73	143	19 360	16 821	36 181	687 066	661 769	1 348 835	276	230	253	35,15	40,33	37,44	34,99	38,83	37,78
16	102	86	188	19 290	16 748	36 038	667 706	644 948	1 312 654	189	195	191	34,25	39,51	36,56			
17	109	118	227	19 188	16 662	35 850	648 416	628 200	1 276 616	176	141	160	33,38	38,75	35,72			
18	146	122	268	19 079	16 544	35 623	629 228	611 538	1 240 766	131	136	133	32,52	38,01	34,91			
19	183	139	322	18 933	16 422	35 355	610 149	594 994	1 205 143	103	118	109	31,71	37,23	34,13			
20	277	184	461	18 750	16 283	35 033	591 216	578 572	1 169 788	68	88	76	30,94	36,23	33,39	31,03	35,03	32,90
21	373	153	526	18 473	16 099	34 572	572 466	562 289	1 134 755	49	105	66	30,58	35,52	32,77			
22	428	169	597	18 100	15 946	34 046	553 993	546 190	1 100 183	42	94	59	30,21	34,77	32,21			
23	364	188	552	17 672	15 777	33 449	535 893	530 244	1 066 137	49	84	61	29,84	34,05	31,72			
24	328	196	524	17 308	15 589	32 897	518 221	514 467	1 032 688	53	79	63	29,37	33,47	31,21			
25	311	226	537	16 980	15 393	32 373	500 913	498 878	999 791	55	68	60	28,85	32,90	30,67	29,00	31,91	30,38
26	296	270	566	16 669	15 167	31 836	483 933	483 485	967 418	56	56	56	28,32	32,31	30,13			
27	256	196	452	16 373	14 897	31 270	467 264	468 318	935 582	64	76	69	27,77	31,77	29,73			
28	280	218	498	16 117	14 701	30 818	450 891	453 421	904 312	57	67	62	27,17	31,12	28,85			
29	250	216	466	15 837	14 483	30 320	434 774	438 720	873 494	63	67	65	26,62	30,54	28,27			
30	278	240	518	15 587	14 267	29 854	418 937	424 237	843 174	56	59	58	26,02	30,03	27,72	26,38	29,24	27,74
31	197	161	358	15 309	14 027	29 336	403 350	409 970	813 320	78	87	82	25,36	29,41	27,18			
32	267	255	522	15 112	13 866	28 978	388 041	395 943	783 984	56	54	55	24,61	28,70	26,46			
33	256	222	478	14 845	13 611	28 456	372 929	382 077	755 006	58	61	59	23,94	28,17	25,87			
34	327	255	582	14 589	13 389	27 978	358 084	368 466	726 550	45	52	48	23,36	27,70	25,28			
35	215	200	415	14 262	13 134	27 396	343 495	355 077	698 572	66	66	66	22,92	27,24	24,80	23,58	26,53	24,99
36	302	243	545	14 047	12 934	26 981	329 233	341 943	671 176	46	53	49	22,24	26,60	24,14			
37	237	172	409	13 745	12 691	26 436	315 186	329 009	644 195	58	74	65	21,70	26,05	23,55			
38	308	273	581	13 508	12 519	26 027	301 441	316 318	617 759	44	46	45	21,04	25,37	22,86			
39	313	226	539	13 200	12 246	25 446	287 933	303 799	591 732	42	54	47	20,51	24,88	22,45			
40	335	238	573	12 887	12 020	24 907	274 733	291 553	566 286	38	50	43	19,98	24,24	22,04	20,82	23,75	22,24
41	202	180	382	12 552	11 782	24 334	261 846	279 533	541 379	62	65	64	19,46	23,59	21,54			
42	328	262	590	12 350	11 602	23 952	249 294	267 751	517 045	35	44	41	18,74	22,86	20,84			
43	294	221	515	12 022	11 340	23 362	236 944	256 149	493 093	41	51	45	18,30	22,27	20,37			
44	295	249	544	11 728	11 119	22 847	224 922	244 809	469 731	39	45	42	17,91	21,64	19,81			
45	310	215	525	11 433	10 870	22 303	213 194	233 690	446 884	37	50	42	17,43	21,05	19,25	18,15	21,00	19,54
46	336	257	593	11 123	10 655	21 778	201 761	222 820	424 581	33	41	37	16,95	20,40	18,63			
47	314	200	514	10 787	10 398	21 185	190 638	212 165	402 803	34	51	41	16,46	19,82	18,07			
48	339	281	620	10 473	10 198	20 671	179 851	201 767	381 618	31	36	33	15,94	19,17	17,48			
49	394	231	625	10 134	9 917	20 051	169 378	191 569	360 947	26	43	32	15,45	18,70	16,97			
50	386	275	661	9 740	9 686	19 426	159 244	181 652	340 896	25	35	29	15,05	18,10	16,45	15,85	18,25	17,05
51	234	173	407	9 354	9 411	18 765	149 504	171 966	321 470	40	54	46	14,63	17,48	15,95			
52	338	262	600	9 120	9 238	18 358	140 150	162 555	302 705	27	35	31	13,99	16,72	15,31			
53	343	272	615	8 782	8 976	17 758	131 030	153 317	284 347	26	33	29	13,48	16,11	14,84			
54	327	250	577	8 439	8 704	17 143	122 248	144 341	266 589	26	35	30	12,98	15,57	14,31			

Tafel V.

Sterblichkeits-Tafel für Berlin.

Alter.	A. Gestorbene.			B. Lebende.			C. Summe der Lebenden.			D. Es stirbt Einer von			E. Wahrscheinliche Lebensdauer.			F. Mittlere Lebensdauer.		
	Männer	Weiber	Summe	Männer	Weiber	Summe	Männer	Weiber	Summe	Männer	Weiber	Summe	Männer	Weiber	Summe	Männer	Weiber	Summe
55	312	241	553	8 112	8 454	16 566	113 809	135 637	249 446	26	35	30	12,52	14,99	13,73	13,53	15,54	14,56
56	401	312	713	7 800	8 213	16 013	105 697	127 183	232 880	19	26	22	12,03	14,39	13,15			
57	292	226	518	7 399	7 901	15 300	97 897	118 970	216 867	25	35	30	11,61	13,92	12,78			
58	340	295	635	7 107	7 675	14 782	90 498	111 069	201 567	21	26	23	11,07	13,39	12,23			
59	329	237	566	6 767	7 380	14 147	83 391	103 394	186 785	21	31	25	10,70	13,03	11,80			
60	354	302	656	6 438	7 143	13 581	76 624	96 014	172 638	18	24	21	10,29	12,39	11,37	11,40	12,94	12,21
61	242	207	449	6 084	6 841	12 925	70 186	88 871	159 057	25	33	29	9,96	11,89	11,07			
62	294	276	570	5 842	6 634	12 476	64 102	82 030	146 132	20	24	22	9,49	11,20	10,42			
63	332	266	598	5 548	6 358	11 906	58 260	75 396	133 656	17	24	20	9,11	10,69	9,87			
64	330	339	669	5 216	6 092	11 308	52 712	69 038	121 750	16	18	17	8,65	10,14	9,41			
65	329	304	633	4 886	5 753	10 639	47 496	62 946	110 442	15	19	17	8,22	9,66	9,03	9,22	10,44	9,88
66	345	304	649	4 557	5 449	10 006	42 610	57 193	99 803	13	18	15	7,87	9,13	8,57			
67	300	266	566	4 212	5 145	9 357	38 053	51 744	89 797	14	19	16	7,53	8,64	8,12			
68	338	359	697	3 912	4 879	8 791	33 841	46 599	80 440	11	14	13	7,11	8,08	7,64			
69	277	295	572	3 574	4 520	8 094	29 929	41 720	71 649	13	15	14	6,78	7,63	7,26			
70	266	299	565	3 297	4 225	7 522	26 355	37 200	63 555	12	14	13	6,30	7,10	6,76	7,49	8,30	7,95
71	223	227	450	3 031	3 926	6 957	23 058	32 975	56 033	13	17	15	5,87	6,72	6,34			
72	308	325	633	2 808	3 699	6 507	20 027	29 049	49 076	9	11	10	5,46	6,16	5,88			
73	254	281	535	2 500	3 374	5 874	17 219	25 350	42 569	10	12	11	5,28	5,73	5,54			
74	262	330	592	2 246	3 093	5 339	14 719	21 976	36 695	9	9	9	4,87	5,31	5,10			
75	253	297	550	1 984	2 763	4 747	12 473	18 883	31 356	8	9	9	4,65	5,09	4,90	5,79	6,33	6,10
76	247	328	575	1 731	2 466	4 197	10 489	16 120	26 609	7	7	7	4,45	4,82	4,66			
77	172	244	416	1 484	2 138	3 622	8 758	13 654	22 412	8	9	9	4,33	4,88	4,63			
78	216	282	498	1 312	1 894	3 206	7 274	11 516	18 790	6	7	6	4,05	4,68	4,40			
79	161	211	372	1 096	1 612	2 708	5 962	9 622	15 584	7	8	7	4,02	4,60	4,35			
80	153	204	357	935	1 401	2 336	4 866	8 010	12 876	6	7	6	3,74	4,35	4,09	4,70	5,22	5,01
81	120	146	266	782	1 197	1 979	3 931	6 609	10 540	6	8	7	3,48	4,08	3,83			
82	112	160	272	662	1 051	1 713	3 149	5 412	8 561	6	6	6	3,14	3,68	3,50			
83	111	141	252	550	891	1 441	2 487	4 361	6 848	5	6	6	2,99	3,43	3,26			
84	99	142	241	439	750	1 189	1 937	3 470	5 407	4	5	5	2,98	3,18	3,10			
85	66	122	188	340	608	948	1 498	2 720	4 218	5	5	5	2,96	3,00	2,98	3,91	3,97	3,95
86	56	95	151	274	486	760	1 158	2 112	3 270	5	5	5	2,63	2,77	2,72			
87	50	87	137	218	391	609	884	1 626	2 510	4	4	4	2,40	2,51	2,47			
88	49	79	128	168	304	472	666	1 235	1 901	3	4	4	2,62	2,40	2,47			
89	25	58	83	119	225	344	498	931	1 429	5	4	4	3,36	2,65	2,95			
90	16	37	53	94	167	261	379	706	1 085	6	5	5	2,95	2,38	2,86	3,53	3,73	3,66
91	11	27	38	78	130	208	285	539	824	7	5	6	2,50	2,68	2,61			
92	21	25	46	67	103	170	207	409	616	3	4	4	1,90	2,75	2,33			
93	14	19	33	46	78	124	140	306	446	3	4	4	2,12	3,00	2,61			
94	8	10	18	32	59	91	94	228	322	4	6	5	2,00	3,05	2,68			
95	8	10	18	24	49	73	62	169	231	3	5	4	1,80	2,61	2,32	2,09	2,95	2,66
96	5	9	14	16	39	55	38	120	158	3	4	4	1,60	2,19	1,96			
97	5	9	14	11	30	41	22	81	103	2	3	3	1,12	1,75	1,54			
98	4	8	12	6	21	27	11	51	62	2	3	2	0,75	1,62	1,30			
99	1	4	5	2	13	15	5	30	35	2	3	3		1,42	1,42			
100	—	6	6	1	9	10	3	17	20	—	1	2						
101	—	1	1	1	3	4	2	8	10	—	3	4						
102	1	—	1	1	2	3	1	5	6	1	—	3						
103	—	1	1	0	2	2		3	3		2	2						
104	—	1	1		1	1		1	1		1	1						

Tafel VI.

Sterblichkeits-Tafel für Baiern.

Alter.	A. Zahl der Lebenden.		B. Zahl der Sterbenden.		C. Summe der Lebenden.		D. Es stirbt Einer von		E. Mittlere Lebensdauer.		F. Wahrscheinl. Lebensdauer.	
	Männer	Weiber	Männer	Weiber	Männer	Weiber	Männer	Weiber	Männer	Weiber	Männer	Weiber
0	10000	10000	3464	2988	296346	324343	2,89	3,34	29,13	31,93	13,23	28,30
1	6536	7012	551	374	286346	314343	11,86	18,74	43,31	44,30	50,46	50,40
2	5985	6638	202	237	279810	307331	29,62	28,01	46,25	45,80	53,25	51,66
3	5783	6401	162	204	273825	300693	35,70	31,37	46,85	46,48	53,44	52,04
4	5621	6197	132	170	268042	294292	42,54	36,45	47,19	46,96	53,35	52,21
5	5489	6027	99	97	262421	288095	55,44	60,72	47,31	47,30	53,07	52,17
6	5390	5930	82	80	256932	282068	65,73	74,12	47,10	47,01		
7	5308	5850	72	62	251542	276138	73,72	94,35				
8	5236	5788	61	53	246234	270288	85,83	109,21				
9	5175	5735	46	46	240998	264500	112,02	122,50				
10	5129	5689	43	44	235823	258765	119,70	129,30	45,48	44,99	49,89	49,01
11	5086	5645	40	42	230694	253076	127,15	134,40				
12	5046	5603	38	38	225608	247431	132,79	147,44				
13	5008	5565	34	35	220562	241828	147,29	158,00				
14	4974	5530	31	32	215554	236263	160,45	172,81				
15	4943	5498	30	29	210580	230733	164,77	189,60	42,10	41,47	45,77	44,96
16	4913	5469	30	26	205637	225235	163,77	210,34				
17	4883	5443	30	27	200724	219766	162,77	201,55				
18	4853	5416	31	29	195841	214323	156,55	186,17				
19	4822	5387	31	31	190988	208907	155,55	173,77				
20	4791	5358	34	33	186166	203520	140,91	162,12	38,36	37,48	41,48	40,62
21	4757	5325	37	35	181375	198162	128,56	152,20				
22	4720	5290	40	38	176618	192837	118,00	139,20				
23	4680	5252	44	41	171898	187547	106,32	128,10				
24	4636	5211	48	44	167218	182295	96,62	118,43				
25	4588	5167	50	47	162582	177084	91,76	109,94	34,94	33,77	37,41	36,48
26	4538	5120	47	50	157994	171917	96,34	102,40				
27	4491	5070	44	53	153476	166797	102,09	95,66				
28	4447	5017	42	56	148965	161727	105,88	89,60				
29	4405	4961	38	59	144518	156710	115,92	84,08				
30	4367	4902	40	59	140113	151749	109,17	83,08	31,58	30,46	33,40	32,63
31	4327	4843	40	60	135746	146847	108,17	80,71				
32	4287	4783	40	60	131419	142004	107,17	79,71				
33	4247	4723	41	60	127132	137221	103,58	78,71				
34	4206	4663	42	60	122885	132498	100,14	77,71				
35	4164	4603	43	60	118679	127835	96,84	76,71	28,00	27,27	29,30	28,88
36	4121	4543	43	61	114515	123232	95,84	74,47				
37	4078	4482	44	62	110394	118689	92,68	72,29				
38	4034	4420	45	63	106316	114207	89,73	70,16				
39	3989	4357	45	64	102282	109787	88,64	69,06				
40	3944	4293	48	64	98293	105430	82,18	68,06	24,42	24,06	25,25	25,12
41	3896	4229	51	64	94349	101137	76,39	67,06				
42	3845	4165	55	65	90453	96908	70,00	64,08				
43	3790	4100	57	66	86608	92743	66,49	62,12				
44	3733	4034	59	67	82818	88643	63,27	60,21				
45	3674	3967	60	68	79085	84609	60,23	58,16	21,03	20,83	21,38	21,35
46	3614	3899	61	69	75411	80642	59,24	56,51				
47	3553	3830	62	71	71797	76743	57,30	54,00				
48	3491	3759	63	72	68244	72913	55,41	52,21				
49	3428	3687	64	73	64753	69154	53,56	50,50				

Tafel VI.

Sterblichkeits-Tafel für Baiern.

Alter.	A. Zahl der Lebenden.		B. Zahl der Sterbenden.		C. Summe der Lebenden.		D. Es stirbt Einer von		E. Mittlere Lebensdauer.		F. Wahrscheinl. Lebensdauer.	
	Männer	Weiber	Männer	Weiber	Männer	Weiber	Männer	Weiber	Männer	Weiber	Männer	Weiber
50	3364	3614	65	76	61325	65467	50,98	47,59	17,73	17,61	17,65	17,62
51	3299	3538	67	80	57961	51853	49,24	44,22				
52	3232	3458	69	83	54662	58315	46,84	41,54				
53	3163	3375	73	85	51430	54857	43,33	39,71				
54	3090	3290	77	86	48267	51482	40,30	38,26				
55	3013	3204	83	87	45177	48192	36,30	36,83	14,49	14,54	14,01	14,03
56	2930	3117	87	88	42164	44988	33,70	35,42				
57	2843	3029	92	90	39234	41871	30,90	33,65				
58	2751	2939	97	94	36391	38842	28,35	31,18				
59	2654	2845	101	100	33640	35903	26,27	28,45				
60	2553	2745	106	107	30986	33058	24,09	26,00	11,64	11,54	10,71	10,56
61	2447	2638	108	113	28433	30313	22,65	23,34				
62	2339	2525	110	117	25986	27675	21,23	21,54				
63	2229	2408	112	121	23647	25150	19,90	19,90				
64	2117	2287	115	125	21418	22742	18,41	18,21				
65	2002	2162	118	131	19301	20455	17,00	16,50	9,14	8,96	7,82	7,69
66	1884	2031	121	136	17299	18293	15,57	14,93				
67	1763	1895	125	142	15415	16262	14,10	13,35				
68	1638	1753	130	147	13652	14367	12,60	11,93				
69	1508	1606	134	153	12014	12614	11,25	10,50				
70	1374	1453	138	145	10506	11008	9,95	10,02	7,15	7,08	5,65	5,76
71	1236	1308	132	137	9132	9555	9,36	9,55				
72	1104	1171	126	130	7896	8247	8,76	9,01				
73	978	1041	118	122	6792	7076	8,29	8,53				
74	860	919	109	113	5814	6035	7,89	8,13				
75	751	806	99	105	4954	5116	7,58	7,67	6,10	5,85	4,78	4,43
76	652	701	86	96	4203	4310	7,58	7,31				
77	566	605	76	88	3551	3609	7,31	6,91				
78	490	517	67	82	2985	3004	7,31	6,30				
79	423	435	61	74	2495	2487	6,93	5,90				
80	362	361	55	61	2072	2052	6,57	5,90	5,22	5,18	4,00	3,98
81	307	300	48	51	1710	1691	6,42	5,88				
82	259	249	42	39	1403	1391	6,17	6,39				
83	217	210	36	30	1144	1142	6,03	7,00				
84	181	180	31	24	927	932	5,84	7,50				
85	150	156	26	22	746	752	5,77	7,19	4,47	4,32	3,50	3,79
86	124	134	22	21	596	596	5,63	6,38				
87	102	113	19	20	472	462	5,37	5,65				
88	83	93	16	19	370	349	5,18	4,89				
89	67	74	12	18	287	256	5,59	4,11				
90	55	56	10	15	220	182	5,50	3,73	3,50	2,75	3,07	2,22
91	45	41	9	11	165	126	5,00	3,73				
92	36	30	8	9	120	85	4,50	3,33				
93	28	21	7	7	84	55	4,00	3,00				
94	21	14	6	5	56	34	3,50	2,80				
95	15	9	5	4	35	20	3,00	2,25	1,83	1,72	1,38	1,25
96	10	5	4	2	20	11	2,50	2,50				
97	6	3	3	1	10	6	2,00	3,00				
98	3	2	2	1	4	3	1,50	2,00				
99	1	1	1	1	1	1	1,00	1,00				
100		0										

Tafel VII.

Sterblichkeits-Tafel für Belgien.

Alter.	A. In den Städten.		B. Summe der Lebenden.		C. Auf dem Lande.		D. Summe der Lebenden.		E. Allgemeine Tafel.	F. Summe der Lebenden.	G. Mittlere Lebensdauer in den Städten.		H. Mittlere Lebensdauer auf dem Lande.		I. Mittlere Lebensd. n. d. allg. Taf.
	Männer	Weiber	Männer	Weiber	Männer	Weiber	Männer	Weiber			Männer	Weiber	Männer	Weiber	
Bei d. Geb.	10000	10000	297390	337857	10000	10000	324710	334392	100000	3264773	29,24	33,29	31,97	32,94	32,15
1 Monat	8840	9129			8926	9209			90396						
2 »	8550	8916			8664	8988			87936						
3 »	8361	8760			8470	8829			86175						
4 »	8195	8641			8314	8694			84720						
5 »	8069	8540			8187	8587			83571						
6 »	7961	8437			8078	8490			82526						
1 Jahr	7426	7932	287390	327857	7575	8001	314710	324392	77528	3164773					
1½»	6954	7500			7173	7603			73367						
2 »	6626	7179	279964	319925	6920	7326	307137	316391	70536	3087245					
3 »	6194	6761	273338	312746	6537	6931	300215	309065	66531	3016709					
4 »	5911	6477	267174	305985	6326	6691	293678	302134	64102	2950178					
5 »	5738	6295	261263	299508	6169	6528	287352	295443	62448	2886076	45,03	47,08	46,08	44,76	45,73
6 »	5621	6176	255525	293213	6038	6395	281183	288915	61166	2823628					
7 »	5547	6095	249904	287037	5939	6299	275145	282520	60249	2762462					
8 »	5481	6026	244357	280942	5862	6215	269206	276221	59487	2702213					
9 »	5424	5966	238876	274916	5792	6147	263344	270006	58829	2642726					
10 »	5384	5916	233452	268950	5734	6082	257552	263859	58258	2583897	42,86	44,96	44,42	42,88	43,85
11 »	5352	5873	228068	263034	5683	6018	251818	257777	57749	2525639					
12 »	5323	5838	222716	257161	5634	5960	246135	251759	57289	2467890					
13 »	5298	5807	217393	251323	5589	5908	240501	245799	56871	2410601					
14 »	5271	5771	212095	245516	5546	5862	234912	239891	56467	2353730					
15 »	5241	5732	206824	239745	5502	5796	229366	234029	56028	2297263	38,96	41,32	41,19	39,88	40,50
16 »	5209	5689	201583	234013	5456	5725	223864	228233	55570	2241235					
17 »	5171	5645	196374	228324	5408	5668	218408	222508	55087	2185665					
18 »	5131	5600	191203	222679	5357	5608	213000	216840	54575	2130578					
19 »	5087	5551	186072	217079	5302	5546	207643	211232	54030	2076003					
20 »	5038	5500	180985	211528	5242	5484	202341	205686	53450	2021973	35,42	37,96	38,10	37,01	37,33
21 »	4978	5445	175947	206028	5178	5421	197099	200202	52810	1968523					
22 »	4908	5387	170969	200583	5109	5356	191921	194781	52172	1915713					
23 »	4827	5326	166061	195196	5036	5289	186812	189425	51465	1863541					
24 »	4740	5264	161234	189870	4958	5222	181776	184136	50732	1812076					
25 »	4662	5201	156494	184606	4881	5153	176818	178914	49995	1761344	33,07	35,01	35,73	34,22	34,73
26 »	4590	5138	151832	179405	4805	5085	171937	173761	49298	1711349					
27 »	4523	5074	147242	174267	4734	5016	167132	168676	48602	1662051					
28 »	4459	5010	142719	169193	4673	4948	162398	163660	47965	1613449					
29 »	4397	4946	138260	164183	4620	4880	157725	158712	47350	1565484					
30 »	4335	4881	133863	159237	4572	4812	153105	153832	46758	1518134	30,38	32,12	32,99	31,47	31,97
31 »	4275	4816	129528	154356	4525	4744	148533	149020	46170	1471376					
32 »	4214	4751	125253	149540	4478	4677	144008	144276	45584	1425206					
33 »	4154	4686	121039	144789	4431	4609	139530	139599	44996	1379622					
34 »	4094	4622	116885	140103	4384	4542	135099	134990	44409	1334626					
35 »	4034	4558	112791	135481	4337	4474	130715	130448	43823	1290217	27,46	29,22	29,64	28,66	28,94
36 »	3976	4490	108757	130923	4296	4401	126378	125974	43236	1246394					
37 »	3918	4418	104781	126433	4255	4329	122082	121573	42650	1203158					
38 »	3860	4347	100863	122015	4215	4257	117827	117244	42064	1160508					
39 »	3802	4277	97003	117668	4174	4185	113612	112987	41476	1118444					
40 »	3744	4208	93201	113391	4134	4112	109438	108802	40889	1076968	24,59	26,45	25,98	25,96	25,84
41 »	3678	4148	89457	109183	4090	4041	105304	104690	40300	1036079					
42 »	3611	4088	85779	105035	4044	3971	101214	100649	39697	995779					
43 »	3544	4027	82168	100947	3995	3901	97170	96678	39106	956082					
44 »	3477	3967	78624	96920	3943	3831	93175	92777	38504	916976					
45 »	3411	3907	75147	92953	3887	3761	89232	88946	37900	878472	21,53	23,29	22,46	23,15	22,68
46 »	3352	3846	71736	89046	3827	3701	85345	85185	37295	840572					
47 »	3293	3783	68384	85200	3767	3640	81518	81484	36690	803277					
48 »	3233	3720	65091	81417	3707	3579	77751	77844	36084	766587					
49 »	3174	3656	61858	77697	3647	3519	74044	74265	35477	730503					

Tafel VII.

Sterblichkeits-Tafel für Belgien.

Alter.	A. In den Städten.		B. Summe der Lebenden.		C. Auf dem Lande.		D. Summe der Lebenden.		E. Allgemeine Tafel.	F. Summe der Lebenden.	G. Mittlere Lebensdauer in den Städten.		H. Mittlere Lebensdauer auf dem Lande.		I. Mittlere Lebensd. n. d. allg. Taf.
	Männer	Weiber	Männer	Weiber	Männer	Weiber	Männer	Weiber			Männer	Weiber	Männer	Weiber	
50 Jahre	3115	3592	58684	74041	3588	3458	70397	70746	34789	695026	18,34	19,11	19,12	20,02	19,48
51 »	3040	3520	55569	70449	3512	3392	66809	67288	34153	660237					
52 »	2962	3448	52529	66929	3435	3323	63297	63896	33418	626084					
53 »	2881	3375	49567	63481	3358	3256	59862	60573	32676	592666					
54 »	2810	3300	46686	60106	3276	3187	56504	57317	31930	559990					
55 »	2739	3225	43876	56806	3194	3118	53228	54130	31179	528060	15,02	17,11	16,16	16,86	16,44
56 »	2667	3150	41137	53581	3111	3049	50034	51012	30424	496881					
57 »	2583	3080	38470	50431	3026	2982	46923	47963	29656	466457					
58 »	2499	3010	35887	47351	2939	2912	43897	44981	28875	436801					
59 »	2415	2939	33388	44341	2851	2840	40958	42069	28081	407926					
60 »	2329	2862	30973	41402	2767	2762	38107	39229	27242	379845	12,80	13,97	13,27	13,70	13,44
61 »	2239	2779	28644	38540	2677	2677	35340	36467	26356	352603					
62 »	2146	2689	26405	35761	2587	2586	32663	33790	25423	326247					
63 »	2051	2595	24259	33072	2495	2495	30076	31204	24465	300824					
64 »	1956	2498	22208	30477	2387	2405	27581	28709	23478	276359					
65 »	1859	2397	20252	27979	2277	2310	25194	26304	22462	252881	10,39	11,17	10,56	10,89	10,76
66 »	1754	2292	18393	25582	2163	2200	22917	23994	21362	230419					
67 »	1649	2187	16639	23290	2049	2086	20754	21794	20263	209057					
68 »	1556	2085	14990	21103	1942	1983	18705	19708	19219	188794					
69 »	1466	1983	13434	19018	1835	1875	16763	17725	18175	169575					
70 »	1372	1864	11968	17035	1713	1758	14928	15850	17017	151400	8,22	8,64	8,21	8,52	8,40
71 »	1279	1741	10596	15171	1587	1642	13215	14092	15860	134383					
72 »	1184	1627	9317	13430	1474	1530	11628	12450	14749	118523					
73 »	1087	1514	8133	11803	1358	1420	10154	10920	13638	103774					
74 »	989	1389	7046	10289	1236	1300	8796	9500	12461	90136					
75 »	891	1261	6057	8900	1114	1182	7560	8200	11273	77675	6,30	6,56	6,29	6,44	6,39
76 »	806	1134	5166	7639	996	1061	6446	7018	10120	66402					
77 »	721	1011	4360	6505	882	940	5450	5957	9014	56282					
78 »	631	900	3639	5494	770	832	4568	5017	7910	47268					
79 »	541	789	3008	4595	664	723	3798	4185	6853	39358					
80 »	463	682	2467	3805	566	619	3134	3462	5867	32505	4,53	5,08	5,04	5,09	5,04
81 »	394	585	2004	3123	482	535	2568	2843	5031	26638					
82 »	332	495	1610	2538	414	460	2086	2308	4299	21607					
83 »	273	411	1278	2043	353	390	1672	1848	3627	17308					
84 »	225	346	1005	1632	294	323	1319	1458	3016	13681					
85 »	184	289	780	1286	239	262	1025	1135	2464	10665	3,74	3,95	3,79	3,83	3,83
86 »	150	239	596	997	191	211	786	873	1989	8201					
87 »	120	192	446	758	152	168	595	662	1585	6212					
88 »	93	150	326	566	117	132	443	494	1233	4627					
89 »	69	116	233	416	88	97	326	362	924	3394					
90 »	49	86	164	300	67	71	238	265	682	2470	2,85	2,99	3,05	3,23	3,12
91 »	37	65	115	214	48	54	171	194	510	1788					
92 »	28	47	78	149	38	40	123	140	387	1278					
93 »	18	33	50	102	27	32	85	100	282	891					
94 »	11	24	32	69	20	24	58	68	207	609					
95 »	9	18	21	45	14	18	38	44	153	402	1,83	2,00	2,21	1,94	2,13
96 »	5	12	12	27	10	12	24	26	105	249					
97 »	4	8	7	15	7	7	14	14	67	144					
98 »	2	4	3	7	4	4	7	7	39	77					
99 »	1	2	1	3	2	2	3	3	20	38					
100 »	—	1	—	1	1	1	1	1	10	18					1,3
101 »	—	—	—	—	—	—	—	—	5	8					
102 »	—	—	—	—	—	—	—	—	2	3					
103 »	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1					

Tafel VIII.

Zusammenstellung mehrerer Sterblichkeits-Tafeln.

Alter.	England und Wales.		Frankreich.	Baumann. Süßmilch.	Churmark.	Leipzig.		Nort-hampton.	Carlisle.	Finlaison.		Kersebom.	Wargentin.		Deparcieux.	Preußische Wittwencasse nach Brune.		Equitable Gesellschaft.	Sterblichkeit im Staatsdienerstande von Baiern.		Breslau. (Halley.)	London. (Simpson.)	Kritter.
	Männer	Weiber	Duvillard.			M.	W.			M.	W.		M.	W.		Männer	Frauen u. Wittwen		M.	W.			
0	1996195	1942301	1000000	1000	1000	22744	21741	11650	10000	1000	1000	1400	10000	10000	10000			10000	10000	10000	1000	1000	
1	1559249	1601164	767525	750	759	15818	16051	8650	8461	981	981	1125	7700	7910	7450			8461	6314	6806	855	680	
2	1419823	1474147	671834	661	689	14531	14782	7283	7779	963	967	1075	7200	7392	7088			7779	5864	6359	798	547	
3	1341709	1398247	624668	618	651	13892	14127	6781	7274	949	955	1030	6863	7042	6823			7274	5699	6196	760	496	
4	1293849	1351474	598713	593	625	13454	13709	6446	6998	937	945	993	6623	6792	6618			6998	5566	6065	732	469	
5	1260156	1319398	583151	579	603	13169	13413	6249	6797	927	935	964	6473	6657	6468			6797	5457	5960	710	452	
6	1235302	1296058	573025	567	584	12958	13190	6065	6676	919	926	947	6348	6537	6345			6676	5373	5881	692	440	
7	1215926	1277967	565838	556	570	12801	13041	5925	6594	912	919	930	6243	6432	6243			6594	5302	5814	680	430	
8	1199459	1263299	560245	547	560	12673	12901	5815	6536	906	913	913	6153	6347	6154			6536	5242	5758	670	422	
9	1185564	1250936	555486	539	552	12554	12788	5735	6493	901	908	904	6078	6277	6073			6493	5192	5712	661	415	
10	1172893	1239666	551122	532	547	12474	12703	5675	6460	896	903	895	6013	6217	6004			6460	5152	5676	653	410	
11	1161283	1229139	546888	527	543	12405	12638	5623	6431	891	899	886	5958	6165	5946			6435	5122	5646	646	405	
12	1150842	1219362	542630	523	539	12330	12572	5573	6400	886	895	878	5913	6119	5897			6409	5098	5619	640	400	
13	1140846	1209562	538255	519	535	12267	12514	5523	6368	881	892	870	5868	6079	5854			6381	5078	5595	634	395	
14	1131158	1199301	533711	515	531	12216	12467	5473	6335	876	887	863	5828	6044	5815			6351	5056	5569	628	390	
15	1120569	1187511	528969	511	527	12155	12406	5423	6300	872	883	856	5788	6009	5778		10809	6320	5031	5541	622	385	
16	1110473	1174984	524020	507	523	12089	12326	5373	6261	866	876	849	5749	5974	5740		10628	6288	5002	5511	616	380	
17	1099088	1167247	518863	503	519	12001	12246	5320	6219	860	870	842	5710	5934	5699		10457	6255	4967	5479	610	375	
18	1086520	1147035	513502	499	515	11889	12146	5262	6176	854	863	835	5671	5894	5655		10296	6221	4926	5445	604	370	
19	1072308	1132037	507949	495	511	11732	12045	5199	6133	846	856	826	5627	5852	5608		10144	6186	4881	5408	598	365	
20	1057164	1115976	502216	491	507	11561	11940	5132	6090	837	848	817	5583	5809	5558	10000	10000	6150	4832	5369	592	360	496
21	1041919	1099935	496317	486	502	11389	11821	5060	6047	827	841	808	5533	5766	5506	9938	9863	6113	4780	5328	586	355	491
22	1026085	1083698	490267	481	497	11220	11709	4985	6005	816	834	800	5483	5723	5453	9876	9732	6075	4725	5285	579	350	486
23	1009897	1066101	484083	476	492	11037	11574	4910	5963	804	827	792	5433	5680	5399	9813	9607	6035	4667	5239	573	345	481
24	995047	1049298	477777	471	487	10861	11423	4835	5921	793	820	783	5378	5636	5344	9750	9488	5993	4606	5191	567	339	476
25	980532	1032576	471366	466	482	10709	11303	4760	5879	782	813	772	5323	5591	5288	9687	9374	5949	4542	5140	560	333	471
26	965963	1015990	464863	461	476	10545	11143	4685	5836	771	805	760	5268	5546	5231	9623	9264	5903	4475	5086	553	327	466
27	952178	999672	458282	456	470	10410	11004	4610	5793	761	798	747	5213	5496	5173	9559	9158	5855	4407	5029	546	321	461
28	938555	983539	451635	451	464	10255	10843	4535	5748	751	791	735	5158	5444	5116	9494	9055	5805	4337	4969	539	315	456
29	924777	967267	444932	445	458	10119	10702	4460	5698	742	784	723	5103	5389	5060	9428	8954	5754	4266	4906	531	308	451
30	912578	952836	438183	439	452	9959	10510	4385	5642	732	777	711	5049	5334	5005	9361	8854	5702	4193	4841	523	301	446
31	898065	936322	431398	433	446	9821	10382	4310	5585	723	770	699	4988	5274	4951	9292	8754	5649	4124	4776	515	294	440
32	887727	924359	424583	427	440	9659	10235	4235	5528	714	763	687	4928	5214	4897	9219	8654	5595	4061	4710	507	287	434
33	875130	909932	417744	421	434	9511	10113	4160	5472	705	755	675	4868	5149	4844	9141	8554	5540	4005	4644	499	280	428
34	862721	895705	410886	415	428	9340	9927	4085	5417	696	748	665	4808	5084	4792	9057	8454	5483	3955	4578	490	273	422
35	851116	882426	404012	409	422	9181	9789	4010	5362	687	740	655	4748	5019	4740	8968	8355	5424	3912	4511	481	266	416
36	837375	867226	397123	402	415	8981	9577	3935	5307	679	732	645	4688	4959	4688	8874	8256	5364	3870	4444	472	259	410
37	824141	852276	390219	395	408	8812	9428	3860	5251	670	724	635	4628	4903	4637	8776	8158	5303	3829	4377	463	252	404
38	812268	838867	383300	388	401	8626	9244	3785	5194	662	716	625	4568	4847	4587	8675	8060	5241	3783	4309	454	245	398
39	799749	824599	376363	381	394	8447	9102	3710	5136	653	708	615	4508	4791	4538	8571	7962	5170	3731	4241	445	237	392
40	788582	811988	369404	374	387	8265	8913	3635	5075	644	700	605	4448	4733	4490	8465	7865	5117	3673	4173	436	229	385
41	772373	794684	362419	367	380	8135	8787	3559	5009	636	693	596	4383	4668	4441	8356	7768	5055	3612	4105	427	222	378
42	762290	783778	355400	360	373	7952	8595	3482	4940	627	685	587	4311	4593	4392	8244	7671	4993	3549	4036	417	214	371
43	748797	769705	348342	353	366	7761	8435	3404	4869	619	677	578	4231	4517	4342	8129	7573	4931	3485	3967	407	206	364
44	737969	758216	341235	346	359	7593	8260	3326	4798	610	669	569	4151	4441	4291	8010	7475	4869	3420	3898	397	199	357
45	725677	747550	334072	339	352	7384	8105	3248	4727	602	661	560	4071	4366	4239	7888	7377	4806	3354	3829	387	192	350
46	710145	731002	326843	332	345	7181	7917	3170	4657	594	654	550	3991	4294	4186	7763	7278	4742	3287	3759	377	185	342
47	697544	718668	319539	324	338	7005	7735	3092	4588	586	646	540	3911	4227	4132	7634	7178	4675	3219	3689	367	178	334
48	684911	706565	312148	316	331	6795	7564	3014	4521	578	638	530	3831	4162	4077	7501	7077	4605	3150	3619	357	171	326
49	671110	693335	304662	308	324	6629	7382	2936	4458	570	631	518	3751	4097	4021	7364	6974	4532	3080	3549	346	165	318

Tafel VIII.

Zusammenstellung mehrerer Sterblichkeits-Tafeln.

Alter.	England und Wales.		Frankreich.	Baumann. Süßmilch.	Churmark.	Leipzig.		Nort-hamp-ton.	Car-lisle.	Finlaison.		Kersseboom.	Wargentin.		Depar-cieux.	Preußische Wittwen-casse nach Brune.		Equitable Gesellschaft.	Sterblichkeit im Staatsdienerstande von Baiern.		Breslau. (Halley.)	London. (Simpson.)	Kritter.
	Männer	Weiber	Duvillard.			M.	W.			M.	W.		M.	W.		Männer	Frauen u. Wittwen		M.	W.			
50	658907	681849	297070	300	317	6406	7185	2857	4397	561	623	507	3666	4027	3964	7223	6869	4455	3009	3478	335	159	310
51	641439	665790	289361	291	309	6244	7004	2776	4338	552	616	495	3571	3952	3905	7077	6762	4375	2937	3406	324	153	301
52	630647	655671	281527	282	301	6034	6820	2694	4276	542	608	482	3476	3872	3843	6926	6652	4293	2864	3332	313	147	292
53	616103	641796	273560	273	293	5832	6632	2612	4211	531	601	470	3381	3787	3777	6770	6537	4208	2790	3255	302	141	283
54	603053	629787	265450	264	284	5627	6419	2530	4143	520	593	458	3286	3702	3707	6608	6416	4120	2716	3176	292	135	274
55	589905	617441	257193	255	275	5406	6205	2448	4073	508	585	446	3191	3617	3631	6439	6289	4030	2641	3095	282	129	265
56	573602	602232	248782	246	265	5137	5971	2366	4000	495	576	434	3096	3532	3550	6263	6155	3937	2565	3011	272	123	255
57	557897	587643	240214	237	255	4950	5786	2284	3924	482	568	421	3001	3447	3465	6080	6014	3841	2489	2924	262	117	245
58	543830	574648	231488	228	245	4717	5520	2202	3842	468	559	408	2901	3357	3377	5890	5865	3743	2412	2834	252	112	235
59	529543	561234	222605	219	234	4505	5326	2120	3749	454	549	395	2801	3267	3286	5693	5708	3643	2334	2741	242	107	225
60	516064	548931	213567	210	223	4293	5073	2038	3643	440	539	382	2701	3167	3191	5489	5543	3542	2256	2645	232	102	215
61	494229	527493	204380	201	212	4099	4880	1956	3521	426	529	369	2596	3057	3092	5279	5370	3440	2176	2546	222	97	205
62	480696	514942	195054	192	201	3868	4649	1874	3395	413	519	356	2486	2939	2990	5063	5189	3337	2092	2444	212	92	195
63	464003	498689	185600	182	190	3650	4425	1793	3268	399	508	343	2371	2819	2885	4841	5000	3234	2004	2337	202	87	185
64	445372	480407	176035	172	179	3402	4141	1712	3143	385	496	329	2256	2699	2778	4613	4803	3130	1909	2226	192	82	175
65	427611	462778	166377	162	168	3134	3869	1632	3018	370	484	315	2141	2579	2669	4379	4598	3024	1805	2112	182	77	166
66	408700	444055	156651	152	157	2893	3621	1552	2894	355	471	301	2026	2459	2559	4139	4385	2918	1694	1994	172	72	157
67	388540	423723	146882	142	146	2681	3380	1472	2771	339	457	287	1911	2339	2448	3893	4163	2811	1579	1870	162	67	148
68	369188	404200	137102	132	135	2461	3098	1392	2648	322	443	273	1791	2219	2336	3642	3932	2704	1460	1740	152	62	139
69	350873	385902	127347	122	124	2280	2848	1312	2525	305	428	259	1666	2099	2223	3388	3694	2596	1337	1604	142	58	130
70	334057	369680	117656	112	113	2070	2597	1232	2401	288	412	245	1541	1979	2109	3133	3452	2487	1207	1460	131	54	121
71	307870	341914	108070	103	103	1907	2415	1152	2277	270	395	231	1416	1849	1993	2878	3208	2378	1086	1323	120	50	112
72	291862	325760	98637	94	93	1714	2185	1072	2143	253	377	217	1291	1709	1874	2624	2963	2269	972	1193	109	46	103
73	270777	303892	89404	85	83	1516	1952	992	1997	235	358	203	1171	1559	1749	2374	2717	2159	865	1068	98	42	95
74	250215	282529	80423	77	73	1341	1739	912	1841	218	339	189	1051	1399	1616	2132	2471	2049	765	950	88	39	87
75	229563	261366	71745	69	64	1159	1503	832	1675	202	319	175	941	1249	1479	1902	2226	1938	673	839	78	36	79
76	207627	238482	63424	62	56	977	1312	752	1515	185	298	160	836	1109	1337	1687	1984	1827	589	736	68	33	71
77	188032	217960	55511	55	49	835	1117	675	1359	171	277	145	736	979	1198	1488	1748	1715	512	641	58	30	63
78	167020	196115	48057	49	43	704	933	602	1213	156	255	130	646	859	1064	1305	1524	1600	442	555	49	27	55
79	147425	175085	41107	43	37	577	801	534	1081	141	233	115	561	749	936	1137	1318	1481	378	479	41	25	47
80	131849	158652	34705	37	32	475	655	469	953	125	210	100	481	649	812	982	1134	1357	323	412	34		39
81	111183	133701	28886	32	27	404	545	406	837	110	189	87	406	554	697	838	972	1219	277	352	28		32
82	98037	119422	23680	28	23	309	451	346	725	95	168	75	336	464	590	703	827	1069	238	298	23		26
83	82514	101840	19106	24	19	241	363	289	623	81	149	64	271	379	492	575	693	923	205	250	19		21
84	70442	88119	15175	20	16	190	274	234	529	68	132	55	211	299	404	452	567	783	177	207	15		17
85	54522	69642	11886	17	13	152	221	186	445	56	117	45	161	224	327	334	453	651	153	169	11		14
86	42277	55455	9224	14	11	112	179	145	367	44	103	36	121	169	261	220	356	527	132	136	8		11
87	33423	45018	7165	12	9	81	131	111	296	34	89	28	91	129	206	109	277	413	113	108	5		9
88	26353	36529	5670	10	7	55	89	83	232	24	76	21	69	99	159		215	315	96	85	3		7
89	19591	28204	4686	8	6	35	65	62	181	17	64	15	52	76	117		166	235	81	67	1		5
90	15123	22567	3830	6	5	31	44	46	142	11	52	10	38	58	80		127	170	67	52			3
91	10574	15943	3093	5	4	24	23	34	105	7	41	7	26	43	50		96	120	55	40			2
92	8281	12886	2466	4	3.5	17	16	24	75	4	30	5	17	31	28		72	84	44	30			1
93	6243	10019	1938	3	3	12	14	16	54	3	21	3	10	21	14		53	56	34	21			1
94	4645	7761	1499	2	2.5	8	10	9	40	1	14	2	4	13	6		38	35	25	14			1
95	3516	6076	1140	1	2	7	6	4	30	0	8	1	1	7	3		26	20	17	9			
96	2539	4494	850	0	1	4	3	1	23		5	0	0	3	1		17	10	11	6			
97	1824	3312	621		0	1	1	0	18		2			1	0		10	4	6	4			
98	1330	2466	442			0	1		14		1			0			5	1	2	3			
99	904	1758	307				1		11		0						2	0	1	2			
100	637	1263	207				0		9								0		0	1			

Tafel IX.

Mittlere Lebensdauer.

Alter.	Duvillard.	Kersseboom.	Leipzig M.	Leipzig W.	Nord-hampton.	Wargentin M.	Wargentin W.	Brune M.	Brune W.	Equitable.	Baumann, Süßmilch.
0	28,5	34,5	27,8	31,0	25,18	33,20	35,70			39,86	28,49
1	36,4	41,8	38,8	40,9	32,74	42,45	44,00			45,43	36,72
2	40,4	42,7	41,2	43,4	37,79	43,83	46,05			48,37	40,71
3	42,4	43,5	42,0	44,4	39,55	44,96	47,31			50,69	42,50
4	43,3	44,2	42,4	44,7	40,58	45,57	48,04			51,67	43,28
5	43,4	44,5	42,3	44,7	40,84	45,62	48,00			52,19	43,31
6	43,2	44,3	42,0	44,4	41,07	45,50	47,87			52,13	43,22
7	42,7	44,1	41,5	43,9	41,03	45,26	47,64			51,77	43,06
8	42,1	43,8	40,9	43,4	40,79	44,91	47,28			51,22	42,76
9	41,4	43,3	40,2	42,7	40,36	44,46	46,80			50,56	42,39
10	40,8	42,7	39,5	42,0	39,78	43,94	46,25			49,81	41,94
11	40,1	42,1	38,7	41,2	39,14	43,26	25,55			49,00	41,33
12	39,4	41,5	38,0	40,5	38,49	42,58	44,85			48,20	40,65
13	38,8	40,9	37,2	39,6	37,83	41,91	44,15			47,41	39,96
14	38,1	40,3	36,3	38,8	37,17	41,24	43,46			46,63	39,26
15	37,4	39,6	35,5	37,9	36,51	40,56	42,76		40,65	45,86	38,56
16	36,8	38,9	34,7	37,2	35,85	39,83	42,04		40,33	45,09	37,86
17	36,1	38,2	33,9	36,5	35,20	39,11	41,31		39,98	44,32	37,16
18	35,5	37,6	33,3	35,8	34,58	38,39	40,59		39,60	43,56	36,46
19	34,9	36,9	32,8	35,0	33,99	37,67	39,87		39,19	42,81	35,75
20	34,2	36,3	32,2	34,3	33,43	36,95	39,15	39,60	38,75	42,06	35,03
21	33,7	35,7	31,7	33,7	32,90	36,28	38,43	38,85	38,28	41,31	34,39
22	33,0	35,1	31,1	33,0	32,39	35,62	37,72	38,09	37,78	40,56	33,74
23	32,5	34,5	30,6	32,4	31,88	34,96	37,01	37,33	37,27	39,83	33,09
24	31,9	33,8	30,1	31,8	31,36	34,30	36,29	36,57	36,73	39,10	32,44
25	31,3	33,3	29,5	31,1	30,85	33,63	35,58	35,81	36,17	38,39	31,78
26	30,7	32,7	29,0	30,6	30,33	32,98	34,90	35,04	35,60	37,68	31,12
27	30,2	32,3	28,4	29,9	29,82	32,92	34,21	34,27	35,00	36,99	30,45
28	29,6	31,9	27,7	29,4	29,30	31,66	33,53	33,50	34,39	36,30	29,79
29	29,1	31,4	27,1	28,8	28,79	31,00	32,85	32,73	33,78	35,57	29,18
30	28,5	31,0	26,6	28,3	28,27	30,34	32,17	31,96	33,15	34,94	28,57
31	27,9	30,5	25,9	27,6	27,76	29,69	31,54	31,19	32,53	34,26	27,96
32	27,4	30,0	25,4	27,0	27,24	29,04	30,91	30,43	31,90	33,59	27,35
33	26,8	29,5	24,8	26,3	26,72	28,39	30,28	29,69	31,26	32,92	26,73
34	26,3	28,9	24,2	25,8	26,20	27,74	29,66	28,96	30,63	32,26	26,11
35	25,7	28,4	23,6	25,2	25,68	27,09	29,03	28,24	29,98	31,60	25,49
36	25,1	27,8	23,1	24,6	25,16	26,43	28,26	27,54	29,33	30,95	24,92
37	24,6	27,2	22,6	24,1	24,64	25,76	27,50	26,84	28,68	30,30	24,35
38	24,0	26,7	22,0	23,6	24,12	25,09	26,74	26,15	28,02	29,65	23,78
39	23,5	26,1	21,5	22,9	23,60	24,42	25,94	25,46	27,37	29,00	23,21
40	22,9	25,5	20,9	22,2	23,08	23,75	25,21	24,77	26,70	28,34	22,64
41	22,3	24,9	20,3	21,7	22,56	23,15	24,68	24,09	26,02	27,69	22,06
42	21,8	24,2	19,7	21,2	22,04	22,54	24,15	23,41	25,35	27,02	21,48
43	21,2	23,6	19,2	20,6	21,54	21,93	23,62	22,73	24,67	26,36	20,89
44	20,6	23,0	18,6	20,0	21,03	21,32	23,10	22,06	23,99	25,69	20,31
45	20,0	22,4	18,1	19,4	20,52	20,71	22,57	21,40	23,30	25,02	19,72
46	19,5	21,7	17,6	18,8	20,02	20,12	21,91	20,74	22,61	24,34	19,12
47	18,9	21,1	17,1	18,3	19,51	19,52	21,24	20,08	21,91	23,69	18,58
48	18,4	20,6	16,6	17,7	19,00	18,92	20,58	19,42	21,22	23,04	18,04
49	17,9	20,0	16,0	17,1	18,49	18,32	19,92	18,77	20,52	22,41	17,49
50	17,2	19,4	15,5	16,6	17,99	17,72	19,26	18,13	19,83	21,78	16,95
51	16,7	18,9	14,9	16,0	17,50	17,17	18,64	17,49	19,14	21,17	16,46
52	16,1	18,3	14,4	15,4	17,02	16,63	18,01	16,86	18,45	20,57	15,96
53	15,6	17,8	13,9	14,8	16,54	16,08	17,39	16,24	17,76	19,97	15,48
54	15,0	17,3	13,4	14,3	16,06	15,53	16,77	15,63	17,09	19,39	14,98
55	14,5	16,7	12,9	13,8	15,58	14,98	16,15	15,02	16,42	18,81	14,50
56	14,0	16,2	12,6	13,3	15,10	14,43	15,53	14,43	15,77	18,24	14,01
57	13,5	15,6	12,0	12,7	14,63	13,87	14,92	13,85	15,13	17,69	13,52
58	12,9	15,2	11,6	12,3	14,15	13,33	14,31	13,28	14,50	17,14	13,04
59	12,4	14,7	11,1	11,7	13,68	12,79	13,69	12,72	13,88	16,59	12,55
60	11,9	14,1	10,6	11,3	13,21	12,24	13,08	12,18	13,28	16,05	12,07
61	11,4	13,6	10,1	10,7	12,75	11,72	12,56	11,65	12,69	15,51	11,58
62	11,0	13,1	9,7	10,2	12,28	11,21	12,04	11,12	12,12	14,98	11,10
63	10,5	12,6	9,2	9,7	11,81	10,73	11,52	10,61	11,56	14,44	10,69
64	10,1	12,1	8,9	9,3	11,35	10,26	11,01	10,11	11,01	13,90	10,28
65	9,6	11,6	8,6	8,9	10,88	9,78	10,49	9,62	10,48	13,37	9,88
66	9,2	11,1	8,2	8,5	10,42	9,30	9,97	9,15	9,97	12,84	9,50
67	8,8	10,6	7,9	8,1	9,96	8,84	9,46	8,69	9,47	12,31	9,13
68	8,4	10,1	7,5	7,8	9,50	8,40	8,94	8,26	9,00	11,78	8,79
69	8,0	9,7	7,1	7,4	9,05	7,99	8,42	7,84	8,55	11,24	8,47
70	7,6	9,2	6,7	7,1	8,60	7,60	7,91	7,44	8,11	10,72	8,18
71	7,2	8,7	6,3	6,6	8,17	7,22	7,53	7,05	7,69	10,18	7,85
72	6,8	8,2	5,9	6,2	7,74	6,87	7,16	6,69	7,28	9,65	7,55
73	6,5	7,8	5,6	5,9	7,33	6,53	6,78	6,34	6,89	9,12	7,30
74	6,2	7,3	5,5	5,5	6,92	6,22	6,40	6,00	6,53	8,58	7,01
75	5,9	6,9	5,0	5,3	6,54	5,89	6,03	5,66	6,20	8,03	6,76
76	5,6	6,5	4,9	5,0	6,18	5,56	5,78	5,33	5,89	7,50	6,74
77	5,3	6,0	4,6	4,8	5,83	5,25	5,43	4,98	5,62	6,96	6,23
78	5,0	5,7	4,4	4,7	5,48	4,92	5,11	4,60	5,37	6,42	5,93
79	4,8	5,4	4,2	4,4	5,11	4,59	4,79	4,21	5,13	5,90	5,69
80	4,6	5,1	4,0	4,2	4,75	4,27	4,47	3,79	4,88	5,39	5,53
81	4,4	4,7	3,7	4,0	4,41	3,96	4,13	3,35	4,61	4,94	5,31
82	4,3	4,4	3,6	3,7	4,09	3,69	3,84	2,90	4,34	4,57	5,00
83	4,2	4,1	3,5	3,5	3,80	3,45	3,59	2,44	4,08	4,21	4,75
84	4,1	3,8	3,3	3,4	3,58	3,30	3,42	1,97	3,87	3,87	4,60
85	4,1	3,5	3,0	3,1	3,37	3,16	3,40	1,49	3,72	3,56	4,32
86	4,2	3,2	3,0	2,8	3,19	3,04	3,34	1,00	3,60	3,28	4,14
87	4,2	3,0	2,9	2,6	3,01	2,88	3,22	0,50	3,49	3,01	3,75
88	4,2	2,8	3,0	2,6	2,86	2,64	3,05		3,35	2,83	3,40
89	3,9	2,7	3,5	2,3	2,66	2,34	2,82		3,19	2,63	3,12
90	3,7	2,5	2,9	2,2	2,41	2,02	2,55		3,01	2,44	3,00
91	3,5	2,2	2,6	2,8	2,09	1,73	2,27		2,82	2,25	2,50
92	3,2	2,0	2,4	2,8	1,75	1,38	1,95		2,60	2,00	2,00
93	3,0	1,5	2,3	2,1	1,37	1,00	1,64		2,35	1,75	1,50
94	2,8	1,0	2,0	1,7	1,05	0,75	1,35		2,08	1,51	1,00
95	2,5	0,5	1,2	1,5	0,75	0,50	1,07		1,81	1,25	
96	2,2	0,0	1,1	1,5	0,50	0,00	0,83		1,50	1,00	
97	2,0		0,5	2,5	0,00		0,50		1,20	0,75	
98	1,7		0,0	1,5			0,00		0,90	0,50	
99	1,4			0,5					0,50	0,00	

Tafel X.

Tafel für die Auflösung der Ehen zwischen 30jährigen Männern und 20jährigen Frauen und für das Ueberleben der Wittwer und Wittwen in Baiern.

Nach Jahren.	Leben noch		Es sterben		Zahl der bestehenden	Zahl der		Zahl der ausgestorbenen
	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Ehen.	Wittwen	Wittwer	Ehen.
0	5369	5369	88	41	5369	0	0	0
1	5281	5328	81	43	5241	87	40	1
2	5200	5285	72	46	5119	166	81	3
3	5128	5239	64	48	5004	235	124	6
4	5064	5191	55	51	4896	295	168	10
5	5009	5140	54	54	4795	345	214	15
6	4955	5086	53	57	4694	392	261	22
7	4902	5029	59	60	4592	437	310	30
8	4843	4969	67	63	4482	487	361	39
9	4776	4906	74	65	4364	542	412	51
10	4702	4841	78	65	4240	601	462	66
11	4624	4776	81	66	4113	663	511	82
12	4543	4710	82	66	3985	725	558	101
13	4461	4644	83	66	3859	785	602	123
14	4378	4578	85	67	3733	845	645	146
15	4293	4511	86	67	3607	904	686	172
16	4207	4444	87	67	3482	962	725	200
17	4120	4347	88	68	3359	1018	761	231
18	4032	4309	90	68	3236	1073	796	264
19	3942	4241	91	68	3114	1127	828	300
20	3851	4173	92	68	2993	1180	858	338
21	3759	4105	93	69	2874	1231	885	379
22	3666	4036	95	69	2756	1280	910	423
23	3571	3967	95	69	2639	1328	932	470
24	3476	3898	96	69	2524	1374	952	519
25	3380	3829	97	70	2411	1418	969	571
26	3283	3759	97	70	2298	1461	985	625
27	3186	3689	99	70	2189	1500	997	683
28	3087	3619	100	70	2081	1538	1006	744
29	2987	3549	100	71	1974	1574	1013	808
30	2887	3478	102	72	1870	1608	1017	874
31	2785	3406	108	74	1767	1639	1018	945
32	2677	3332	113	77	1662	1671	1013	1021
33	2564	3255	121	79	1554	1701	1010	1104
34	2443	3176	133	81	1445	1731	998	1195
35	2310	3095	142	84	1332	1763	979	1295
36	2168	3011	147	87	1216	1795	952	1406
37	2021	2924	152	90	1101	1824	920	1524
38	1869	2834	158	93	987	1848	881	1653
39	1711	2741	166	96	874	1867	837	1791
40	1545	2645	155	99	761	1884	784	1940
41	1390	2546	146	102	659	1887	731	2092
42	1244	2444	137	107	566	1878	678	2247
43	1107	2337	128	111	481	1856	626	2406
44	979	2226	118	114	405	1821	574	2569

Nach Jahren.	Leben noch		Es sterben		Zahl der bestehenden	Zahl der		Zahl der ausgestorbenen
	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Ehen.	Wittwen	Wittwer	Ehen.
45	861	2112	108	118	338	1774	523	2734
46	753	1994	99	124	280	1714	473	2902
47	654	1870	90	130	228	1642	426	3073
48	564	1740	82	136	183	1557	381	3248
49	482	1604	70	144	144	1460	338	3427
50	412	1460	59	137	112	1348	300	3609
51	353	1323	50	130	87	1236	266	3780
52	303	1193	42	125	67	1126	236	3940
53	261	1068	36	118	52	1016	209	4092
54	225	950	31	111	40	910	185	4234
55	194	839	27	103	30	809	164	4366
56	167	736	24	95	23	713	144	4489
57	143	641	21	86	17	624	126	4602
58	122	555	19	76	13	543	109	4704
59	103	479	18	67	9	470	94	4796
60	85	412	17	60	7	405	79	4878
61	68	352	14	54	4	348	64	4953
62	54	298	12	48	3	295	51	5020
63	42	250	11	43	2	248	40	5077
64	31	207	10	38	1	206	31	5131
65	21	169	7	33	1	168	20	5180
66	14	136	6	28	1	135	13	5219
67	8	108	5	23	0	108	8	5253
68	3	85	2	18	0	85	3	5281
69	1	67	1	15	0	67	1	5300
70	0	52		12	0	52	0	5317
71	0	40		10	0	40	0	5329
72		30		9	0	30	0	5339
73		21		7	0	21	0	5348
74		14		5	0	14	0	5355
75		9		3	0	9	0	5360
76		6		2	0	6	0	5363
77		4		1	0	4	0	5365
78		3		1	0	3	0	5366
79		2		1	0	2	0	5367
80		1		1	0	1	0	5368
81		0			0	0	0	5369

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Oettinger, Ludwig,

Anleitung zu finanziellen, politischen und juridischen Rechnungen Ein Handbuch für Staatsmänner, Cameralisten, Kaufleute, Juristen, Forstmänner, Oeconomen ec

Braunschweig 1845

Coburg, Landesbibliothek -- E I 4/53
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11942480-9